К вопросу полной транзитивности копериодической оболочки

Т. Г. КЕМОКЛИДЗЕ
Кутаисский государственный университет им. Акакия Церетели, Грузия
e-mail: kemoklidze@gmail.com

УДК 512.54

Ключевые слова: копериодическая оболочка, вполне транзитивная группа, вполне характеристическая подгруппа.

Аннотация

Обсуждается вопрос полной транзитивности копериодической оболочки сепарабельной p-группы, имеющий важное значение при описании решётки вполне характеристических подгрупп группы. Приведено условие, при выполнении которого копериодическая оболочка не вполне транзитивна.

Abstract

T. G. Kemoklidze, To the question of full transitivity of a cotorsion hull, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 75—80.

We discuss the topic of full transitivity of the cotorsion hull of a separable p-group. This topic plays a significant role in the description of the lattice of fully invariant subgroups of a group. A condition is established, the fulfillment of which makes the cotorsion hull not fully transitive.

1. Введение

В статье рассматриваются вопросы теории абелевых групп и под группой всюду подразумевается аддитивно записанная абелева группа. В тексте мы используем обозначения и терминологию из [2, 3].

Символ p означает фиксированное простое число, Z и Q — группы целых и рациональных чисел соответственно. Пополнение сепарабельной p-группы T в p-адической топологии обозначено $\hat{T}$. Её периодическая часть $\bar{T}$ — периодически полная группа. По теореме Л. Я. Куликова [1] сепарабельная примарная группа T является сервантной и плотной подгруппой, заключённой между B и $\bar{B}$, где $B = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n = \bigoplus Z(p^n)$, — базисная подгруппа группы T. элементы группы T можно рассматривать как векторы вида $a = (b_1, b_2, \ldots)$, где $b_n \in B_n$. Этот вектор мы будем записывать также в виде бесконечной суммы $a = b_1 + b_2 + \ldots$, где $h(b_n) \to \infty$, когда $n \to \infty$.

p-индикатором элемента a группы A является возрастающая последовательность порядковых чисел и символов ∞,

$$H_A(a) \equiv H(a) = (h(a), h(pa), \ldots, h(p^n a), \ldots),$$

где h означает обобщённую p-высоту элемента, т. е. $h(a) = \sigma$, если $a \in p^\sigma A \setminus p^{\sigma+1}A$, и $h(0) = \infty$. В множестве индикаторов можно ввести порядок

$$H(a) \leqslant H(b) \Longleftrightarrow h(p^i a) \leqslant h(p^i b), \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Редуцированная p-группа называется вполне транзитивной, если для её произвольных элементов a и b, когда $H(a) \leqslant H(b)$, существует эндоморфизм группы φ, такой что $\varphi a = b$.

Решётка вполне характеристических подгрупп вполне транзитивной примарной группы в терминах индикаторов была описана И. Капланским [3, теорема 67.1]. В [6] А. Мадер обобщил теорему Капланского на случай модуля над коммутативным кольцом, если на данном модуле может быть определена функция со свойствами, аналогичными свойствам индикатора элементов p-группы. При этом условие полной транзитивности модуля, как и в теореме Капланского, играет ключевую роль.

Исследование решётки вполне характеристических подгрупп в копериодических группах мотивируется тем, что в этом классе групп эндоморфизмы вполне определяются с помощью эндоморфизмов периодической части группы и, как показано в [7, теорема 3.3], для редуцированной группы A с периодической частью T кольцо эндоморфизмов группы A изоморфно кольцу эндоморфизмов группы T тогда и только тогда, когда A — вполне характеристическая подгруппа копериодической оболочки $T^\bullet = \mathrm{Ext}(Q/Z, T)$ группы T.

Если T — p-группа, то её копериодическая оболочка $T^\bullet$ равна $\mathrm{Ext}(Z(p^\infty), T)$ и является p-адическим модулем. По аналогии с p-группами в группе $T^\bullet$ можно определить высоту и индикатор элемента. Когда T — периодически полная группа, то $T^\bullet$ — алгебраически компактная группа и, как показал А. Мадер [6], $T^\bullet$ является вполне транзитивной. Это даёт возможность описать решётку вполне характеристических подгрупп группы $T^\bullet$ в терминах индикаторов. А. И. Москаленко [8] доказала, что когда T — прямая сумма циклических p-групп, то $T^\bullet$ также вполне транзитивна и выполняются все условия теоремы Мадера, стало быть, и в этом случае решётка фильтров индикаторов описывает решётку вполне характеристических подгрупп.

В [4] автор показал, что если T — бесконечная прямая сумма периодически полных групп, то $T^\bullet$ не вполне транзитивна, и использовать индикаторы для описания решётки вполне характеристических подгрупп группы $T^\bullet$ нельзя. С этой целью автором в [5] была найдена другая функция, удовлетворяющая необходимым условиям.

Из сказанного следует, что интересно выяснить, в каких случаях для сепарабельной p-группы T копериодическая оболочка $T^\bullet$ вполне транзитивна.

2. Примарная группа T, копериодическая оболочка которой не вполне транзитивна

Пусть сепарабельная p-группа T является бесконечной прямой суммой примарных групп:

$$T = \bigoplus_{i \in I}^{\infty} T_i, \tag{2.1}$$

где $B^{(i)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n^{(i)}$, $B_n^{(i)} = \bigoplus_{m_i} Z(p^n)$, — базисная подгруппа группы T_i. Тогда $B = \bigoplus_{i \in I} B^{(i)}$, $B_n = \bigoplus_{i \in I} B^{(i)}$, — базисная подгруппа группы T. Предположим, что сумма (2.1) содержит слагаемое T_1, в базисной подгруппе которого существует прямое слагаемое $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle a_n \rangle$, $\mathcal{O}(a_n) = p^n$, обладающее свойством $\bar{A} \nsubseteq T$, и если $M = \{n_1, n_2, \ldots\}$ — бесконечное множество разных натуральных индексов, то в T_1 из периодически полной группы $\bar{A}$ существует элемент цоколя, носитель которого равен бесконечному подмножеству в M.

Лемма 2.1. *Если α — эндоморфизм группы T и*

$$c_0^* = (k_1 a_1, p k_2 a_2, p^2 k_3 a_3, \ldots),$$

$(k_i, p) = 1$, $i = 1, 2,$ *— элемент цоколя группы T_1, то координаты векторов*

$$\{\alpha p^{n-1} k_n a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$$

в совокупности принимают значения из подгрупп $B^{(i)}$ при конечном множестве индексов i.

Доказательство. Имеем $c_0^* = k_1 a_1 + p k_2 a_2 + p^2 k_3 a_3 + \ldots$ и

$$h(p^{n-1} k_n a_n) \to \infty, \quad \text{когда} \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что $\alpha c_0^* = \alpha(k_1 a_1) + \alpha(p k_2 a_2) + \ldots$. Так как α — эндоморфизм группы T, то αc_0^* и $\alpha(p^{n-1} k_n a_n)$ являются элементами группы T для каждого n и их координаты принимают значения из подгрупп $B^{(i)}$ от конечного количество индексов i. Покажем, что то же самое можно сказать в совокупности для множества векторов

$$\{\alpha p^{n-1} k_n a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}. \tag{2.3}$$

Допустим противное и обозначим указанное бесконечное множество индексов через $I(c_0^*, \alpha)$. Пусть $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = I^*$ — множество индексов подгрупп $B^{(i)}$, откуда принимают значения координаты вектора αc_0^*. Из бесконечного множества индексов $I(c_0^*, \alpha) \setminus I^*$ выберем i_{k+1}, для которого в координатах векторов (2.3) существует слагаемое минимальной высоты от $B^{(i_{k+1})}$. Если такой элемент $p^{n_1 - 1} t_1 b_{n_1}^{(i_{k+1})}$, $(t_1, p) = 1$, $b_{n_1}^{(i_{k+1})} \in B_{n_1}^{(i_{k+1})}$, порядка p встречается в нескольких векторах (2.3) (и должен быть ещё хотя бы в одном с коэффициентом $p-t_1$, так как в сумме этот элемент должен исчезнуть), то берём вектор $\alpha p^{j_1-1}k_{j_1}a_{j_1}$ максимальной высоты.

Из бесконечного количества оставшихся индексов $I(c_0^*,\alpha)\setminus\{I^*,i_{k+1}\}$ выберем такой i_{k+2}, для которого в координатах векторов (2.3) существует слагаемое минимальной высоты $p^{n_2-1}t_2b_{n_2}^{(i_{k+2})}$, $(t_2,p)=1$, $b_{n_2}^{(i_{k+2})}\in B_{n_2}^{(i_{k+2})}$, порядка p. Так же, как и в предыдущем случае, если такое слагаемое встречается в нескольких векторах (2.3), берём вектор $\alpha p^{j_2-1}k_{j_2}a_{j_2}$ максимальной высоты, так что $h(\alpha p^{j_2-1}k_{j_2}a_{j_2})>h(\alpha p^{j_1-1}k_{j_1}a_{j_1})$. Так как по предположению $I(c_0^*,\alpha)$ — бесконечное множество и имеет место (2.2), то такой выбор возможен.

Продолжим этот процесс и зафиксируем бесконечную последовательность индексов $j_1,j_2,\ldots$. По условию леммы в группе T_1 существует элемент

$$c_0'=(0,\ldots,p^{j_1-1}k_{j_1}'a_{j_1},0,\ldots,p^{j_2-1}k_{j_2}'a_{j_2},0,\ldots),\quad (k_{j_t}',p)=1,\quad t=1,2,\ldots,$$

порядка p. Очевидно, что $c_0^*+c_0'\in T_1$ и

$$\alpha(c_0^*+c_0')=\alpha c_0^*+\alpha c_0'=(\alpha k_1a_1+\alpha pk_2a_2+\ldots)+(\alpha p^{j_1-1}k_{j_1}'a_{j_1}+\alpha p^{j_2-1}k_{j_2}'a_{j_2}+\ldots).$$

Сумма в первых скобках — элемент группы T, и его координаты принимают значения из подгрупп $B^{(i)}$ для конечного множества индексов i, тогда как по нашему выбору индексов j_k, $k=1,2,\ldots$, и условию леммы второе слагаемое в скобках даёт вектор, в различных координатах которого встречаются элементы $p^{n_1-1}t_1'b_{n_1}^{(i_{k+1})},p^{n_2-1}t_2'b_{n_2}^{(i_{k+2})},\ldots$, $(t_s',p)=1$, $b_{n_s}^{(i_{k+s})}\in B_{n_s}^{(i_{k+s})}$, порядка p от бесконечного множества индексов i_{k+s}, $s=1,2$. Это значит, что отмеченное второе слагаемое не принадлежит T. Полученное противоречие показывает, что множество $I(c_0^*,\alpha)$ конечно. Лемма доказана. □

Теорема 2.1. *Копериодическая оболочка группы T не вполне транзитивна.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся представлением элементов копериодической оболочки, данным А. И. Москаленко [8]:

$$T^\bullet=\{(x_0,x_1+T,x_2+T,\ldots)\mid x_i\in\hat{T},\ px_{i+1}-x_i\in T,\ i=0,1,\ldots\},$$

где $\hat{T}$ — пополнение группы T в p-адической топологии. При такой записи элементов легко вычисляются их высота и индикатор. В частности, если $x=(x_0,x_1+T,\ldots)$, то

$$H_{T^\bullet}(x)=\begin{cases} H_{\hat{T}}(x_0), \quad \text{если } \mathcal{O}(x_0)=\infty,\\ (h_{\hat{T}}(x_0),h_{\hat{T}}(px_0),\ldots,h_{\hat{T}}(p^{n-1}x_0),\omega+m,\omega+m+1,\ldots),\\ \quad \text{если } x_0\in\hat{T}\setminus T,\ \mathcal{O}(x_0)=p^n,\ \mathcal{O}(x_0+T)=p^{n-m},\\ (h_T(x_0),h_T(px_0),\ldots,h_T(p^{n-1}x_0),\omega+n+k,\omega+n+k+1,\ldots),\\ \quad \text{если } \mathcal{O}(x_0)=p^n,\ x_0,x_0,\ldots,x_k\in T,\ x_{k+1}\notin T,\\ H_T(x_0), \quad \text{если } x_i\in T \text{ для любого } i, \end{cases} \tag{2.4}$$

где ω — наименьшее бесконечное порядковое число.

Так как $\bar{A} \not\subseteq T$, то возьмём элемент $c_0 = (r_1 a_1, pr_2 a_2, p^2 r_3 a_3, \ldots)$ порядка p, не принадлежащий T, $(r_i, p) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, $c_0 \in \bar{A} \subset \hat{T}$. Координаты c_0 — элементы порядка p, и поэтому без потери общности можно считать, что i-я координата — $p^{i-1} r_i a_i$ — получается умножением соответствующей координаты $p^{i-1} k_i a_i$ элемента c_0^* на одно из чисел $s_i = 0, 1, \ldots, p-1$ по модулю p.

Возьмём также другой элемент $d_0 = (b_1, b_2, \ldots)$, $b_i \in B_i$, $i = 1, 2 \ldots$, порядка p, не лежащий в T, координаты которого принадлежат подгруппам $B^{(i)}$, так что индекс i принимает значения из бесконечной совокупности. Рассмотрим элементы копериодической оболочки $T^\bullet$:

$$c = (c_0, c_1 + T, \ldots), \quad c_i \in \hat{T}, \quad pc_{i+1} - c_i \in T,$$
$$d = (d_0, d_1 + t), \ldots), \quad d_i \in \hat{T}, \quad pd_{i+1} - d_i \in T, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

В силу (2.4) $H_{T^\bullet}(c) = H_{T^\bullet}(d) = (0, \omega, \omega + 1)$. Значит, $H_{T^\bullet}(c) \leqslant H_{T^\bullet}(d)$. Как известно, эндоморфизмы группы $T^\bullet$ однозначно определяются эндоморфизмами группы T. Покажем, что не существует эндоморфизма α группы T, который продолжается до эндоморфизма группы $T^\bullet$ и переводит элемент c в d. Действительно, пусть α — эндоморфизм группы T. По лемме 2.1 координаты векторов (2.3) в целом принимают значения из подгрупп $B^{(i)}$ для конечного множества индексов i. Конечно, при умножении координат этих векторов на $s = 0, 1, \ldots, p-1$ ситуация не изменится, поэтому координаты вектора, определённого суммой $\alpha c_0 = \alpha r_1 a_1 + \alpha p r_2 a_2 + \ldots$, принимают значения из подгрупп $B^{(i)}$ для конечного множества индексов i. Следовательно, этот вектор не может равняться d_0. Значит, не существует эндоморфизма α, который продолжается до эндоморфизма $\hat{\alpha}$ группы $\hat{T}$ и $\hat{\alpha} c_0 = d_0$. Соответственно, не существует эндоморфизма $\alpha^\bullet$ группы $T^\bullet$, который отображает элемент c в d. Теорема доказана. □

А. И. Москаленко высказала гипотезу, что копериодическая оболочка $T^\bullet$ будет вполне транзитивной только в двух случаях: когда T — прямая сумма циклических p-групп или периодически полная группа. Доказанная теорема вносит позитивный вклад в пользу этого предположения.

Литература

[1] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. — 1945. — Т. 16. — С. 129—162.

[2] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vol. I. — New York: Academic Press, 1970. — (Pure Appl. Math.; Vol. 36).

[3] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vol. II. — New York: Academic Press, 1973. — (Pure Appl. Math.; Vol. 36-II).

[4] Kemoklidze T. On the full transitivity of a cotorsion hull // Georgian Math. J. — 2006. — V. 13, No. 1. — P. 79—84.

[5] Kemoklidze T. The lattice of fully invariant subgroups of the cotorsion hull // Adv. Pure Math. — 2013. — Vol. 3, No. 8. — P. 670—679.

[6] Mader A. The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact groups // Publ. Math. Debrecen. — 1970. — Vol. 17. — P. 299—306.

[7] May W., Toubassi E. Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky // J. Algebra — 1976. — Vol. 43, No. 1. — P. 1—13.

[8] Moskalenko A. I. On pure completely characteristic subgroups of a coperiodic group // Abelian Groups and Modules. — 1994. — No. 11, 12. — P. 157—165, 257.