# Решётка вполне характеристических подгрупп копериодической группы

**Т. Г. КЕМОКЛИДЗЕ**
*Кутаисский государственный университет*
*им. Акакия Церетели, Грузия*
e-mail: kemoklidze@gmail.com

УДК 512.54

**Ключевые слова:** копериодическая группа, вполне транзитивная группа, решётка вполне характеристических подгрупп.

**Аннотация**

Для сепарабельных $p$-групп обсуждаются вопросы полной транзитивности и описания решётки вполне характеристических подгрупп копериодической оболочки. Рассматривается случай, когда копериодическая оболочка не вполне транзитивна, и строится функция, отличная от индикатора, позволяющая изучить решётку вполне характеристических подгрупп копериодической группы.

**Abstract**

*T. G. Kemoklidze, The lattice of fully invariant subgroups of a cotorsion group*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 65—73.

For separable $p$-groups, the questions concerning the full transitivity and description of the lattice of fully invariant subgroups of the cotorsion hull are discussed. We consider the case in which the cotorsion hull is not fully transitive, and construct a function, different from the indicator, that makes it possible to study the lattice of fully invariant subgroups of a cotorsion group.

## 1. Введение

В работе рассматриваются вопросы теории абелевых групп и слово «группа» всюду означает аддитивно записанную абелеву группу. Символ $p$ обозначает фиксированное простое число. $Z$, $Q$ — группы целых и рациональных чисел соответственно. Мы воспользуемся обозначениями и терминологией монографий [3, 4].

Изучение вполне характеристических подгрупп группы и решётки, ими образуемой, является важной задачей теории абелевых групп. Для достаточно широкого класса $p$-групп этот вопрос изучен в [1, 10, 15, 19, 22] и других статьях. Исследованию этого вопроса в группах без кручения и смешанных группах посвящены [2, 6, 7, 16, 19, 20] и другие работы.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2019, том 22, № 5, с. 65—73.

Однако мало известно о решётке вполне характеристических подгрупп в классе копериодических групп. Группа $A$ называется копериодической, если её расширение с помощью любой группы без кручения $C$ расщепляется: $\mathrm{Ext}(C, A) = 0$. Значение класса копериодических групп в классе абелевых групп определяется двумя факторами: для любых групп $A$, $B$ группа $\mathrm{Ext}(A, B)$ копериодическая; всякая редуцированная группа $A$ изоморфно вложима в группу $A^\bullet = \mathrm{Ext}(Q/Z, A)$, называемую копериодической оболочкой группы $A$, при этом $A^\bullet/A$ — делимая группа без кручения. Любая редуцированная копериодическая группа $A$ разлагается в прямую сумму $A = T^\bullet \oplus C$, где $T^\bullet \cong \mathrm{Ext}(Q/Z, T)$, $T = tA$ — периодическая часть группы $A$, а $C$ — алгебраически компактная группа без кручения. Если $T = \bigoplus\limits_p T_p$ — разложение в прямую сумму примарных компонент, то

$$\mathrm{Ext}(Q/Z, tG) \cong \prod_p \mathrm{Ext}(Z(p^\infty), T_p).$$

Таким образом, изучение копериодических групп в значительной степени сводится к изучению групп вида $\mathrm{Ext}\big(Z(p^\infty), T)\big)$, где $T$ — примарная группа.

Изучение вполне характеристических подгрупп в копериодических группах актуально ещё и потому, что в этом классе групп эндоморфизмы вполне определяются их действиями на периодическую часть и, как показано в [17, теорема 3.3], в смешанных группах кольца эндоморфизмов $E(A)$ и $E(tA)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $A$ — вполне характеристическая подгруппа копериодической оболочки $(tA)^\bullet$ (см. также [5, гл. XI, п. 6]). При изучении решётки вполне характеристических подгрупп группы в значительной степени используются понятия индикатора элемента и вполне транзитивной группы.

$p$-индикатором элемента $a$ группы $A$ является возрастающая последовательность порядковых чисел и символов $\infty$,

$$H_A(a) \equiv H(a) = (h(a), h(pa), \ldots, h(p^n a), \ldots),$$

где $h$ означает обобщённую $p$-высоту элемента, т. е. $h(a) = \sigma$, если $a \in p^\sigma A \setminus p^{\sigma+1}A$, и $h(0) = \infty$. В множестве индикаторов можно ввести порядок:

$$H(a) \leqslant H(b) \Longleftrightarrow h(p^i a) \leqslant h(p^i b), \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Редуцированная $p$-группа называется вполне транзитивной, если для её произвольных элементов $a$ и $b$, когда $H(a) \leqslant H(b)$, существует эндоморфизм $\varphi$ группы, такой что $\varphi a = b$. Во вполне транзитивных группах решётка вполне характеристических подгрупп изучается с помощью индикаторов (см., например, [4, теорема 67.1]).

Пополнение в $p$-адической топологии $p$-группы $T$ обозначается через $\hat{T}$. Периодическая часть группы $T$ $\bar{T}$ — периодически полная группа. А. Мадер [16] показал, что алгебраически компактная группа вполне транзитивна, и с помощью индикаторов дал описание решётки вполне характеристических подгрупп алгебраически компактной группы, а также в обобщённом виде указал условия, при выполнении которых описывается решётка вполне характеристических подмодулей.

**Теорема 1.1 (А. Мадер [16]).** *Пусть $A$ — модуль над коммутативным кольцом $R$, $\Delta$ — решётка всех его вполне характеристических подмодулей, $\Omega$ — некоторая нижняя полурешётка и $\Phi\colon A \to \Omega$ — отображение со следующими свойствами:*

1) $\Phi$ *сюръективно;*
2) $\Phi(fa) \geqslant \Phi(a)$ *для всех* $a \in A$ *и* $f \in \operatorname{End} A$;
3) $\Phi(a+b) \geqslant \Phi(a) \wedge \Phi(b)$;
4) *если* $\Phi(a) \geqslant \Phi(b)$, *то существует эндоморфизм* $f$ *модуля* $A$, *такой что* $f(b) = a$;
5) *если* $C \in \Delta$, *то для любых* $a, b \in C$ *существует элемент* $c \in C$, *такой что* $\Phi(c) = \Phi(a) \wedge \Phi(b)$.

*Тогда множество $\Omega^*$ всех фильтров (дуальных идеалов) $\Omega$, упорядоченное по включению, является решёткой и отображение $\alpha\colon \Omega^* \to \delta$, определённое правилом $\alpha(D) = \{a \in A \mid \Phi(a) \in D\}$, — решёточным изоморфизмом.*

Так же как в $p$-группах, определим понятие полной транзитивности в группе $T^\bullet = \operatorname{Ext}(Z(p^\infty), T)$. Если $T$ — периодически полная группа, то её копериодическая оболочка — алгебраически компактная и, как отмечали выше, вполне транзитивная группа. А. И. Москаленко [20] доказала, что когда $T$ является прямой суммой циклических $p$-групп, то $T^\bullet$ также вполне транзитивна и выполняются все условия теоремы Мадера. Стало быть, и в этом случае решётка $\Omega^*$ дуальных идеалов индикаторов описывает решётку вполне характеристических подгрупп. Естественным обобщением классов прямых сумм циклических $p$-групп и периодически полных групп является прямая сумма периодически полных групп. Как показал автор [11], в этом классе групп, когда сумма бесконечна, копериодическая оболочка не вполне транзитивна. Поэтому из-за условия 4) теоремы Мадера использовать индикаторы для описания решётки вполне характеристических подгрупп нельзя. Здесь мы укажем другую функцию, удовлетворяющую требованиям теоремы Мадера.

## 2. Решётка вполне характеристических подгрупп редуцированной копериодической группы

Пусть $p$-группа $T$ — прямая сумма периодически полных групп

$$T = \bigoplus_{i\in I}^{\infty} \bar{B}_i, \tag{2.1}$$

где $B_i$ — базисная подгруппа группы $\bar{B}_i$, а $B = \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$ — базисная подгруппа в $T$. Будем считать, что $I$ — это вполне упорядоченное множество индексов. Для сепарабельной $p$-группы $T$ элементы копериодической оболочки $T^\bullet$ А. И. Москаленко [20] представила в виде счётных последовательностей

$$T^\bullet = \{(a_0, a_1 + T, \ldots, a_i + T, \ldots) \mid a_i \in \hat{T},\ pa_{i+1} - a_i \in T,\ i = 0, 1, \ldots\}.$$

При такой записи элементов легко вычисляются их высота и индикатор. В частности, если $a = (a_0, a_1 + T, \ldots)$, то

$$H_{T^\bullet}(a) = \begin{cases} H_{\hat{T}}(a_0), \text{ если } \mathcal{O}(a_0) = \infty, \\ (h_{\hat{T}}(a_0), h_{\hat{T}}(pa_0), \ldots, h_{\hat{T}}(p^{n-1}a_0), \omega + m, \omega + m + 1, \ldots), \\ \quad \text{если } a_0 \in \hat{T} \setminus T,\ \mathcal{O}(a_0) = p^n,\ \mathcal{O}(a_0 + T) = p^{n-m}, \\ (h_T(a_0), h_T(pa_0), \ldots, h_T(p^{n-1}a_0), \omega + n + k, \omega + n + k + 1, \ldots), \\ \quad \text{если } \mathcal{O}(a_0) = p^n,\ a_0, a_0, \ldots, a_k \in T,\ a_{k+1} \notin T, \\ H_T(a_0), \text{ если } a_i \in T \text{ для любого } i, \end{cases}$$

где $\omega$ является наименьшим бесконечным порядковым числом.

Пусть $B = \bigoplus\limits_{\alpha \in J} \langle x_\alpha \rangle$ — фиксированная базисная подгруппа сепарабельной $p$-группы $T$. Если $a \in T^\bullet$, $a = (a_0, a_1 + T, \ldots)$, то в группе $B$ существует последовательность $(b_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, такая что для любого $i$

$$b_i = \sum_{j=1}^{s} m_{i_j} x_{i_j}, \quad 0 \leqslant m_{i_j} < p, \quad a_i = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{s=0}^{n} p^s b_{i+s} \right). \tag{2.2}$$

Такое представление элемента $a$ называется каноническим. Говорят, что последовательность $(b_i)$ соответствует каноническому представлению элемента $a$. Справедливы следующие утверждения (см. [20]).

**Предложение 2.1.** *Если $H_{T^\bullet}(a) = (k_0, k_1, \ldots)$, $(b_i)$ — последовательность, соответствующая каноническому представлению элемента $a$, и между $k_i$ и $k_{i+1}$ имеется скачок, то в разложении $b_{k_i - i}$ по базису $\{x_\alpha \mid \alpha \in J\}$ участвует элемент $x_\alpha$ порядка $p^{k_i+1}$.*

**Предложение 2.2.** *Если $H_{T^\bullet}(a)$ — есть последовательность натуральных чисел, то в ней имеет место бесконечное число скачков.*

Пусть группа $T$ имеет вид (2.1) и $a \in T^\bullet$. Обозначим через $\pi_i$ проекцию группы $T$ на прямое слагаемое $\bar{B}_i$ и рассмотрим последовательность (см. (2.2))

$$\pi_i(b_j) = (b_{ij}), \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Для каждого $i \geqslant 1$ последовательность $b_{i0}, b_{i1}, \ldots$ при фиксированном $k$ определяет элемент

$$a_{ik} = \lim_{n \to \infty} \sum_{s=0}^{n} p^s b_{i,k+s},$$

а элементы $a_{i0}, a_{i1}, \ldots$ группы $\hat{B}_i$ определяют элемент

$$a^{(i)} = (a_{i0}, a_{i1} + T, a_{i2} + T, \ldots)$$

группы $T^\bullet$. Очевидно, что

$$a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}.$$

Каждому элементу $a \in T^\bullet$ поставим в соответствие матрицу

$$\Phi(a) = \|H(a_{i0})\|_{i \geqslant 0},$$

где $H(a_{00}) = H_{T^\bullet}(a)$, $H(a_{i0}) = H_{\hat{T}}(a_{i0})$, когда $i \geqslant 1$, а индикаторы записаны столбцом.

**Определение 2.1.** Матрицу $\|k_{ij}\|_{i \in I,\ j=0,1,\ldots}$, составленную из порядковых чисел и символов $\infty$, назовём допустимой относительно группы $T$, если выполнены следующие условия:

1) нулевая строка $k_{01}, k_{02}, \ldots$ — возрастающая последовательность порядковых чисел, такая что $k_{0i} < \omega + \omega$, если $k_{0i} = \infty$. Если $k_{0j} \geqslant \omega$, то $k_{0\,n+1} = k_{0n} + 1$ для любого $n \geqslant j$, а другие строки представляют собой возрастающие последовательности неотрицательных целых чисел или символов $\infty$ (считается, что $\infty + 1 = \infty$);
2) если $k_{0n} = \omega + m$ — первое бесконечное порядковое число и $m < n$, то в бесконечном числе строк встречаются неотрицательные целые числа, причём существует строка $i_0$, такая что $k_{i\,n-m} = \infty$ при $i \geqslant i_0$. Когда $k_{0n} = \omega + m$, $m \geqslant n$, то начиная с некоторого $i_0$ все строки составлены только из символов $\infty$;
3) если в строке все элементы — целые неотрицательные числа, то в ней имеются бесконечно много скачков;
4) если между $k_{ij}$ и $k_{i,j+1}$ имеется скачок, то в группе $B_i$ существует базисный элемент порядка $p^{k_{ij}+1}$ (считается, что $B_0 = B$);
5) в каждом столбце $k_{ij} \to \infty$, когда $i \to \infty$ (т. е. $i$ пробегает все значения вполне упорядоченного множества $I$), причём если $k_{0j} \neq \omega + m$, то $k_{0j} = \min\{k_{1j}, k_{2j}, \ldots\}$, а если $k_{0j} = \omega + m$, то $k_{1j} = k_{2j} = \ldots = \infty$.

Если учесть равенство (2.1) и предложения 2.1, 2.2, то можно заметить, что для любого $a \in T^\bullet$ матрица $\Phi(a)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям.

Из определения 2.1 следует, что мы имеем дело с матрицами следующих трёх типов.

$$\text{I.} \qquad \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & \ldots \\ k_{10} & k_{11} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

где $k_{ij}$ — целые неотрицательные числа или символы $\infty$.

$$\text{II.} \qquad \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & \ldots\ldots & k_{0\,n-1} & \omega+m & \omega+m+1 & \ldots \\ k_{10} & k_{11} & \ldots\ldots & k_{1\,n-1} & \infty & \infty & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{t0} & k_{t1} & \ldots\ k_{t\,n-m-1}\ \ \infty & \ldots & \infty & \ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

где $m < n$ и $k_{ij}$ — целые неотрицательные числа (см. первое предложение пункта 2) определения 2.1).

$$\text{III.}\quad \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & \dots & k_{0\,n-1} & \omega+n+k & \omega+n+k+1 & \dots \\ k_{10} & k_{11} & \dots & k_{1\,n-1} & \infty & \infty & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i-1\,0} & k_{i-1\,1} & \dots & k_{i-1\,n-1} & \infty & \infty & \dots \\ \infty & \infty & \dots & \infty & \infty & \infty & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

где $k_{ij}$ — целые неотрицательные числа (см. второе предложение пункта 2) определения 2.1).

Обозначим через $\Omega$ множество всех допустимых относительно $T$ матриц и определим на множестве $\Omega$ отношение $\leqslant$.

**Определение 2.2.** Пусть $K = \|k_{ij}\|$, $K' = \|k'_{ij}\|$, $i \in I$, $j = 0, 1, \ldots,$ — элементы множества $\Omega$. Скажем, что $K \leqslant K'$, если $k_{0j} \leqslant k'_{0j}$, $j = 0, 1, \ldots$, и каждому элементу $k'_{ij}$ $(i \geqslant 1)$, где встречается скачок, можно поставить в соответствие элемент $k_{mn}$ $(m \geqslant 1)$, где также встречается скачок, такой что $k_{mn} - n \leqslant k'_{ij} - j$ и $n \geqslant j$, причём выполняются следующие два условия:

1) каждый элемент $k_{mn}$, где встречается скачок, имеет только конечное число (возможно, ни одного) прообразов;
2) если $k_{ij_0}, k_{ij_1}, \ldots$ — бесконечное число элементов $i$-й строки матрицы $K$, отличных от символа $\infty$, и соответственно $k'_{m_0n_0}, k'_{m_1n_1}, \ldots$ — их прообразы, причём последовательность номеров строк $m_0, m_1, \ldots$ неограниченно возрастает, то $j_k - n_k \to \infty$, когда $k \to \infty$.

Легко проверяется, что данное отношение на множестве $\Omega$ рефлексивно и транзитивно. Однако можно привести пример, показывающий, что оно не антисимметрично (см. [13]). Тогда отношение

$$U \,\rho\, V \underset{\text{def}}{=} [U \leqslant v \text{ и } V \leqslant U]$$

является эквивалентностью на множестве $\Omega$, а отношение $\leqslant$

$$\bar{U} \leqslant \bar{V} \underset{\text{def}}{=} U \leqslant V,$$

определённое на фактор-множестве $\Omega/\rho = \bar{\Omega}$, является порядком.

Если $\bar{U}, \bar{V} \in \bar{\Omega}$, где $U = \|u_{ij}\|$, $V = \|v_{ij}\|$ — допустимые матрицы относительно группы $T$, то в множестве $\bar{\Omega}$ можно определить точную нижнюю грань элементов $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{U} \wedge \bar{V} = \bar{W}$, где $W = \|\min(u_{ij}, v_{ij})\|$, $i \in I$, $j = 0, 1, \ldots$, с помощью которой множество $\bar{\Omega}$ с отношением $\leqslant$ становится нижней полурешёткой.

Доказывается, что функция $\bar{\Phi}\colon T^{\bullet} \to \bar{\Omega}$, $\bar{\Phi}(a) = \overline{\Phi(a)}$, где $T$ — прямая сумма периодически полных групп, удовлетворяет условиям теремы Мадера. Стало быть, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1 [13, теорема 3.1].** *Решётка вполне характеристических подгрупп копериодической оболочки прямой суммы периодически полных групп изоморфна решётке фильтров полурешётки $\bar{\Omega}$.*

Как отмечалось выше, изучение решётки вполне характеристических подгрупп редуцированной копериодической группы $A$ сводится к изучению решётки таких подгрупп группы

$$A = \mathrm{Ext}(Z(p^\infty), T) \oplus C,$$

где $C$ — алгебраически компактная группа без кручения. Предположим, что $T$, как и выше, является прямой суммой периодически полных групп. Тогда для описания решётки вполне характеристических подгрупп группы $A$ рассмотрим множество

$$\Omega^* = \bar{\Omega} \cup \bar{H},$$

где $\bar{\Omega}$ — полурешётка, упомянутая в теореме 2.1, а $\bar{H}$ — множество возрастающих последовательностей целых неотрицательных чисел, где встречается только конечное число скачков, причём если между $k_i$ и $k_{i+1}$ имеется скачок, то в базисной подгруппе $B$ группы $T$ встречается базисный элемент порядка $p^{k_i+1}$.

Как было сказано выше, элементы множества $\bar{\Omega}$ — это классы допустимых матриц, где первая строка определяется однозначно. Определим на множестве $\Omega^*$ отношение $\leqslant$. Если $\bar{K}, \bar{K}' \in \bar{\Omega}$, то определим $\bar{K} \leqslant \bar{K}'$ так же, как и в множестве $\bar{\Omega}$. В остальных случаях должно выполняться $k_i \leqslant k_i'$, $i = 0, 1, \ldots$, где $(k_i)$, $(k_i')$ — первые строки матриц, взятых из классов множества $\bar{\Omega}$ или последовательности из $\bar{H}$. Очевидно, что отмеченное отношение является отношением порядка на множестве $\Omega^*$.

Если $\bar{K}, \bar{K}' \in \bar{\Omega}$, то точную нижнюю грань этих элементов $\inf(\bar{K}, \bar{K}')$ определим так же, как и в множестве $\bar{\Omega}$. Если даны $\bar{K} \in \bar{\Omega}$ и $H = (k_0', k_1', \ldots) \in \bar{H}$, то $\inf(\bar{K}, H) = \min(k_{0j}, k_j')$, где $(k_{0j})_{j \geqslant 0}$ — первая строка допустимой матрицы $K$. Если учесть определение матрицы $K$, то можно заметить, что $\inf(\bar{K}, H) \in \bar{H}$. Определим аналогично $\inf(H_1, H_2)$, если $H_1, H_2 \in \bar{H}$. Легко заметить, что это определение удовлетворяет требованиям точной нижней грани. Значит, множество $\Omega^*$ является нижней полурешёткой.

Рассмотрим отображение

$$\Phi^\bullet \colon A \to \Omega^*,$$

которое каждому элементу $a \in T^\bullet$ ставит в соответствие $\bar{\Phi}(a)$, а если $a = t + c$, где $c \neq 0$, $c \in C$, $t \in T^\bullet$, то $\Phi^\bullet(a) = H(a)$, где $H(a)$ — $p$-индикатор элемента $a$.

Доказывается, что функция $\Phi^\bullet$ удовлетворяет всем условиям теоремы Мадера и, следовательно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.2 [12].** *Решётка вполне характеристических подгрупп копериодической группы, периодическая часть которой является прямой суммой периодически полных $p$-групп, изоморфна решётке фильтров полурешётки $\Omega^*$.*

А. И. Москаленко изучила также решётку вполне характеристических подгрупп копериодической оболочки сепарабельной $p$-примарной группы $T$, когда периодическая часть группы $\hat{T}/T$ изоморфна группе $Z(p^\infty)$. Отметим, что класс таких групп $T$ достаточно широк. Как показано в [9], существует $2^C$ неизоморфных групп $T$ мощности $C$, обладающих указанным свойством и имеющих одну и ту же базисную подгруппу.

**Теорема 2.3 [21].** *Пусть $t(\hat{T}/T) \cong Z(p^\infty)$, и пусть $T \subset A \subset C$, где*

$$C = \{(c_0, c_1 + T, \ldots) \mid c_0 \in t\hat{T}\}.$$

*Тогда $A$ является вполне характеристической подгруппой группы $T^\bullet$ тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$A = \{a \in T^\bullet \mid H(a) \in D\},$$

*где $D$ — дуальный идеал полурешётки (относительно пересечений) всех таких индикаторов элементов из $T^\bullet$, в которых лишь конечное число координат является натуральными числами.*

**Теорема 2.4 [21].** *Пусть $t(\hat{T}/T) \cong Z(p^\infty)$. Если $A$ — сервантная вполне характеристическая подгруппа группы $T^\bullet$, содержащая $T$ и содержащаяся в*

$$C = \{(c_0, c_1 + T, \ldots) \mid c_0 \in t\hat{T}\}.$$

*Тогда $A$ совпадает либо с $T$, либо с $C$.*

Как отмечалось выше, для описания решётки вполне характеристических подгрупп группы важно иметь в виду полную транзитивность группы. В [14] было показано, что для сепарабельной $p$-примарной группы $T$ если $a_0, b_0 \in \hat{T}$, $\mathcal{O}(a_0) = \mathcal{O}(b_0) = p$, $h(a_0) \leqslant h(b_0)$ и не существует эндоморфизма $\varphi$ группы $T$, при продолжении которого на $\hat{T}$ имеет место $\varphi a_0 = b_0$, то копериодическая оболочка $T^\bullet$ не вполне транзитивна.

## Литература


[1] Baer R. Type of elements and characteristic subgroups of Abelian groups // Proc. London Math. Soc. (2) — 1935. — Vol. 39. — P. 481—514.

[2] Chekhlov A. R. On projective invariant subgroups of Abelian groups // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. — 2009. — Vol. 2009, No. 1. — P. 31—36.

[3] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vol. I. — London: Academic Press, 1970. — (Pure Appl. Math.; Vol. 36).

[4] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vol. II. — London: Academic Press, 1973. — (Pure Appl. Math., Vol. 36-II).

[5] Fuchs L., Salce L. Modules over non-Noetherian Domains. — Providence: Amer. Math. Soc., 2001. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 84).

[6] Göbel R. The characteristic subgroups of the Baer—Specker group // Math. Z. — 1974. — Vol. 140, No. 3. — P. 289—292.

[7] Grinshpon S. Ya., Krylov P. A. Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 128, No. 3. — P. 2894—2997.

[8] Harrison D. K. Infinite Abelian groups and homological methods // Ann. Math. (2) — 1959. — Vol. 69. — P. 366—391.

[9] Hill P., Megibben Ch. Minimal pure subgroups in primary groups // Bull. Soc. Math. France. — 1964. — Vol. 92. — P. 251—257.

[10] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1969.

[11] Kemoklidze T. On the full transitivity of a cotorsion hull // Georgian Math. J. — 2006. — Vol. 13, No. 1. — P. 79—84.

[12] Kemoklidze T. The lattice of fully invariant subgroups of a reduced cotorsion group // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2010. — Vol. 152. — P. 43—58.

[13] Kemoklidze T. The lattice of fully invariant subgroups of the cotorsion hull // Adv. Pure Math. — 2013. — Vol. 3, No. 8. — P. 670—679.

[14] Kemoklidze T. On the full transitivity of a cotorsion hull of the Pierce group // Adv. Pure Math. — 2014. — Vol. 4, No. 3. — P. 76—81.

[15] Linton R. S. On fully invariant subgroups of primary Abelian groups // Michigan Math. J. — 1976. — Vol. 22, No. 3. — P. 281—284.

[16] Mader A. The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact groups // Publ. Math. Debrecen. — 1970. — Vol. 17. — P. 299—306.

[17] May W., Toubassi E. Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky // J. Algebra. — 1976. — Vol. 43, No. 1. — P. 1—13.

[18] Misyakov V. M. On the complete transitivity of reduced Abelian groups // Abelian Groups Modules. — 1994. — No. 11, 12. — P. 134—156, 256.

[19] Moore J. D., Hewett E. J. On fully invariant subgroups of Abelian $p$-groups // Comment. Math. Univ. St. Paul. — 1971/72. — Vol. 20. — P. 97—106.

[20] Moskalenko A. I. Cotorsion hull of a separable group // Algebra Logika. — 1989. — Vol. 28, No. 2. — P. 207—226.

[21] Moskalenko A. I. On pure completely characteristic subgroups of a coperiodic group // Abelian Groups Modules. — 1994. — No. 11, 12. — P. 157—165, 257.

[22] Pierce R. S. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups (Proc. Sympos., New Mexico State Univ., 1962). — Chicago: Scott, Foresman and Co., 1963. — P. 215—310.