Связь между E-группами и свойствами n-умножений на абелевых группах

О. А. КАРПОВ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: ajaxey@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: E-кольцо, E-группа, абелева группа, умножение на группе, n-умножение на группе.

Аннотация

В работе рассматриваются полилинейные отображения абелевой группы в себя (n-умножения) и их свойства. Получены эквивалентные условия того, что абелева группа является E-группой, в терминах свойств n-умножений на группе. Найдена взаимосвязь между свойствами n-умножений одной и той же группы при различных n.

Abstract

O. A. Karpov, Correlation between E-groups and properties of n-multiplications on Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 55—63.

In this paper, we consider multilinear maps of an Abelian group into itself (n-multiplications) and their properties. We obtain equivalent conditions for an Abelian group to be an E-group in terms of n-multiplications. A correlation between properties of n-multiplications on the Abelian group at various n is found.

1. Предварительные сведения

Под группой в работе всегда подразумевается абелева группа, записанная аддитивно. Через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$ будем обозначать группу (кольцо) целых, рациональных и целых p-адических чисел соответственно, через $\mathbb{Z}_m$ — группу (кольцо) классов вычетов по модулю m, через $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — квазициклическую p-группу. Кольцо и группу эндоморфизмов группы A обозначим через $E(A)$ и $\operatorname{End} A$ соответственно.

Далее под кольцом будем подразумевать ассоциативное кольцо с единицей, если не оговорено противное.

Важную роль в теории абелевых групп играют E-кольца и E-группы. Они были введены в 1973 году Ф. Шульцем [4]. E-кольцам посвящено большое количество статей, с базовыми свойствами E-колец можно ознакомиться по [1, § 6; 3].

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 55—63.

Определение 1.1. Кольцо K называется *E-кольцом*, если

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, K) = \mathrm{Hom}_K(K, K).$$

Рассмотрим некоторые свойства E-колец [1, § 6].

1. K является E-кольцом тогда и только тогда, когда всякий эндоморфизм φ аддитивной группы кольца K совпадает с умножением слева кольца K на элемент $\varphi(1)$.
2. E-кольцо K коммутативно.

Предложение 1.1 [1, предложение 6.11]. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *K — E-кольцо;*
2) *если $\varphi \in E(K^+)$ и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi = 0$;*
3) *кольцо $E(K^+)$ коммутативно.*

Пример 1.1. Кольца $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\hat{\mathbb{Z}}_p$ являются E-кольцами.

Аддитивные группы E-колец называются *E-группами*. Из предложения 1.1 вытекают следующие свойства E-групп.

1. Группа A является E-группой тогда и только тогда, когда на A можно задать структуру ассоциативного кольца с единицей и кольцо $E(A)$ коммутативно.
2. Группа A является E-группой тогда и только тогда, когда на A можно задать структуру ассоциативного кольца с единицей и для любого эндоморфизма $\alpha \in E(A)$ из $\alpha(1) = 0$ следует $\alpha = 0$.
3. Группа A является E-группой тогда и только тогда, когда
   а) $A \cong \mathrm{End}(A)$;
   б) кольцо $E(A)$ коммутативно.

Пример 1.2. Группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ не является E-группой, поскольку

$$\mathrm{End}\,\mathbb{Z}_{p^\infty} = \hat{\mathbb{Z}}_p \ncong \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

2. n-умножения с единицей

Отметим, что на связи E-групп и свойств умножений на них обратил внимание ещё Ф. Шульц в [4].

Всюду далее в этом разделе $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число, если не оговорено противное.

Определение 2.1. Полилинейное отображение $\mu^{(n)}\colon A^n \to A$ будем называть *n-умножением* группы A. Все n-умножения образуют группу, которую мы будем называть *группой n-умножений* группы A и обозначать $\mathrm{Mult}^{(n)} A$.

Определение 2.2. n-умножение $\mu^{(n)}$ будем называть *коммутативным*, если для любой перестановки $\sigma \in S_n$ и любого набора $x_1, \ldots, x_n \in A$

$$\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \mu^{(n)}\big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big).$$

Определение 2.3. n-умножение $\mu^{(n)}$ будем называть *ассоциативным*, если для любого набора $x_1, \ldots, x_{2n-1} \in A$ и любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mu^{(n)}\big(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mu^{(n)}(x_i, \ldots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \ldots, x_{2n-1}\big) = \\ = \mu^{(n)}\big(x_1, \ldots, x_{j-1}, \mu^{(n)}(x_j, \ldots, x_{j+n-1}), x_{j+n}, \ldots, x_{2n-1}\big).$$

Определение 2.4. Элемент $1^{(n)}$ группы A, такой что

$$\mu^{(n)}\big(1^{(n)}, \ldots, 1^{(n)}, x_i, 1^{(n)}, \ldots, 1^{(n)}\big) = x_i \quad (i \in \{1, \ldots, n\}),$$

будем называть *n-единицей* умножения $\mu^{(n)}$.

Несложно заметить, что в случае $n = 2$ все определения, данные выше, полностью совпадают с соответствующими определениями для обычных умножений, а при $n = 1$ получаем, что $\operatorname{Mult}^{(n)} A = E(A)$.

Пример 2.1. Определим n-умножение $\mu^{(n)}$ группы $\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \quad \text{для всех} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}.$$

Несложно проверить, что $\mu^{(n)}$ — ассоциативное коммутативное n-умножение с n-единицей.

Лемма 2.1. *На группе A существует умножение с единицей тогда и только тогда, когда на A существует n-умножение с n-единицей для некоторого $n \geqslant 2$. На группе A существует ассоциативное умножение с единицей тогда и только тогда, когда на A существует ассоциативное n-умножение с n-единицей для некоторого $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть на A существует умножение μ с единицей. Рассмотрим n-умножение группы A, заданное следующим образом:

$$\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \mu\big(x_1, \mu\big(x_2, \ldots, \mu(x_{n-1}, x_n)\big) \ldots\big). \tag{$*$}$$

Покажем, что единица умножения μ является n-единицей для n-умножения $\mu^{(n)}$:

$$\mu^{(n)}(1, \ldots, 1, x_i, 1, \ldots, 1) = \\ = \mu\Big(1, \mu\Big(1, \ldots, \mu\Big(x_i, \mu\big(1, \ldots, \mu(1, 1)\big)\Big)\Big) \ldots\Big) = \mu(x_i, 1) = x_i.$$

Пусть теперь на A существует n-умножение $\mu^{(n)}$ с n-единицей $1^{(n)}$. Зададим умножение μ следующим образом:

$$\mu(x, y) = \mu^{(n)}\big(x, y, 1^{(n)}, \ldots, 1^{(n)}\big) \quad \text{для всех} \quad x, y \in A.$$

Билинейность μ следует из полилинейности $\mu^{(n)}$. По определению n-единицы

$$\mu\big(1^{(n)}, x\big) = \mu^{(n)}\big(1^{(n)}, x, 1^{(n)}, \dots, 1^{(n)}\big) = x = \\ = \mu^{(n)}\big(x, 1^{(n)}, \dots, 1^{(n)}\big) = \mu\big(x, 1^{(n)}\big) \quad \text{для всех} \quad x \in A.$$

Значит, элемент $1^{(n)}$ является единицей для умножения μ.

Докажем теперь вторую часть леммы. Пусть μ — ассоциативное умножение с единицей и $a \cdot b$ обозначает $\mu(a, b)$. Определим $\mu^{(n)}$ так же, как и в $(*)$. Тогда

$$\mu^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

(скобки можно опустить из-за ассоциативности μ). Пусть теперь

$$x_1, x_2, \dots, x_{2n-1} \in A$$

и $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\mu^{(n)}\big(x_1, \dots, x_i, \mu^{(n)}(x_{i+1}, \dots, x_{i+n}), x_{i+n+1}, \dots, x_{2n-1}\big) = \\ &\quad = x_1 \cdot \ldots \cdot x_i \cdot (x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_{i+n}) \cdot x_{i+n+1} \cdot \ldots \cdot x_{2n-1} = \\ &\quad = x_1 \cdot \ldots \cdot x_j \cdot (x_{j+1} \cdot \ldots \cdot x_{j+n}) \cdot x_{j+n+1} \cdot \ldots \cdot x_{2n-1} = \\ &\quad = \mu^{(n)}\big(x_1, \dots, x_j, \mu^{(n)}(x_{j+1}, \dots, x_{j+n}), x_{j+n+1}, \dots, x_{2n-1}\big), \end{aligned}$$

т. е. $\mu^{(n)}$ — ассоциативное n-умножение с n-единицей.

Предположим теперь, что $\mu^{(n)}$ — ассоциативное n-умножение с n-единицей и $x, y, z \in A$. Определим μ так же, как и в первой части доказательства леммы. Тогда

$$\begin{aligned} &\mu(\mu(x, y), z) = \mu^{(n)}\big(\mu^{(n)}(x, y, 1, \dots, 1), z, 1, \dots, 1\big) = \\ &\quad = \mu^{(n)}\big(x, y, \mu^{(n)}(1, \dots, 1, z, 1), 1, \dots, 1\big) = \mu^{(n)}(x, y, z, 1, \dots, 1), \\ &\mu\big(x, \mu(y, z)\big) = \mu^{(n)}\big(x, \mu^{(n)}(y, z, 1, \dots, 1), 1, \dots, 1\big) = \\ &\quad = \mu^{(n)}\big(x, y, \mu^{(n)}(z, \dots, 1), 1, \dots, 1\big) = \mu^{(n)}(x, y, z, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Следовательно, μ — ассоциативное умножение с единицей. □

В дальнейшем n-единицу умножения $\mu^{(n)}$ будем называть единицей и обозначать 1 вместо $1^{(n)}$.

Введём понятие *n-аннулятора единицы*:

$$\mathrm{Ann}_1^{(n)} = \big\{\mu^{(n)} \in \mathrm{Mult}^{(n)} A \colon \mu^{(n)}(1, \dots, 1) = 0\big\}.$$

Лемма 2.2. *Пусть на группе A задано умножение $\cdot$ с единицей. Тогда для каждого $n \geqslant 2$*

$$\mathrm{Ann}_1^{(n)} = 0 \iff \mathrm{Ann}_1^{(n-1)} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{Ann}_1^{(n-1)} \neq 0$. Тогда существуют $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$ и $\mu^{(n-1)} \in \mathrm{Ann}_1^{(n-1)}$, такие что $\mu^{(n-1)}(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$. Введём n-умножение $\mu^{(n)}$ следующим образом:

$$\mu^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \mu^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n.$$

Тогда
$$\mu^{(n)}(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) = \mu^{(n-1)}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0,$$
и в то же время
$$\mu^{(n)}(1, \ldots, 1) = \mu^{(n-1)}(1, \ldots, 1) = 0,$$
так как $\mu^{(n-1)} \in \mathrm{Ann}_1^{(n)}$.

Пусть теперь $\mathrm{Ann}_1^{(n)} \neq 0$, т. е. существуют $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $\mu^{(n)} \in \mathrm{Ann}_1^{(n)}$, такие что $\mu^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\mu^{(n)}(1, \ldots, 1, a_n) = 0$. Зададим умножение $\mu^{(n-1)}$:
$$\mu^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_n).$$
Тогда
$$\mu^{(n-1)}(1, \ldots, 1) = \mu^{(n)}(1, \ldots, 1, a_n) = 0,$$
$$\mu^{(n-1)}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \mu^{(n)}(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \neq 0.$$

Случай 2. $\mu^{(n)}(1, \ldots, 1, a_n) \neq 0$. Зададим умножение $\mu^{(n-1)}$:
$$\mu^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \mu^{(n)}(1, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$
Имеем
$$\mu^{(n-1)}(1, \ldots, 1) = \mu^{(n)}(1, 1, \ldots, 1) = 0,$$
$$\mu^{(n-1)}(1, \ldots, 1, a_n) = \mu^{(n)}(1, 1, \ldots, 1, a_n) \neq 0.$$

В обоих случаях получаем, что в $\mathrm{Ann}_1^{(n-1)}$ существует ненулевое умножение. □

Пусть на группе A задано n-умножение $\mu^{(n)}$ с единицей. Для любого $a \in A$ определим n-умножение $\mu_a^{(n)}$ правилом $\mu_a^{(n)} = a \cdot \mu^{(n)}$ и будем называть его *каноническим относительно* $\mu^{(n)}$ n-умножением. Нетрудно проверить, что множество всех канонических относительно $\mu^{(n)}$ n-умножений (при фиксированных n и $\mu^{(n)}$) образует подгруппу в группе $\mathrm{Mult}^{(n)} A$, которую будем обозначать $\mathrm{LM}^{(n)}$.

Лемма 2.3. *Пусть на группе A задано n-умножение $\mu^{(n)}$ с единицей. Тогда*
$$\mathrm{Mult}^{(n)} A = \mathrm{LM}^{(n)} \oplus \mathrm{Ann}_1^{(n)}.$$

Доказательство. Пусть $\nu^{(n)} \in \mathrm{Mult}^{(n)} A$ — произвольное n-умножение. Рассмотрим n-умножение
$$\eta^{(n)} = \nu^{(n)} - \mu^{(n)}_{\nu^{(n)}(1,\ldots,1)}.$$
Тогда
$$\eta^{(n)}(1, \ldots, 1) = \nu^{(n)}(1, \ldots, 1) - \nu^{(n)}(1, \ldots, 1) \cdot \mu^{(n)}(1, \ldots, 1) = \\ = \nu^{(n)}(1, \ldots, 1) - \nu^{(n)}(1, \ldots, 1) \cdot 1 = 0,$$

т. е. $\eta^{(n)} \in \mathrm{Ann}_1^{(n)}$. А значит,

$$\nu^{(n)} = \mu^{(n)}_{\nu^{(n)}(1,\ldots,1)} + \eta^{(n)} \in \mathrm{LM}^{(n)} + \mathrm{Ann}_1^{(n)} .$$

Покажем теперь, что эта сумма прямая. Пусть $\nu^{(n)} \in \mathrm{LM}^{(n)} \cap \mathrm{Ann}_1^{(n)}$. Тогда существует $a \in A$, такой что $\nu^{(n)} = a \cdot \mu^{(n)}$. Поскольку $\nu^{(n)} \in \mathrm{Ann}_1^{(n)}$,

$$a = a \cdot \mu^{(n)}(1, \ldots, 1) = \nu^{(n)}(1, \ldots, 1) = 0,$$

а значит, $\nu^{(n)} = 0 \cdot \mu^{(n)} = 0$. □

Теорема 2.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и на группе A задано ассоциативное n-умножение $\mu^{(n)}$ с n-единицей. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *A — E-группа*;
2) *все n-умножения на A являются каноническими относительно $\mu^{(n)}$*;
3) *все n-умножения на A коммутативны*;
4) *все n-умножения на A ассоциативны.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть на A существует неканоническое n-умножение. Тогда по лемме 2.3 $\mathrm{Ann}_1^{(n)} \neq 0$, т. е. существует n-умножение $\nu^{(n)}$, такое что $\nu^{(n)}(1, 1, \ldots, 1) = 0$, и элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$, такие что $\nu^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Рассмотрим следующие элементы группы A:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \nu^{(n)}(1, 1, \ldots, 1) = 0,\\
b_1 &= \nu^{(n)}(a_1, 1, \ldots, 1),\\
b_2 &= \nu^{(n)}(a_1, a_2, 1, \ldots, 1),\\
&\ldots\\
b_n &= \nu^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $b_0 = 0$, а $b_n \neq 0$, существует $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, такой что $b_i = 0$ и $b_{i+1} \neq 0$. Зададим эндоморфизм φ группы A:

$$\varphi(x) = \nu(a_1, \ldots, a_i, x, 1, \ldots, 1).$$

Тогда $\varphi(1) = b_i = 0$, $\varphi(a_{i+1}) = b_{i+1} \neq 0$. Значит, A не является E-группой, противоречие.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть существует некоммутативное n-умножение $\nu^{(n)}$. Следовательно, существуют $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $\sigma \in S_n$, такие что

$$\nu^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) \neq \nu^{(n)}\big(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}\big).$$

Тогда n-умножение $\eta^{(n)}$, заданное правилом

$$\eta^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) - \nu^{(n)}\big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big),$$

является ненулевым n-умножением и $\eta^{(n)} \in \mathrm{Ann}_1^{(n)}$, противоречие.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть A не является E-группой. Тогда существует ненулевой эндоморфизм α, такой что $\alpha(1) = 0$. Зададим n-умножение $\nu^{(n)}$ следующим образом:

$$\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \alpha(x_1) \cdot \bigl(x_2 \cdot \bigl(\ldots \cdot (x_{n-1} \cdot x_n)\bigr) \ldots\bigr)$$

(под $\cdot$ понимается умножение μ с единицей, индуцируемое n-умножением $\mu^{(n)}$). Заметим, что

$$\nu^{(n)}(a, 1, \ldots, 1) = \alpha(a) \neq 0 = \alpha(1) = \nu^{(n)}(1, a, 1, \ldots, 1),$$

т. е. $\nu^{(n)}$ — некоммутативное n-умножение.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $\nu^{(n)}$ — произвольное n-умножение. По доказанному ранее все n-умножения являются каноническими относительно $\mu^{(n)}$. Следовательно, существует $a \in A$, такой что $\nu^{(n)} = a\mu^{(n)}$. Поскольку A — E-группа, на A существует ассоциативное умножение с единицей, а значит, по лемме 2.1 можно считать, что $\mu^{(n)}$ ассоциативное. Следовательно, $\nu^{(n)}$ — ассоциативное n-умножение.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть A не является E-группой. Тогда существует ненулевой эндоморфизм α, такой что $\alpha(1) = 0$, и элемент $a \in A$, такой что $\alpha(a) \neq 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\alpha^2(a) \neq 0$. Зададим n-умножение $\nu^{(n)}$:

$$\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \mu^{(n)}\bigl(x_1, \ldots, \alpha(x_n)\bigr).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\nu^{(n)}\bigl(1, \ldots, 1, \nu^{(n)}(1, \ldots, 1, a)\bigr) = \nu^{(n)}\bigl(1, \ldots, 1, \alpha(a)\bigr) = \alpha^2(a) \neq 0 = \\ = \nu^{(n)}(0, 1, \ldots, 1, a) = \nu^{(n)}\bigl(\nu^{(n)}(1, \ldots, 1), 1, \ldots, 1, a\bigr),\end{aligned}$$

т. е. $\nu^{(n)}$ — неассоциативное n-умножение.

Случай 2. $\alpha^2(a) = 0$. Рассмотрим эндоморфизм β, заданный по правилу $\beta(x) = x + \alpha(x)$, и n-умножение $\nu^{(n)}$, заданное следующим образом:

$$\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \Bigl(x_2 \cdot \Bigl(\ldots \cdot \bigl(x_{n-1} \cdot \beta(x_n)\bigr)\Bigr) \ldots\Bigr).$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\nu^{(n)}\bigl(1, \ldots, 1, \nu^{(n)}(1, \ldots, 1, a)\bigr) = \nu^{(n)}\bigl(1, \ldots, 1, \beta(a)\bigr) = \beta\bigl(a + \alpha(a)\bigr) = \\ &\quad = a + 2\alpha(a) + \alpha^2(a) = a + 2\alpha(a); \\ &\nu^{(n)}\bigl(\nu^{(n)}(1, \ldots, 1), 1, \ldots, 1, a\bigr) = \nu^{(n)}(\beta(1), 1, \ldots, 1) = \beta(a) = a + \alpha(a).\end{aligned}$$

Заметим, что $a + \alpha(a) \neq a + 2\alpha(a)$, так как $\alpha(a) \neq 0$, а значит, $\nu^{(n)}$ — неассоциативное n-умножение. □

Замечание. Из доказательства теоремы может возникнуть впечатление, что любое n-умножение может быть получено как суперпозиция одного и того же 2-умножения. Следующий несложный пример показывает, что это неверно даже для E-групп.

Пример 2.2. Рассмотрим группу $A = \mathbb{Z}$. Тогда по теореме 2.1 любое её 2-умножение имеет вид $\nu(x, y) = axy$ (для всех $x, y \in A$). Рассмотрим теперь 3-умножение $\nu^{(3)}$: $\nu^{(3)}(x, y, z) = -xyz$. Предположим, что $\nu^{(3)}(x, y, z) = \nu(\nu(x, y), z)$ для некоторого $\nu \in \operatorname{Mult} A$. Тогда при $x = y = z = 1$ получаем

$$-1 \cdot 1 \cdot 1 = a \cdot a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,$$

т. е. $a^2 = -1$, что невозможно ни при каком $a \in \mathbb{Z}$.

3. Связь между свойствами n-умножений для различных n

Лемма 3.1. $\operatorname{Mult}^{(n)} A \cong \operatorname{Hom}\bigl(A, \operatorname{Mult}^{(n-1)} A\bigr)$.

Доказательство. Пусть $f\colon \operatorname{Mult}^{(n)} A \to \operatorname{Hom}\bigl(A, \operatorname{Mult}^{(n-1)} A\bigr)$ — отображение, заданное следующим образом:

$$f\colon \mu^{(n)} \mapsto \varphi_{\mu^{(n)}},$$

где $\bigl(\varphi_{\mu^{(n)}}(x_1)\bigr)(x_2, \ldots, x_n) = \mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in A$.

Покажем гомоморфность:

$$\begin{aligned}\bigl(\varphi_{\mu^{(n)}+\nu^{(n)}}(x_1)\bigr)(x_2, \ldots, x_n) &= \bigl(\mu^{(n)} + \nu^{(n)}\bigr)(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= \mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) + \nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= \bigl(\varphi_{\mu^{(n)}}(x_1)\bigr)(x_2, \ldots, x_n) + \bigl(\varphi_{\nu^{(n)}}(x_1)\bigr)(x_2, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Покажем инъективность. Пусть $\mu^{(n)} \in \operatorname{Ker} \varphi$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n$ из A

$$\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \bigl(\varphi_{\mu^{(n)}}(x_1)\bigr)(x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Следовательно, $\mu^{(n)} = 0$.

Покажем сюръективность. Пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}\bigl(A, \operatorname{Mult}^{(n-1)} A\bigr)$ — произвольный гомоморфизм. Тогда рассмотрим n-умножение $\mu^{(n)}$, заданное по правилу

$$\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \bigl(\varphi(x_1)\bigr)(x_2, \ldots, x_n).$$

Заметим, что

$$\bigl(\varphi_{\mu^{(n)}}(x_1)\bigr)(x_2, \ldots, x_n) = \mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \bigl(\varphi(x_1)\bigr)(x_2, \ldots, x_n),$$

а значит, $\varphi_{\mu^{(n)}}(x_1) = \varphi(x_1)$ для любого $x_1 \in A$, т. е. $\varphi = \varphi_{\mu^{(n)}} = f(\mu^{(n)})$. □

Предложение 3.1. *Если все n-умножения на A коммутативны ($n \geqslant 2$), то все $(n+1)$-умножения на A коммутативны.*

Доказательство. Пусть существует некоммутативное $(n+1)$-умножение $\nu^{(n+1)}$. Тогда существуют транспозиция $\tau = (ij) \in S_n$ (без ограничения общности можно считать, что $i = 1$, $j = 2$) и $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$, такие что

$$\nu^{(n+1)}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) \neq \nu^{(n)}(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_{n+1}).$$

Зададим n-умножение $\nu^{(n)} \in \operatorname{Mult}^{(n)} A$. Для любых $x_1, \ldots, x_n \in A$ положим

$$\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \nu^{(n+1)}(x_1, \ldots, x_n, a_{n+1}).$$

Получаем

$$\nu^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \nu^{(n+1)}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}),$$
$$\nu^{(n)}(a_2, a_1, \ldots, a_n) = \nu^{(n+1)}(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_{n+1}).$$

Из $\nu^{(n+1)}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) \neq \nu^{(n+1)}(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_{n+1})$ следует, что $\nu^{(n)}$ — некоммутативное n-умножение, противоречие. □

Замечание. Утверждение, обратное к предложению 3.1, в общем случае неверно. Обозначим через A_k группу без кручения ранга 1, имеющую тип $[(k)_{p \in P}]$ (например, в качестве группы A_k можно взять подгруппу $\mathbb{Q}$, порождённую дробями $1/p^k$ по всем простым p). Будем считать, что

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset \mathbb{Q}.$$

Отметим, что $a_i \cdot a_j \in A_{i+j}$ для любых $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ (здесь $\cdot$ — умножение в поле $\mathbb{Q}$). Теперь рассмотрим группу $A = A_2 \oplus A_3 \oplus A_5$. Найдём $\operatorname{Mult}^{(3)} A$, пользуясь леммой 3.1 и тем, что $\operatorname{Hom}(A_i, A_j) \cong A_{j-i}$ при $j \geqslant i$ и $\operatorname{Hom}(A_i, A_j) = 0$ при $i > j$:

$$\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Hom}(A, \operatorname{End} A) \cong \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3) \cong \mathbb{Z} \oplus A_1 \oplus \mathbb{Z},$$
$$\operatorname{Mult}^{(3)} A \cong \operatorname{Hom}(A, \operatorname{Mult}\ A) \cong \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z} \oplus A_1 \oplus \mathbb{Z}) = 0.$$

Поскольку нулевое 3-умножение коммутативно, полученное выше равенство означает, что все 3-умножения на A коммутативны.

Зададим теперь умножение μ следующим образом:

$$\mu\big((a_2, a_3, a_5), (b_2, b_3, b_5)\big) = (0, 0, a_2 \cdot b_3),$$

где $a_i, b_i \in A_i$ $(i = 2, 3, 5)$. Заметим, что

$$\mu\big((1,0,0),(0,1,0)\big) = (0,0,1) \neq (0,0,0) = \mu\big((0,1,0),(1,0,0)\big).$$

Следовательно, μ — некоммутативное умножение.

Литература

[1] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал Пресс, 2006.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[3] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[4] Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Aust. Math. Soc. — 1973. — Vol. 15. — P. 60—69.