Абелевы группы с финитно аппроксимируемыми полигонами

И. Б. КОЖУХОВ
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

А. В. ЦАРЁВ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: an-tsarev@yandex.ru

УДК 512.531+512.541

Ключевые слова: полигоны, абелевы группы, финитно аппроксимируемый полигон.

Аннотация

Полностью описаны абелевы группы каждого из следующих классов: $(*)$ класс абелевых групп, все полигоны над которыми финитно аппроксимируемы, $(**)$ абелевы группы, все полигоны над которыми аппроксимируются полигонами, состоящими не более чем из n элементов, где n — фиксированное натуральное число. В частности, принадлежность абелевой группы классу $(**)$ равносильна ограниченности группы.

Abstract

I. B. Kozhukhov, A. V. Tsarev, Abelian groups with finitely approximated acts, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 81—89.

The Abelian groups of each of the following classes are completely described: $(*)$ class of Abelian groups such that all the acts over them are finitely approximated, $(**)$ Abelian groups such that all the acts over them are approximated by the acts consisting of n or less elements, where n is some natural number. In particular, a group belongs to the class $(**)$ if and only if it is bounded.

Категория полигонов над полугруппой несёт большу́ю информацию о строении полугруппы аналогично тому, как категория модулей над кольцом может многое сказать о кольце. В [2, 3, 10] исследовались полугруппы S, удовлетворяющие следующим условиям на полигоны:

$(*)$ все правые S-полигоны финитно аппроксимируемы;

$(**)$ все правые S-полигоны аппроксимируются полигонами из n или меньшего числа элементов.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 81—89.
© 2019 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

В [10] было доказано, что полугруппа S удовлетворяет условию $(**)$ с $n = 2$ в том и только том случае, если S — полурешётка (коммутативная полугруппа идемпотентов). В [3] была установлена периодичность полугрупп, удовлетворяющих условию $(**)$, а в [2] это утверждение было усилено: оказывается, такая полугруппа равномерно локально конечна, т. е. для каждого натурального t порядки её t-порождённых подполугрупп ограничены в совокупности. В [3,4] исследовались коммутативные и нильполугруппы с условиями $(*)$ и $(**)$. Цель данной работы — описать абелевы группы, удовлетворяющие этим условиям. Кроме того, мы находим порядки подпрямо неразложимых полигонов над этими абелевыми группами.

В [3] было доказано, что в полугруппах с условием $(**)$ выполняется тождество $x^{2n!} = x^{n!}$. Нетрудно видеть, что рассуждения из [3] позволяют доказать более сильное тождество: $x^{2m} = x^m$, где $m = \text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$ (наименьшее общее кратное). Для групп это означает выполнение тождества $x^m = 1$.

Основные сведения из теории полугрупп можно найти в [1], теории полигонов — в [9], теории абелевых групп — в [7]. Некоторые из определений и обозначений приведём. Если ρ — отношение эквивалентности на множестве X, то X/ρ будет обозначать множество ρ-классов (фактор-множество). Если $a \in X$, то $a\rho$ будет обозначать ρ-класс, содержащий a. Таким образом, $X/\rho = \{a\rho \mid a \in X\}$. Далее, $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ — отношение равенства на X.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс универсальных алгебр. Мы говорим, что алгебра A *аппроксимируется* алгебрами из $\mathcal{K}$, если существует множество конгруэнций $\{\rho_i \mid i \in I\}$ алгебры A, такое что $A/\rho_i \in \mathcal{K}$ для всех $i \in I$ и $\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i = \Delta_A$. Хорошо известно, что это равносильно тому, что алгебра A является подпрямым произведением алгебр из $\mathcal{K}$ (см. [5, следствие 7.2]). Универсальная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если она не разлагается в нетривиальное подпрямое произведение алгебр. Интерес к подпрямо неразложимым алгебрам объясняется известной теоремой Биркгофа, утверждающей, что любая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр (см. [5, теорема 7.3]). В дальнейшем мы неоднократно будем использовать следующее хорошо известное и легко проверяемое утверждение.

Лемма 1. *Пусть A — универсальная алгебра, $a, b \in A$ и $a \neq b$. Если ρ — максимальная конгруэнция, не содержащая пару (a, b), то алгебра A/ρ подпрямо неразложима.* □

Правым полигоном над полугруппой S (или правым S-полигоном) называется множество X, на котором действует полугруппа S, т. е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ для всех элементов $x \in X$, $s, t \in S$ (см. [9]). Так как левые полигоны мы рассматривать не будем, то вместо слов «правый полигон» мы будем часто писать просто «полигон». Пусть S — полугруппа с единицей e. Тогда S-полигон X называется *унитарным*, если $xe = x$ для всех $x \in X$. Если S-полигон X представи́м в виде дизъюнктного объединения подполигонов X_i, т. е. $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$

при $i \neq j$, то X называется *копроизведением* полигонов X_i и обозначается $X = \coprod_{i \in I} X_i$.

Если G — группа и H — её подгруппа (не обязательно нормальная), то через G/H будет обозначать множество правых смежных классов Hg. Множество G/H является унитарным правым G-полигоном относительно действия $Hg \cdot g' = Hgg'$. Нетрудно проверить, что любой циклический унитарный G-полигон изоморфен одному из полигонов G/H.

Ввиду вышеупомянутой теоремы Биркгофа для любой полугруппы S условие $(*)$ эквивалентно следующему:

$(*')$ все подпрямо неразложимые S-полигоны конечны;

а условие $(**)$ равносильно условию

$(**')$ $|X| \leqslant n$ для любого подпрямо неразложимого S-полигона X.

Сделаем несколько замечаний о полигонах над полугруппой и её гомоморфных образах. Пусть S — полугруппа, ρ — конгруэнция на S и S/ρ — фактор-полугруппа. Тогда всякий S/ρ-полигон X можно считать S-полигоном, если положить $x \cdot a = x \cdot a\rho$ для всех $x \in X$, $a \in S$. Нетрудно видеть, что S/ρ-полигон X и S-полигон X имеют одни и те же конгруэнции. Поэтому если S/ρ-полигон X подпрямо неразложим, то S-полигон X также подпрямо неразложим, и наоборот. Отсюда видно, что класс полугрупп, удовлетворяющих условию $(*)$, и класс полугрупп, удовлетворяющих условию $(**)$ для заданного n, замкнуты относительно взятия гомоморфных образов.

Следующее утверждение доказано в [2], идея доказательства взята из [10, предложение 2].

Лемма 2 [2, лемма 3]. *Если полугруппа S удовлетворяет условию $(*)$, то любая её правая конгруэнция является пересечением правых конгруэнций конечного индекса.* $\square$

Из этой леммы нетрудно вывести, что полугруппа, удовлетворяющая условию $(*)$, и все её гомоморфные образы финитно аппроксимируемы [10, утверждение 2]. Для групп лемма 2 означает следующее: если группа удовлетворяет условию $(*)$, то любая её подгруппа является пересечением подгрупп конечного индекса. Оказывается, справедливо и обратное утверждение.

Предложение 3 [2, теорема 7]. *Группа G удовлетворяет условию $(*)$ в том и только том случае, если каждая её подгруппа является пересечением подгрупп конечного индекса.* $\square$

Следствие 4. *Класс групп, удовлетворяющих условию $(*)$, замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов.* $\square$

Для дальнейшего нам понадобится описание подпрямо неразложимых полигонов над группой. Сначала сделаем несколько замечаний о строении произвольных унитарных и неунитарных полигонов над группами.

Пусть X — полигон над группой G с единицей e. Тогда $X = Xe \cup (X \setminus Xe)$, где Xe — (максимальный) унитарный подполигон, а $A = X \setminus Xe$ — «неунитарная часть». Унитарный подполигон Xe является объединением попарно непересекающихся орбит: $Xe = \coprod_{i \in I} x_i G$, причём $x_i G \cong G/H_i$, где $H_i = \{g \in G \mid x_i g = x_i\}$. Таким образом,

$$X \cong \coprod_{i \in I} (G/H_i) \sqcup A,$$

где $AG \subseteq Xe$.

Предложение 5 [2, теорема 6]. *Правый полигон X над группой G подпрямо неразложим в том и только том случае, если $|X| = 1$ или X изоморфен одному из следующих полигонов:*

1) $\{x, a\}$, *где* $xG = aG = \{x\}$;
2) G/H, *причём группа G имеет наименьшую подгруппу $H' \supset H$*;
3) $(G/H) \sqcup \{z\}$, *где H такая, как в (2), и $zG = \{z\}$.* □

Отметим, что утверждение, обратное утверждению леммы 2, неверно. Действительно, если S — бесконечная циклическая полугруппа, то, как показывает пример из [10], над S существует бесконечный подпрямо неразложимый полигон. Следовательно, S не удовлетворяет условию $(*)$. В то же время все конгруэнции на S являются пересечениями конгруэнций конечного индекса: это верно для конгруэнции Δ_S, а всякая конгруэнция $\rho \neq \Delta_S$ сама имеет конечный индекс.

Лемма 6. *Если группа удовлетворяет условию $(**)$ для некоторого натурального n, то любая её подгруппа и любая фактор-группа данной группы также удовлетворяет условию $(**)$ с тем же n.*

Доказательство. Замкнутость относительно взятия гомоморфных образов установлена ранее, докажем замкнутость относительно взятия подгрупп.

Пусть H — подгруппа группы G, удовлетворяющей условию $(**)$ при некотором n. Ввиду предложения 5 нам достаточно доказать, что $|H/K| \leqslant n-1$ для любой подгруппы K, такой что H/K — подпрямо неразложимый H-полигон. Ввиду предложения 5 существует подгруппа K' группы H, являющаяся наименьшей подгруппой, удовлетворяющей условию $K' \supset K$.

По теореме Биркгофа G-полигон G/K является подпрямым произведением подпрямо неразложимых полигонов X_i. По определению подпрямого произведения X_i являются гомоморфными образами полигона G/K, а так как G/K унитарный, то все X_i унитарны. По условию $|X_i| \leqslant n-1$ и $X_i \cong G/H_i$. Следовательно, $K = \bigcap_i H_i$, где G/H_i — подпрямо неразложимые G-полигоны и $|G/H_i| \leqslant n-1$.

Имеем $K = \bigcap_i (H_i \cap H)$. Следовательно, для каждого i либо $H_i \cap H = K$, либо $H_i \cap H \supseteq K'$. Если $H_i \cap H \supseteq K'$ при всех i, то $K \supseteq K'$, что невозможно. Поэтому $K = H_i \cap H$ при некотором i. Множество $H_i H / H_i$ всех правых смежных классов вида $H_i h$ $(h \in H)$ можно рассматривать как H-полигон. Нетрудно проверить, что отображение $Kh \mapsto H_ih$ ($h \in H$) является изоморфизмом правых H-полигонов H/K и H_iH/H_i. Следовательно, $|H/K| = |H_iH/H_i| \leqslant |G/H_i| \leqslant n-1$, что и требовалось доказать. $\square$

Перейдём теперь к абелевым группам. Будем использовать для них аддитивную запись. Для абелевой группы A мы будем обозначать через $t(A)$ её *периодическую часть*, через $r_0(A)$ — *ранг без кручения* (если A — абелева группа без кручения, то ранг без кручения называют просто рангом), а через $\exp(A)$ — *экспоненту* группы A, т. е. наименьшее общее кратное порядков её элементов (экспонента существует тогда и только тогда, когда A — *ограниченная* группа, т. е. порядки элементов группы A ограничены в совокупности).

Теорема 7. *Абелева группа A удовлетворяет условию $(**)$ при некотором n в том и только том случае, если порядки элементов группы A ограничены в совокупности. Если $\exp(A) = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые числа, то порядки подпрямо неразложимых унитарных (неунитарных) A-полигонов — это в точности числа вида p_i^{β} (соответственно $p_i^{\beta}+1$), где $i \leqslant k$ и $\beta \leqslant \alpha_i$.*

Доказательство. Пусть A — абелева группа, удовлетворяюшая условию $(**)$ при некотором n. По [3, теорема 2] порядки элементов группы A ограничены в совокупности. По первой теореме Прюфера [7, теорема 17.2] группа A является прямой суммой примарных циклических подгрупп, и если $\exp(A) = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые числа, то порядки элементов группы A — это в точности делители числа $\exp(A)$. Подпрямо неразложимые унитарные полигоны имеют вид A/B, а в силу неразложимости в этом случае $A/B \cong \mathbb{Z}_{p_i^{\beta}}$. Ясно, что $\beta \leqslant \alpha_i$. Порядки подпрямо неразложимых неунитарных полигонов на 1 больше, т. е. равны $p_i^{\beta}+1$. Следовательно, $\max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}\} + 1 \leqslant n$. $\square$

Осталось рассмотреть абелевы группы с условием $(*)$.

Лемма 8. *Если абелева группа A удовлетворяет условию $(*)$, то $r_0(A) < \infty$.*

Доказательство. Заметим, что фактор-группа $\bar{A} = A/t(A)$ — группа без кручения и $r_0(\bar{A}) = r_0(A)$. Так как $\bar{A}$ — гомоморфный образ группы A, то $\bar{A}$ удовлетворяет условию $(*)$. Предположим, что $r_0(\bar{A}) = \infty$. Возьмём линейно независимые элементы $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \bar{A}$. Пусть

$$B = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle, \quad C = \langle pa_0, pa_1 - a_0, pa_2 - a_1, pa_3 - a_2, \ldots \rangle,$$

где p — некоторое простое число. Тогда $B/C = \langle a_0+C, a_1+C, a_2+C, \ldots \rangle$, причём

$$p(a_0+C) = 0,\ p(a_1+C) = a_0+C,\ p(a_2+C) = a_1+C, \ldots,$$

т. е. $B/C = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Ввиду следствия 4 группа B/C удовлетворяет условию $(*)$. Но группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ не финитно аппроксимируема, а значит, условию $(*)$ не удовлетворяет. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Напомним, что подгруппа B периодической абелевой группы A называется *базисной*, если выполняются следующие условия:

1) B — прямая сумма циклических групп, порядки которых — степени простых чисел;
2) B — сервантная подгруппа группы A;
3) A/B — делимая группа.

Базисные подгруппы введены Л. Я. Куликовым в [6] и подробно рассмотрены в [7, гл. 4]. Для нас важную роль играет тот факт, что любая периодическая группа содержит (единственную с точностью до изоморфизма) базисную подгруппу (подробнее см. [7, § 32, 33]).

Лемма 9. *Если абелева группа A удовлетворяет условию $(*)$, то $t_p(A)$ — ограниченная группа для каждого простого числа p.*

Доказательство. Предположим, что группа A удовлетворяет условию $(*)$. Пусть B_p — базисная подгруппа группы $t_p(A)$. Тогда $A_p = t_p(A)/B_p$ — делимая группа. Если $A_p \neq 0$, то группа A_p содержит подгруппу вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, что противоречит следствию 4. Следовательно, $A_p = t_p(A)/B_p = 0$ и $t_p(A) = B_p$ — прямая сумма циклических групп, порядки которых являются степенями простого числа p.

Предположим, что группа $t_p(A)$ не ограниченная. Тогда в $t_p(A)$ можно выбрать подгруппу (даже прямое слагаемое) C, такую что

$$C = \langle c_0 \rangle \oplus \langle c_1 \rangle \oplus \langle c_2 \rangle \oplus \ldots, \quad o(c_0) < o(c_1) < o(c_2) < \ldots .$$

Пусть $o(c_i) = p^{k_i}$ и

$$E = \langle p^{k_{i+1}-k_i} c_{i+1} - c_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots \rangle.$$

Тогда $C/E = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. В то же время группы C, E и C/E удовлетворяют условию $(*)$. Получили противоречие, так как группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ условию $(*)$ не удовлетворяет. □

Предложение 10. *Периодическая абелева группа удовлетворяет условию $(*)$ в том и только том случае, если все её p-примарные компоненты — ограниченные группы.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 9. Пусть A — периодическая абелева группа, все p-примарные компоненты которой — ограниченные группы. Покажем, что A удовлетворяет условию $(*)$. Ввиду предложения 5 достаточно доказать, что все унитарные подпрямо неразложимые A-полигоны вида A/B конечны.

Напомним, что абелева группа подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда она коциклическая (квазициклическая или примарная циклическая). Если A/B — примарная циклическая группа, то она конечная. Предположим, что $A/B = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ для некоторой подгруппы B группы A и некоторого простого p. Тогда $t_p(A)/t_p(B) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Получили противоречие, так как $t_p(A)$, а значит, и $t_p(A)/t_p(B)$ — ограниченные группы. □

Перейдём к случаю абелевых групп без кручения. Ввиду леммы 8 достаточно ограничиться только группами без кручения конечного ранга. Рассмотрим некоторые предварительные сведения о таких группах (подробнее см. [8, § 0; 1]).

Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга n со свободной подгруппой $F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}x_i$. Тогда $r_0(A/F) = r_0(A) - r_0(F) = 0$ и A/F — периодическая группа. Фактор-группа A/F имеет вид

$$A/F = \bigoplus_{p\in P} t_p(A/F) \cong \bigoplus_{p\in P} \Big[\bigoplus_{i=1}^{r_p} \mathbb{Z}_{p^{k_{ip}}} \oplus \bigoplus_{n-r_p} \mathbb{Z}_{p^\infty} \Big]. \qquad (***)$$

Здесь $r_p = r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}_p} A/pA$ — p-ранг группы A и все k_{ip} — целые неотрицательные числа. Заметим, что в разложении $(***)$ количество квазициклических прямых слагаемых не зависит от выбора свободной подгруппы F, а целиком определяется группой A — для каждого простого p их количество равно $r(A) - r_p(A)$.

Абелева группа A называется *локально свободной*, если все её p-локализации $\mathbb{Q}_p \otimes A$ являются свободными $\mathbb{Q}_p$-модулями (здесь $\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p). Хорошо известно, что абелева группа без кручения A конечного ранга является локально свободной тогда и только тогда, когда в её разложении $(***)$ нет прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, т. е. когда $r(A) = r_p(A)$ при всех простых p.

Предложение 11. *Абелева группа без кручения удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда она локально свободная группа без кручения конечного ранга.*

Доказательство. Если абелева группа без кручения A удовлетворяет условию $(*)$, то по лемме 8 группа A имеет конечный ранг. Кроме того, в разложении $(***)$ для группы A не может быть квазициклических прямых слагаемых. Следовательно, A — локально свободная группа конечного ранга.

Обратно, пусть A — локально свободная группа без кручения конечного ранга. Предположим, что A не удовлетворяет условию $(*)$. Тогда в силу предложения 5 найдётся такая подгруппа B группы A, что $A/B = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Так как A/B — периодическая группа, то $r_0(A/B) = 0$ и $r_0(A) = r_0(B)$. Пусть F — свободная подгруппа группы B, такая что $r_0(B) = r_0(F)$. Тогда

$$A/B = [A/F]/[B/F] = t_p(A/F)/t_p(B/F).$$

Поскольку A — локально свободная группа, то $t_p(A/F)$ — конечная группа, а значит, и $A/B = t_p(A/F)/t_p(B/F)$ — конечная группа. Получили противоречие. $\square$

Теорема 12. *Произвольная абелева группа A удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда группы $t(A)$ и $A/t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$, т. е. когда все группы $t_p(A)$ ограниченные и $A/t(A)$ — локально свободная группа без кручения конечного ранга.*

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 4. Пусть группы $t(A)$ и $A/t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$. Покажем, что группа A удовлетворяет условию $(*)$. Ввиду предложения 5 достаточно доказать, что для любой подгруппы B группы A фактор-группа A/B не может быть квазициклической. Предположим противное: $A/B = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. По предложению 10 группа $t_p(A)$ ограниченная, следовательно, $A = t_p(A) \oplus A'_p$, где группа A'_p не содержит элементов порядка p (см. [7, теорема 27.5]). Аналогичное разложение получаем и для группы B, $B = t_p(B) \oplus B'_p$. Тогда

$$A/B = \big(t_p(A)/t_p(B)\big) \oplus (A'_p/B'_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

По условию $t(A)$ удовлетворяет условию $(*)$, следовательно, $t_p(A)$ — ограниченная группа, а значит, $t_p(A)/t_p(B) = 0$ и $t_p(A) = t_p(B)$. Пусть q — произвольное простое число, отличное от p. Поскольку

$$A/B = \big(t_q(A)/t_q(B)\big) \oplus (A'_q/B'_q) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$$

и $t_q(A)/t_q(B)$ — q-примарная группа, то $t_q(A)/t_q(B) = 0$ и $t_q(A) = t_q(B)$. Таким образом, $t(A) = t(B)$. Учитывая данное равенство, получаем

$$A/B \cong \big(A/t(A)\big)/\big(B/t(B)\big) = \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

Но группа $A/t(A)$ удовлетворяет условию $(*)$, следовательно, её фактор-группа не может быть квазициклической группой. Получили противоречие. $\square$

Пример. Построим пример нерасщепляемой абелевой группы, удовлетворяющей условиям последней теоремы. Рассмотрим кольцо

$$R = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$$

и построим в нём подгруппу A, сервантно порождённую единицей кольца R,

$$A = \langle 1 \rangle_* \subset \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p,$$

т. е. элемент $r \in R$ принадлежит группе A тогда и только тогда, когда $mr = n1$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}$. При этом

$$t(A) = t(R) = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_p.$$

Так как $R/t(R) \cong \bigoplus_c \mathbb{Q}$ и A — сервантная подгруппа ранга без кручения 1 в R, то $A/t(A) \cong \mathbb{Q}$. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Q}$, порождённая дробями $1/p$ по всем простым p,

$$H = \langle 1/p \mid p \in P \rangle \subset \mathbb{Q}.$$

Рассмотрим группу B — прообраз группы H в группе A при естественном отображении $A \to A/t(A) \cong \mathbb{Q}$. Очевидно, группа B удовлетворяет всем условиям теоремы 12.

Предположим, что группа B расщепляется, т. е. $B = t(B) \oplus C$, где $C \cong B/t(B) \cong H$. Очевидно, что 1 — единица кольца R — лежит в группе B. Тогда $1 = t + c$, где $t \in t(B)$ и $c \in C$. Так как $t \in t(B)$, то $mt = 0$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, а значит, $m1 = mc$ и $m(1 - c) = 0$. Таким образом, если $c = (c_p)$ и $1 = (\varepsilon_p)$, где $c_p, \varepsilon_p \in \mathbb{Z}_p$, то $c_p = \varepsilon_p$ почти при всех простых p. Заметим, что любой элемент группы C делится почти на все простые числа p (так как это справедливо для элементов группы H и $H \cong C$). Но простое число p делит элемент c в группе C (и в R), только если p делит целое число m. Получили противоречие. Следовательно, группа B не расщепляется.

Литература

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1972.

[2] Кожухов И. Б. Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1335—1344.

[3] Кожухов И. Б. Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов и модулей // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 763—767.

[4] Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами // Матем. заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21 (83), № 3. — С. 60—67.

[5] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[6] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. — 1941. — Т. 9 (51), № 1. — С. 165—181.

[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[8] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — New York: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[9] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[10] Kozhukhov I. B. One characteristical property of semilattices // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25, no. 8. — P. 2569—2577.