Абсолютные идеалы алгебраически компактных абелевых групп

Е. И. КОМПАНЦЕВА
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Московский педагогический государственный университет

ФАМ ТХИ ТХУ ТХЮИ
Педагогический университет г. Хошимина, Вьетнам
e-mail: ptthuthuy@gmail.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, кольцо, идеал кольца, абсолютный идеал, RAI-группа, afi-группа.

Аннотация

Абсолютным идеалом абелевой группы G называется её подгруппа, являющаяся идеалом в любом кольце, аддитивная группа которого совпадает с G. В настоящей работе в классе редуцированных алгебраически компактных абелевых групп описаны группы, на которых существует хотя бы одно кольцо, в котором любой идеал является абсолютным (проблема 93 в монографии Л. Фукса «Infinite Abelian Groups»), а также группы, в которых нет абсолютных идеалов, кроме вполне характеристических подгрупп.

Abstract

E. I. Kompantseva, Pham Thi Thu Thuy, Absolute ideals of algebraically compact Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 91—114.

An absolute ideal of an Abelian group G is a subgroup that is an ideal in every ring whose additive group coincides with G. We describe reduced algebraically compact Abelian groups G that admit at least one ring structure R such that every ideal of R is an absolute ideal of G (Problem 93 in L. Fuchs' book “Infinite Abelian Groups”). Reduced, algebraically compact, Abelian groups that have only fully invariant subgroups as absolute ideal are characterized.

Умножением на абелевой группе G называют любой гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$, это умножение часто будем обозначать знаком $\times$, т. е. $g_1\times g_2 = \mu(g_1\otimes g_2)$ для всех $g_1, g_2\in G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением $\times$ называется кольцом на группе G и обозначается $(G,\times)$. Исследование взаимосвязи между строением абелевой группы и свойствами кольцевых структур на ней имеет долгую историю и вызывает интерес в настоящее время (см., например, [2—8, 15]).

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 91—114.

Подгруппу A абелевой группы G называют её абсолютным идеалом, если A является идеалом в любом кольце на G. Если в кольце любой идеал является абсолютным идеалом его аддитивной группы, то оно называется AI-кольцом. В [10, проблема 93] Л. Фуксом сформулирована проблема описания абелевых групп, на которых существует хотя бы одно AI-кольцо, такие группы называют RAI-группами.

Нетрудно видеть, что любая вполне характеристическая подгруппа абелевой группы является её абсолютным идеалом [10], однако обратное неверно. Е. Фрид в [9] сформулировал проблему описания абелевых групп, в которых любой абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой; такие группы называют afi-группами. В [14] описаны afi-группы в классе периодических сепарабельных абелевых групп.

Наименьший абсолютный идеал группы G, содержащий $g \in G$, называется главным абсолютным идеалом, порождённым элементом g. Этот главный абсолютный идеал равен пересечению всех абсолютных идеалов группы G, содержащих g.

При исследовании колец на абелевых группах в первую очередь интерес представляют группы, в том или ином смысле обладающие некоторым базисом. К таким группам относятся, в частности, алгебраически компактные абелевы группы. В [13] описаны все умножения на алгебраически компактной группе, при этом каждое из них полностью определяется умножением на её базисном подмодуле. Интерес к кольцам на алгебраически компактных абелевых группах обусловлен и тем фактом, что любое кольцо вкладывается в качестве подкольца в кольцо на сервантно инъективной оболочке его аддитивной группы [10]. Поэтому изучение колец на алгебраически компактных абелевых группах может дать полезную информацию о свойствах колец на произвольных абелевых группах.

В настоящей работе описаны RAI-группы и afi-группы в классе редуцированных алгебраически компактных абелевых групп на языке инвариантов этих групп, а также главные абсолютные идеалы групп из этого класса.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает «абелева группа». Через $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}$ обозначаются множества рациональных, целых, целых неотрицательных и натуральных чисел соответственно, $\mathbb{Q}_p^*$ — кольцо целых p-адических чисел. Если I — некоторое множество, то $|I|$ — его мощность.

Для элемента $g \in G$ будем использовать следующие обозначения: $o(g)$ — порядок g; $h_p(g)$ — p-высота g; $\langle g\rangle_\times$ — идеал кольца $(G, \times)$, порождённый g; $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ — главный абсолютный идеал кольца $(G, \times)$, порождённый g.

Как обычно, $\mathrm{Hom}(A, B)$ — группа гомоморфизмов из группы A в группу B; $\mathrm{E}(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G; $\mathrm{End}\, G$ — группа эндоморфизмов группы G; $\langle S\rangle$ — подгруппа группы G, порождённая множеством $S \subseteq G$;

$$G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad G[\infty] = G.$$

Элемент прямого произведения $\prod\limits_{i\in I} G_i$ записывается в виде $(g_i)_{i\in I}$; $\pi_i(g)$ — проекция $g \in G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ на G_i.

Если не оговорено противное, то все определения и обозначения соответствуют [10—12].

В [9] рассматривается подгруппа

$$\mathrm{M}(G) = \langle \varphi(g) \mid g \in G,\ \varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{End}\, G)\rangle$$

группы $\mathrm{End}\, G$ и доказывается, что $\mathrm{M}(G)$ является идеалом кольца $\mathrm{E}(G)$. Подгруппа A является абсолютным идеалом группы G тогда и только тогда, когда $\mathrm{M}(G)(A) \subseteq A$ [9]. Нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{M}(G)(g) = \langle g \times a \mid a \in G,\ \times \text{— умножение на } G\rangle$$

для любого $g \in G$ и имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть G — группа, $g \in G$. Тогда $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + \mathrm{M}(G)(g)$.* □

Известно [10], что редуцированная алгебраически компактная группа G однозначно представима в виде $G = \prod\limits_p G_p$, где для каждого простого p группа G_p является p-адической алгебраически компактной группой. Более того, в любом кольце на группе G разложение $G = \prod\limits_p G_p$ является также разложением данного кольца в прямое произведение идеалов [13]. Поэтому любое умножение на G полностью определяется умножениями на её p-адических компонентах.

Пусть G — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа. Набор элементов $\{g_i\}_{i\in I}$ группы G называется почти конечным, если не более чем счётное число g_i $(i \in I)$ отлично от нуля и для любого натурального числа n почти все g_i делятся на p^n. Если $\{g_i\}_{i\in I}$ — почти конечный набор элементов группы G и $\{g_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — все ненулевые элементы этого набора, то последовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} g_{i_k}$ является последовательностью Коши в p-адической топологии на группе G. Эта последовательность имеет предел в группе G [10], который обозначается $\widetilde{\sum\limits_{i\in I}} g_i$. Известно [1], что редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа G является регулярной прямой суммой $\widetilde{\sum\limits_{i\in I}} \mathbb{Q}_p^* e_i$ циклических p-адических модулей $\mathbb{Q}_p^* e_i$, т. е. подгруппой прямого произведения $\prod\limits_{i\in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$, состоящей из элементов $g = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} u_i e_i$, $u_i \in \mathbb{Q}_p^*$.

Везде в дальнейшем редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа G записывается в виде $G = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} \mathbb{Q}_i^* e_i = A \oplus C$, где $A = \widetilde{\sum\limits_{i\in I_A}} \mathbb{Q}_p^* e_i$ — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа без кручения и $C = \widetilde{\sum\limits_{i\in I_C}} \mathbb{Q}_p^* e_i$ — урегулированная p-адическая алгебраически компактная группа. Группы A и C являются пополнениями в $\mathbb{Z}$-адической топологии своих базисных подмодулей $\bigoplus_{i\in I_A}\mathbb{Q}_p^* e_i$ и $\bigoplus_{i\in I_C}\mathbb{Q}_p^* e_i$ соответственно [10]. При этом C может быть рассмотрена и как пополнение в $\mathbb{Z}$-адической топологии периодической части $T(G)$ группы G. В [13] показано, что умножение $\times$ на G однозначно определяется произведениями p-базисных элементов $e_i \times e_j$ $(i, j \in I)$, при этом для любых $\tau_{ij} \in G$ $(i, j \in I)$, таких что $o(\tau_{ij}) \leqslant \min\big(o(e_i), o(e_j)\big)$, существует умножение $\times$ на группе G, при котором $e_i \times e_j = \tau_{ij}$.

Пусть $G = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}}\mathbb{Q}_i^* e_i$ — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа. Обозначим $o(e_i) = p^{s_i}$ (если $o(e_i) = \infty$, то считаем, что $s_i = \infty$), $I(g) = \{i \in I \mid \pi_i(g) \neq 0\}$ и $I(H) = \bigcup\limits_{g\in H} I(g)$ для $g \in G$ и $H \subseteq G$. Любой элемент $g \in G$ можно однозначно представить в виде $g = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} p^{r_i} u_i e_i$, где $r_i \in \mathbb{N}_0$, $u_i \in \mathbb{Q}_p^*$, $p \nmid u_i$ (если $\pi_i(g) = 0$, то считаем, что $r_i = \infty$ и $u_i = 1$). Для элемента $g = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} p^{r_i} u_i e_i \in G$ определим следующие подмножества группы G:

$$
\begin{aligned}
H_g &= \Big\{ \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} h_i \mid h_i \in G[p^{s_i}] \Big\},\\
\bar{H}_g &= \Big\{ \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i} h_i \mid h_i \in G[p^{s_i}],\\
&\qquad \{p^{t_i - r_i}\}_{i\in I} \text{ — почти конечный набор целых чисел} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Нетрудно убедиться, что H_g и $\bar{H}_g$ — вполне характеристические подгруппы группы G.

Лемма 2. *Пусть $G = A \oplus C$ — p-адическая алгебраически компактная группа, $c \in C$. Тогда $c \times C \subseteq \bar{H}_c$ и $C \times c \subseteq \bar{H}_c$ в любом кольце $(G, \times)$.*

Доказательство. Пусть

$$
c = \widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \in C,
$$

где $r_k \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in \mathbb{Q}_p^*$, $p \nmid u_k$, причём последовательность $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ возрастает. Пусть $(G, \times)$ — кольцо на группе G и

$$
d = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{x_i} v_i e_i \in C,
$$

где $x_i \in \mathbb{N}_0$, $v_i \in \mathbb{Q}_p^*$, $p \nmid v_i$. Определим подмножества J_n и J'_n $(n \in \mathbb{N})$ множества I следующим образом:

$$
J_n = \{i \in I \mid s_{i_{n-1}} < s_i \leqslant s_{i_n}\}, \quad J'_n = \{i \in I \mid s_i > s_{i_n}\}
$$

(считаем, что $s_{i_0} = 0$). Очевидно, $J'_n = J_{n+1} \cup J'_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, поэтому

$$
\begin{aligned}
c \times d &= \widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{x_i} v_i e_i = \\
&= \Bigl(p^{r_1} u_1 e_{i_1} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_0}} p^{x_i} v_i e_i\Bigr) + \Bigl(\widetilde{\sum_{k>1}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_0}} p^{x_i} v_i e_i\Bigr) = \\
&= \Bigl(p^{r_1} u_1 e_{i_1} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_0}} p^{x_i} v_i e_i + \widetilde{\sum_{k>1}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in J_1}} p^{x_i} v_i e_i\Bigr) + \\
&+ \Bigl(\widetilde{\sum_{k>1}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_1}} p^{x_i} v_i e_i\Bigr) = \\
&= \Bigl(p^{r_1} u_1 e_{i_1} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_0}} p^{x_i} v_i e_i + \widetilde{\sum_{k>1}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in J_1}} p^{x_i} v_i e_i\Bigr) + \ldots + \\
&+ \Bigl(p^{r_n} u_n e_{i_n} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_{n-1}}} p^{x_i} v_i e_i + \widetilde{\sum_{k>n}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in J_n}} p^{x_i} v_i e_i\Bigr) + \\
&+ \widetilde{\sum_{k>n}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_n}} p^{x_i} v_i e_i.
\end{aligned}
$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$h_m = p^{r_m} u_m e_{i_m} \times \widetilde{\sum_{j\in J'_{m-1}}} p^{x_j} v_j e_j + \widetilde{\sum_{k>m}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \sum_{j\in J_m} p^{x_j} v_j e_j.$$

Тогда

$$c \times d = h_1 + \ldots + h_n + \widetilde{\sum_{k>n}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_n}} p^{x_i} v_i e_i$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность, то

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\widetilde{\sum_{k>n}} p^{r_k} u_k e_{i_k} \times \widetilde{\sum_{i\in J'_n}} p^{x_i} v_i e_i\Bigr) = 0$$

(предел в $\mathbb{Z}$-адической топологии). Кроме того, последовательность

$$\{h_1 + \ldots + h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

является последовательностью Коши в $\mathbb{Z}$-адической топологии. Следовательно,

$$c \times d = \lim_{n\to\infty}(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) = \widetilde{\sum_{n\in\mathbb{N}}} h_n. \tag{1}$$

Пусть

$$y_n = \min\{x_j \mid j \in J'_{n-1}\}.$$

Тогда
$$h_n = p^{r_n+y_n} h'_n,$$
где
$$h'_n = u_n e_{i_n} \times \Bigg(\widetilde{\sum_{j\in J'_{n-1}}} p^{x_j-y_n} v_j e_j \Bigg) + \Bigg(\widetilde{\sum_{k>n}} p^{r_k-r_n} u_k e_{i_k} \Bigg) \times \Bigg(\sum_{j\in J_n} p^{x_j-y_n} v_j e_j \Bigg).$$
Если $j \in J_n$, то $o(e_j) \leqslant p^{s_{i_n}} = o(e_{i_n})$, откуда следует, что $o(h'_n) \leqslant o(e_{i_n})$. Поэтому из (1) имеем
$$c \times d = \widetilde{\sum_{n\in\mathbb{N}}} p^{r_n+y_n} h'_n,$$
$h'_n \in G[p^{s_{i_n}}]$. Кроме того, набор $\{p^{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ почти конечен, так как $\{p^{x_i}\}_{i\in I}$ — почти конечный набор. Следовательно, $c \times d \in \bar{H}_c$. Аналогично $d \times c \in \bar{H}_c$. □

Теорема 3. *Пусть $G = A \oplus C$ — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа, $g \in G$.*

1. *Если $A \neq 0$ и $g = a + c$, где $a \in A$, $c \in C$, $h_p(a) = r$, то*
$$\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \mathrm{M}(G)(g) = H_g = p^r G + H_c$$
(если $r = \infty$, то считаем, что $p^r G = 0$).
2. *Если $A = 0$, то $\mathrm{M}(G)(g) = \bar{H}_g$ и*
$$\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + \bar{H}_g.$$

Доказательство. Пусть
$$g = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} u_i e_i \in G,$$
$r_i \in \mathbb{N}_0$, $u_i \in \mathbb{Q}_p^*$, $p \nmid u_i$.

1. Пусть $A \neq 0$ и
$$h = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} h_i \in H_g,$$
$h_i \in G[p^{s_i}]$. Пусть $i_0 \in I_A$. Определим умножение $\times$ на базисном подмодуле группы G, положив
$$e_i \times e_j = \begin{cases} u_i^{-1} h_i, & \text{если } j = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
Тогда
$$g \times e_{i_0} = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} u_i (e_i \times e_{i_0}) = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} u_i u_i^{-1} h_i = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} h_i = h.$$
Следовательно, $h \in g \times G \subseteq \mathrm{M}(G)(g)$, значит, $H_g \subseteq \mathrm{M}(G)(g) \subseteq \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$. Так как H_g — вполне характеристическая подгруппа группы G и $g \in H_g$, то

$\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq H_g$. Таким образом, $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \mathrm{M}(G)(g) = H_g$. Нетрудно проверить, что $H_g = H_a + H_c = p^r G + H_c$.

2. Пусть $A = 0$, т. е. $G = C$ — урегулированная p-адическая алгебраически компактная группа. Пусть

$$h = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i} h_i \in \bar{H}_g,$$

т. е. множество чисел $\{p^{t_i - r_i}\}_{i\in I}$ почти конечно и $h_i \in G[p^{s_i}]$ для всех $i \in I$. Определим умножение $\times$ на группе G, положив

$$e_i \times e_j = \begin{cases} h_i, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим элемент

$$f = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i - r_i} u_i^{-1} e_i.$$

Тогда согласно [13]

$$g \times f = \left(\widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} u_i e_i\right) \times \left(\widetilde{\sum_{j\in I}} p^{t_j - r_j} u_j^{-1} e_j\right) =$$
$$= \widetilde{\sum_{i,j\in I}} p^{r_i + t_j - r_j} u_i u_j^{-1} (e_i \times e_j) = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i} (e_i \times e_i) = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i} h_i = h.$$

Следовательно, $h \in g \times G \subseteq \mathrm{M}(G)(g)$, значит, $\bar{H}_g \subseteq \mathrm{M}(G)(g)$. Так как $G = C$, то из леммы 2 следует, что $g \cdot G \subseteq \bar{H}_g$ в любом кольце $(G, \cdot)$ на G, поэтому $\mathrm{M}(G)(g) \subseteq \bar{H}_g$. Таким образом, $\mathrm{M}(G)(g) = \bar{H}_g$, откуда следует, что $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + \bar{H}_g$ по лемме 1. □

Следствие 4. *Пусть G — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа, $g \in T(G)$. Тогда $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \mathrm{M}(G)(g) = H_g$.*

Доказательство. Пусть

$$g = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} u_i e_i \in T(G),$$

$r_i \in \mathbb{N}_0$, $u_i \in \mathbb{Q}_p^*$, $p \nmid u_i$ и $o(g) = p^n$. Покажем, что $H_g = \bar{H}_g$. Пусть

$$h = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} h_i \in H_g,$$

$h_i \in G[p^{s_i}]$. Так как $o(g) = p^n$ и

$$p^n g = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i + n} u_i e_i,$$

то $r_i + n \geqslant s_i$ для всех $i \in I$. При этом существует индекс $i_0 \in I$, такой что $r_{i_0} + n = s_{i_0}$, т. е. $n = s_{i_0} - r_{i_0}$. Отсюда следует, что

$$r_i + s_{i_0} - r_{i_0} \geqslant s_i \tag{2}$$

для всех $i \in I$. Пусть

$$h' = \widetilde{\sum_{r_i \geqslant r_{i_0}}} p^{r_i - r_{i_0}} h_i.$$

Тогда

$$p^{s_{i_0}} h' = \sum_{r_{i_0} \geqslant r_{i_0}} p^{s_i + r_i - r_{i_0}} h_i = 0$$

в силу (2). Значит, $h' \in G[p^{s_{i_0}}]$, и поэтому

$$h = \sum_{r_i < r_{i_0}} p^{r_i} h_i + p^{r_{i_0}} \widetilde{\sum_{r_i \geqslant r_{i_0}}} p^{r_i - r_{i_0}} h_i = \sum_{r_i < r_{i_0}} p^{r_i} h_i + p^{r_{i_0}} h' \in \sum_{i \in I} p^{r_i}(G[p^{s_i}]).$$

Следовательно,

$$H_g \subseteq \sum_{i \in I} p^{r_i}(G[p^{s_i}]) \subseteq \bar{H}_g.$$

С другой стороны, очевидно, $\bar{H}_g \subseteq H_g$. Поэтому $H_g = \bar{H}_g$. Следовательно, в силу теоремы 3 $\mathrm{M}(G)(g) = H_g$. Тогда $\langle g \rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g \rangle + H_g = H_g$ по лемме 1. $\square$

Пусть $G = A \oplus C$ — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа, $A = \widetilde{\sum\limits_{i \in I_A}} \mathbb{Q}_p^* e_i$ — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа без кручения, $C = \widetilde{\sum\limits_{i \in I_C}} \mathbb{Q}_p^* e_i$ — урегулированная p-адическая алгебраически компактная группа. Будем использовать следующие обозначения: $I_k = \{i \in I_C \mid o(e_i) = p^k\}$, $B_k = \bigoplus\limits_{i \in I_k} \mathbb{Q}_p^* e_i$, $\mathfrak{m}_A = |I_A|$, $\mathfrak{m}_k = |I_k| + 1$. Отметим, что кардинальные числа $\mathfrak{m}_A$, $\mathfrak{m}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) образуют полную независимую систему инвариантов группы G, зная которую, мы можем восстановить группу G [10].

Замечание 5.

1. При всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $\mathfrak{m}_k \geqslant 1$, при этом $\mathfrak{m}_k = 1$ тогда и только тогда, когда $B_k = 0$.

2. Если G — нерасщепляющаяся p-адическая алгебраически компактная группа, то

$$\left| \prod_{k=n}^{\infty} p^{r_k} B_k \right| = \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

для всех $n, r_k \in \mathbb{N}$, $r_k < k$. Действительно, если $\mathfrak{m}_k \geqslant \aleph_0$, то $|p^{r_k} B_k| = \mathfrak{m}_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $r_k < k$. Из-за нерасщепляемости группы G имеем $B_k \neq 0$ (и значит, $\mathfrak{m}_k > 1$) для бесконечного множества натуральных $k \in \mathbb{N}$. Возможны два случая:

(i) если почти все $\mathfrak{m}_k$ бесконечны, то

$$\prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k<\aleph_0}} |p^{r_k}B_k| < \aleph_0$$

и

$$\prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k<\aleph_0}} \mathfrak{m}_k < \aleph_0.$$

Поэтому

$$\Big|\prod_{k=n}^{\infty} p^{r_k}B_k\Big| = \prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k>1}} |p^{r_k}B_k| = \Bigg(\prod_{\substack{k\geqslant n\\ 1<\mathfrak{m}_k<\aleph_0}} |p^{r_k}B_k|\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k\geqslant\aleph_0}} |p^{r_k}B_k|\Bigg) =$$

$$= \prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k\geqslant\aleph_0}} |p^{r_k}B_k| = \prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k\geqslant\aleph_0}} \mathfrak{m}_k = \Bigg(\prod_{\substack{k\geqslant n\\ 1<\mathfrak{m}_k<\aleph_0}} \mathfrak{m}_k\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k\geqslant\aleph_0}} \mathfrak{m}_k\Bigg) = \prod_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k.$$

(ii) если существует бесконечно много конечных $\mathfrak{m}_k > 1$, то

$$\prod_{\substack{k\geqslant n\\ 1<\mathfrak{m}_k<\aleph_0}} |p^{r_k}B_k| = 2^{\aleph_0} = \prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k<\aleph_0}} \mathfrak{m}_k.$$

Поэтому

$$\Big|\prod_{k=n}^{\infty} p^{r_k}B_k\Big| = \prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k>1}} |p^{r_k}B_k| = \Bigg(\prod_{\substack{k\geqslant n\\ 1<\mathfrak{m}_k<\aleph_0}} |p^{r_k}B_k|\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k\geqslant\aleph_0}} |p^{r_k}B_k|\Bigg) =$$

$$= 2^{\aleph_0}\cdot \prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k\geqslant\aleph_0}} \mathfrak{m}_k = \Bigg(\prod_{\substack{k\geqslant n\\ 1<\mathfrak{m}_k<\aleph_0}} \mathfrak{m}_k\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{k\geqslant n\\ \mathfrak{m}_k\geqslant\aleph_0}} \mathfrak{m}_k\Bigg) = \prod_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k.$$

Лемма 6. *Пусть $G = A\oplus C$ — редуцированная нерасщепляющаяся p-адическая алгебраически компактная группа. Если G является RAI-группой, то*

$$\mathfrak{m}_A + \sum_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k \geqslant \prod_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k$$

для всех $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Не теряя общности, можно считать, что $\mathfrak{m}_n > 1$. Тогда существует базисный элемент $e\in T(G)$, такой что $o(e) = p^n$. Рассмотрим

$$H = \prod_{k=n}^{\infty}(p^{k-1}B_k) = p^{n-1}\Bigg(\prod_{k=n}^{\infty}p^{k-n}B_k\Bigg).$$

Тогда $H \subseteq p^{n-1}(G[p^n]) = \langle p^{n-1}e\rangle_{\mathrm{AI}}$ по следствию 4. Так как G не расщепляется, то подгруппа $B = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k$ неограниченная, и поэтому

$$|H| = \left|\prod_{k=n}^{\infty}(p^{k-1}B_k)\right| = \prod_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k$$

по замечанию 5. Следовательно,

$$|\langle p^{n-1}e\rangle_{AI}| \geqslant |H| = \prod_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k. \tag{3}$$

Пусть $(G,\times)$ — AI-кольцо и

$$g = \widetilde{\sum_{i\in I}} g_i e_i \quad (g_i \in \mathbb{Q}_p^*) \text{ —}$$

произвольный элемент группы G. Тогда $p^n \mid g_i$ для почти всех $i \in I$. Пусть $i_1,\ldots,i_m$ — все индексы множества I, такие что $p^n \nmid g_{i_r}$ $(1 \leqslant r \leqslant m)$. Тогда

$$e \times g = e \times \widetilde{\sum_{i\in I}} g_i e_i = e \times (g_{i_1}e_{i_1} + \ldots + g_{i_m}e_{i_m}).$$

Значит,

$$\langle e\rangle_\times \subseteq \left\langle \prod_e e_i \mid i \in I\right\rangle,$$

где $\prod\limits_e e_i$ — произведение с некоторой расстановкой скобок в кольце $(G,\times)$ конечного числа элементов e_i, среди которых есть e. Отсюда следует, что

$$\langle p^{n-1}e\rangle_\times = \left\langle p^{n-1}\prod_e e_i \mid i \in I_A \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} I_k\right)\right\rangle.$$

Так как $(G,\times)$ является AI-кольцом, то $\langle p^{n-1}e\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle p^{n-1}e\rangle_\times$. Следовательно,

$$|\langle p^{n-1}e\rangle_{\mathrm{AI}}| = \left|\left\langle p^{n-1}\prod_e e_i \mid i \in I_A \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} I_k\right)\right\rangle\right|.$$

Из-за нерасщепляемости группы G множество $I_A \cup \left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} I_k\right)$ бесконечно, и поэтому

$$\left|\left\langle p^{n-1}\prod_e e_i \mid i \in I_A \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} I_k\right)\right\rangle\right| \leqslant \left|I_A \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} I_k\right)\right| = \mathfrak{m}_A + \sum_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k.$$

Следовательно,

$$|\langle p^{n-1}e\rangle_{\mathrm{AI}}| \leqslant \mathfrak{m}_A + \sum_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что

$$\mathfrak{m}_A + \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k \geqslant \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k. \qquad \square$$

Следствие 7. *Пусть G — нерасщепляющаяся урегулированная p-адическая алгебраически компактная* RAI*-группа. Тогда*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Лемма 8. *Пусть $G = A \oplus C$ — нерасщепляющаяся p-адическая алгебраически компактная* RAI*-группа и $A \neq 0$. Тогда найдётся такое натуральное n, что*

$$\mathfrak{m}_A \geqslant \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k.$$

Доказательство. Так как G является RAI-группой, то существует AI-кольцо $(G, \times)$ на ней. Пусть $g \in G$. Покажем, что $|I(g \times A)| \leqslant \aleph_0\, \mathfrak{m}_A$ (напомним, что для подмножества $H \subseteq G$ введено обозначение $I(H) = \bigcup_{g \in H} I(g)$). Для $i, j \in I$ обозначим $\tau_{ij} = e_i \times e_j \in G$. Так как $|I(g)| \leqslant \aleph_0$, то

$$|\{\tau_{ij} \mid i \in I(g),\ j \in I_A\}| \leqslant \aleph_0\, \mathfrak{m}_A.$$

Следовательно,

$$\Bigl|\bigcup_{\substack{i \in I(g) \\ j \in I_A}} I(\tau_{ij})\Bigr| \leqslant \aleph_0\, \mathfrak{m}_A.$$

По [13, теорема 2.9] имеем

$$I(g \times A) = \bigcup_{\substack{i \in I(g) \\ j \in I_A}} I(\tau_{ij}).$$

Отсюда следует, что

$$|I(g \times A)| \leqslant \aleph_0\, \mathfrak{m}_A. \tag{5}$$

Аналогично

$$|I(A \times g)| \leqslant \aleph_0\, \mathfrak{m}_A. \tag{6}$$

Обозначим

$$P_g^A = \Bigl\langle \prod_g a_i \mid a_i \in A \Bigr\rangle,$$

где $\prod_g a_i$ — произведение с некоторой расстановкой скобок в кольце $(G, \times)$ конечного числа элементов $a_i \in A$ и элемента g. Нетрудно убедиться, что согласно (5) и (6) имеем

$$|I(P_g^A)| \leqslant \aleph_0\, \mathfrak{m}_A. \tag{7}$$

Пусть теперь $g \in C \setminus T(G)$. Так как G — RAI-группа и $A \neq 0$, то по теореме 3 имеем $\langle g\rangle_\times = \langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = H_g$. Отсюда следует, что

$$H_g = \left\langle \prod_g g_i \mid g_i \in G \right\rangle,$$

где $\prod\limits_g g_i$ — произведение с некоторой расстановкой скобок в кольце $(G, \times)$ конечного числа элементов $g_i \in G$, среди которых есть g. Рассмотрим

$$H_g/\bar{H}_g = \left\langle \prod_g g_i + \bar{H}_g \mid g_i \in G \right\rangle.$$

Так как $\bar{H}_g$ — вполне характеристическая подгруппа группы G, то по лемме 2 имеем

$$H_g/\bar{H}_g = \left\langle \prod_g a_i + \bar{H}_g \mid a_i \in A \right\rangle = (P_g^A + \bar{H}_g)/\bar{H}_g.$$

Следовательно,

$$\text{для каждого } h \in H_g \text{ найдётся } x \in h + \bar{H}_g, \text{ такой что } I(x) \subseteq I(P_g^A). \tag{8}$$

Допустим, что

$$\mathfrak{m}_A < \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k \geqslant \aleph_0,$$

то

$$\mathfrak{m}_A + \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k.$$

Поэтому из леммы 6 следует, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\mathfrak{m}_A < \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

и

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k \geqslant 2^{\aleph_0}.$$

Из (7) получаем, что

$$\text{для каждого } n \in \mathbb{N} \text{ справедливо } |I(P_g^A)| < \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k. \tag{9}$$

Пусть

$$g = \widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}} p^{r_k} a_k e_{i_k},$$

где $p \nmid a_k$, $r_k \in \mathbb{N}_0$. Согласно (9) найдутся элементы $e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots$, такие что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$j_n \in \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} I_k \right) \setminus I(P_g^A), \quad p^{t_n} = o(e_{j_n}) \geqslant o(e_{i_n}) = p^{s_n}.$$

Рассмотрим элемент

$$h = \widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}} p^{r_k}(p^{t_k - s_k} e_{j_k}) = \widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}} p^{r_k} h_k,$$

где $h_k = p^{t_k - s_k} e_{j_k} \in G[p^{s_k}] \setminus p(G[p^{s_k}])$. Очевидно, $h \in H_g \setminus \bar{H}_g$ и $I(h) = \{j_1, j_2, \ldots\}$. Нетрудно убедиться, что не найдётся $x \in h + \bar{H}_g$, для которого $I(x) \subseteq I(P_g^A)$. Так как это противоречит (8), то

$$\mathfrak{m}_A \geqslant \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$. □

В леммах 9 и 10 для редуцированной нерасщепляющейся p-адической алгебраически компактной группы G и $s \in \mathbb{N}$ будем обозначать

$$I_s^* = \bigcup_{k=s}^{\infty} I_k, \quad |I_s^*| = \sum_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k, \quad C_s = C \cap \prod_{k=s}^{\infty} B_k, \quad |C_s| = \prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k, \quad H_g^s = H_g \cap C_s.$$

Лемма 9. *Пусть $G = A \oplus C$ — редуцированная нерасщепляющаяся p-адическая алгебраически компактная группа. Пусть найдётся $n \in \mathbb{N}$, такое что $\mathfrak{m}_A \geqslant \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$. Тогда G является* RAI*-группой, причём существует умножение $\times$ на G, такое что $g \times G = \mathrm{M}(G)(g)$ для всех $g \in G$.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что n — минимальное натуральное число, такое что

$$\mathfrak{m}_A \geqslant \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k.$$

Очевидно, $\mathfrak{m}_A > \aleph_0$. Так как

$$|I_A|\,\mathfrak{m}_A + |I_A| \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k + |C_n| \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_A^2 + \mathfrak{m}_A \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k + \left(\prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k \right)^2 = \mathfrak{m}_A = |I_A|,$$

то в множестве I_A можно выбрать попарно непересекающиеся подмножества

$$X_i^{(A,A)} \ \ (i \in I_A), \quad X_i^{(A,C_n)} \ \ (i \in I_A), \quad X_g^{(C_n, H_g^n)} \ \ (g \in C_n),$$

такие что $|X_i^{(A,A)}| = \mathfrak{m}_A$,

$$\left|X_j^{(A,C_n)}\right| = \left|X_g^{(C_n,H_g^n)}\right| = \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k.$$

Тогда существуют биекции

$$\begin{aligned}
&\varphi_g^{(C_n,H_g^n)}\colon \left\{e_j \mid j \in X_g^{(C_n,H_g^n)}\right\} \to H_g^n \quad (g \in C_n),\\
&\varphi_i^{(A,A)}\colon \left\{e_j \mid j \in X_i^{(A,A)}\right\} \to \left\{e_j \mid j \in I_A\right\} \quad (i \in I_A),\\
&\varphi_i^{(A,C_n)}\colon \left\{e_j \mid j \in X_i^{(A,C_n)}\right\} \to C_n \quad (i \in I_A).
\end{aligned}$$

Если $n > 1$, то в силу минимальности числа n

$$\text{для каждого } s < n \text{ справедливо } \mathfrak{m}_A < \prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k. \tag{10}$$

Так как

$$\mathfrak{m}_A \geqslant \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

и

$$\mathfrak{m}_A < \prod_{k=n-1}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_{n-1} \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k,$$

то $\mathfrak{m}_A < \mathfrak{m}_{n-1}$. Значит,

$$\mathfrak{m}_{n-1} > \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k \geqslant \aleph_0.$$

Следовательно, при всех $s < n$ получаем

$$\sum_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \sum_{k=s}^{n-1} \mathfrak{m}_k + \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \sum_{k=s}^{n-1} \mathfrak{m}_k = \max\{\mathfrak{m}_s, \ldots, \mathfrak{m}_{n-1}\}$$

и

$$\prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \prod_{k=s}^{n-1} \mathfrak{m}_k + \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \prod_{k=s}^{n-1} \mathfrak{m}_k = \max\{\mathfrak{m}_s, \ldots, \mathfrak{m}_{n-1}\}.$$

Значит, в силу (10)

$$\text{для каждого } s < n \text{ справедливо } |I_s^*| = \sum_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k > \mathfrak{m}_A. \tag{11}$$

В силу (11) в I существуют попарно непересекающиеся подмножества $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$, такие что $T_s \subseteq I_s^*$,

$$|T_s| = |I_s^*| = \prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

и

$$|I_s^* \setminus T_s| = |I_{s+1}^*| = \prod_{k=s+1}^{\infty} \mathfrak{m}_k \quad (1 \leqslant s < n).$$

Пусть $s < n$. В силу (11)

$$|I_A| \prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k + |I_s^*| \biggl(\prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k \biggr) = \mathfrak{m}_A \prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k + \biggl(\prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k \biggr)^2 = \prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k.$$

Поэтому в множестве T_s можно выделить попарно непересекающиеся подмножества

$$X_i^{(A,s)} \quad (i \in I_A), \qquad X_j^{(t,s)} \quad (t \geqslant s,\ j \in I_t)$$

таким образом, что

$$\bigl|X_i^{(A,s)}\bigr| = \bigl|X_j^{(t,s)}\bigr| = \prod_{k=s}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

при всех $t \geqslant s$, $i \in I_A$, $j \in I_t$. Тогда существуют биекции

$$\varphi_i^{(A,s)} \colon \bigl\{e_j \mid j \in X_i^{(A,s)}\bigr\} \to G[p^s] \cap C_s \quad (i \in I_A,\ s < n),$$
$$\varphi_i^{(t,s)} \colon \bigl\{e_j \mid j \in X_i^{(t,s)}\bigr\} \to G[p^s] \cap C_s \quad (s < n,\ t \geqslant s,\ i \in I_t).$$

Определим умножение $\times$ на G, положив

$$e_i \times e_j = \begin{cases} \varphi_i^{(A,A)}(e_j) \in A, & \text{если } i \in I_A,\ j \in X_i^{(A,A)}, \\ \varphi_i^{(A,C_n)}(e_j) \in C_n, & \text{если } i \in I_A,\ j \in X_i^{(A,C_n)}, \\ \varphi_i^{(A,s)}(e_j) \in G[p^s] \cap C_s, & \text{если } i \in I_A,\ j \in X_i^{(A,s)}, \\ \varphi_i^{(t,s)}(e_j) \in G[p^s] \cap C_s, & \text{если } i \in I_t,\ j \in X_i^{(t,s)},\ s < n,\ t \geqslant s, \end{cases}$$

$g \times e_j = \varphi_g^{(C_n,H_g^n)}(e_j)$, если $g \in C_n$, $j \in X_g^{(C_n,H_g^n)}$, и положив произведения остальных базисных элементов равными нулю.

Пусть $g = a + c$, $a \in A$, $c \in C$. Пусть $a = \widetilde{\sum\limits_{i \in I_A}} a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{Q}_p^*$ и $h_p(a) = r$. Покажем, что $\langle g \rangle_\times = p^r G + H_c$.

Если $r = \infty$, то $p^r G = 0 \subseteq \langle g \rangle_\times$. Пусть $r \in \mathbb{N}_0$ и $h = p^r h_A + p^r h_C \in p^r G$, где $h_A \in A$, $h_C \in C$. Так как $h_p(a) = r$, то найдётся $i_0 \in I_A$, при котором $a_{i_0} = p^r b_{i_0}$ и $p \nmid b_{i_0}$. Следовательно, a можно записать в виде $a = p^r(b_{i_0} e_{i_0} + a')$, $a' \in A$. Пусть $h_A = \widetilde{\sum\limits_{i \in I}} u_i e_i$. Рассмотрим

$$x = b_{i_0}^{-1} \widetilde{\sum_{i \in I}} u_i \Bigl(\bigl(\varphi_{i_0}^{(A,A)} \bigr)^{-1} (e_j) \Bigr).$$

Тогда

$$g \times x = a_{i_0} e_{i_0} \times x = p^r \widetilde{\sum_{i \in I}} u_i \Bigl[e_{i_0} \times \Bigl(\bigl(\varphi_{i_0}^{(A,A)} \bigr)^{-1} (e_i) \Bigr) \Bigr] = p^r \widetilde{\sum_{i \in I}} u_i e_i = p^r h_A.$$

Представим h_C в виде $h_1 + h_2 + \ldots + h_{n-1} + \bar{h}_n$, где $h_s \in B_s \subseteq G[p^s] \cap C_s$ $(s < n)$, $\bar{h}_n \in C_n$. Рассмотрим

$$y = b_{i_0}^{-1}\left[(\varphi_{i_0}^{A,1})^{-1}(h_1) + \ldots + (\varphi_{i_0}^{A,n-1})^{-1}(h_{n-1}) + \left(\varphi_{i_0}^{(A,C^n)}\right)^{-1}(\bar{h}_n)\right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} g \times y &= a_{i_0}e_{i_0} \times y = \\ &= p^r\left[e_{i_0} \times (\varphi_{i_0}^{A,1})^{-1}(h_1) + \ldots + (e_{i_0} \times \varphi_{i_0}^{A,n-1})^{-1}(h_{n-1}) + e_{i_0} \times \left(\varphi_{i_0}^{(A,C_n)}\right)^{-1}(\bar{h}_n)\right] = \\ &= p^r(h_1 + \ldots + h_{n-1} + \bar{h}_n) = p^r h_C. \end{aligned}$$

Таким образом, $g \times (x + y) = p^r h_A + p^r h_C = h$. Значит, $h \in \langle g \rangle_\times$. Следовательно,

$$p^r G \subseteq \langle g \rangle_\times. \qquad (12)$$

Покажем, что

для каждого $i \in I_C$ и каждого $h \in G[p^{s_i}]$

найдётся $f_i \in G$, такой что $e_i \times f_i = h$. (13)

Пусть $i \in I_C$, $s_i = k$. Тогда $e_i \in B_k$.

а) Пусть $k < n$ и $h = b_1 + \ldots + b_{k-1} + \bar{h}_k \in G[p^k]$, где $b_i \in B_i$, $\bar{h}_k \in G[p^k] \cap C_k$. Рассмотрим

$$f_i = (\varphi_i^{(k,1)})^{-1}(b_1) + \ldots + \left(\varphi_i^{(k,k-1)}\right)^{-1}(b_{k-1}) + \left(\varphi_i^{(k,k)}\right)^{-1}(\bar{h}_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_i \times f_i &= \\ &= e_i \times \left(\varphi_i^{(k,1)}\right)^{-1}(b_1) + \ldots + e_i \times \left(\varphi_i^{(k,k-1)}\right)^{-1}(b_{k-1}) + e_i \times \left(\varphi_i^{(k,k)}\right)^{-1}(\bar{h}_k) = \\ &= b_1 + \ldots + b_{k-1} + \bar{h}_k = h. \end{aligned}$$

б) Пусть $k \geqslant n$. В этом случае $e_i \in B_k \subseteq C_n$. Пусть $h = h' + \bar{h}_n \in G[p^k]$, где $h' = b_1 + \ldots + b_{n-1}$, $b_i \in B_i$, $\bar{h}_n \in G[p^k] \cap C_n = H_{e_i} \cap C_n = H_{e_i}^n$. Рассмотрим

$$f_i = (\varphi_i^{(k,1)})^{-1}(b_1) + \ldots + \left(\varphi_i^{(k,n-1)}\right)^{-1}(b_{n-1}) + \left(\varphi_{e_i}^{(C_n,H_{e_i}^n)}\right)^{-1}(\bar{h}_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_i \times f_i &= \\ &= e_i \times \left(\varphi_i^{(k,1)}\right)^{-1}(b_1) + \ldots + e_i \times \left(\varphi_i^{(k,n-1)}\right)^{-1}(b_{n-1}) + e_i \times \left(\varphi_{e_i}^{(C_n,H_{e_i}^n)}\right)^{-1}(\bar{h}_n) = \\ &= b_1 + \ldots + b_{n-1} + \bar{h}_n = h. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$I(f_i) = \{j \in I \mid \pi_j(f_i) \neq 0\} \subseteq \left(\bigcup_{s=\overline{1,k}} X_i^{(k,s)}\right) \cup X_{e_i}^{(C_n,H_{e_i}^n)}.$$

Тогда

$$\text{для каждого } j \neq i \ e_j \times f_i = 0. \qquad (14)$$

Пусть теперь
$$c = \widetilde{\sum_{i \in I_C}} p^{r_i} c_i e_i \in C,$$
$p \nmid c_i$ и
$$h = \widetilde{\sum_{i \in I}} p^{r_i} h_i \in H_c,$$
$h_i \in G[p^{s_i}]$. Тогда c и h можно представить в виде
$$c = \sum_{r_i < n} p^{r_i} c_i e_i + \bar{c}, \quad \text{где} \quad \bar{c} = \widetilde{\sum_{r_i \geqslant n}} p^{r_i} c_i e_i,$$
$$h = \sum_{r_i < n} p^{r_i} h_i + \bar{h}, \quad \text{где} \quad \bar{h} = \widetilde{\sum_{r_i \geqslant n}} p^{r_i} h_i.$$
Так как $h_i \in G[p^{s_i}]$, то по (13) найдётся $f_i \in G$, такой что $e_i \times f_i = h_i$ для всех $i \in I_C$. Положим
$$x = \sum_{r_i < n} c_i^{-1} f_i \in G.$$
Тогда
$$g \times x = \sum_{r_i < n} p^{r_i} c_i e_i \times x = \sum_{r_i < n} p^{r_i} (e_i \times f_i) = \sum_{r_i < n} p^{r_i} h_i.$$
Так как $\bar{c} \in C_n$ и $\bar{h} \in C_n \cap H_{\bar{c}} = H_{\bar{c}}^n$, то существует $y = \left(\varphi_{\bar{c}}^{(C_n, H_{\bar{c}}^n)}\right)^{-1}(\bar{h})$. Тогда
$$g \times y = \bar{c} \times y = \bar{c} \times \left(\varphi_{\bar{c}}^{(C_n, H_{\bar{c}}^n)}\right)^{-1}(\bar{h}) = \bar{h}.$$
Следовательно,
$$g \times (x + y) = \sum_{r_i < n} p^{r_i} h_i + \bar{h} = h,$$
поэтому $h \in \langle g \rangle_\times$. Значит,
$$H_c \subseteq \langle g \rangle_\times. \tag{15}$$
Из (12) и (15) следует, что $p^r G + H_c \subseteq \langle g \rangle_\times$, т. е. $\langle g \rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g \rangle_\times$ согласно теореме 3. Так как обратное включение очевидно, то $\langle g \rangle_\times = \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$. Таким образом, $(G, \times)$ — AI-кольцо. □

Лемма 10. *Пусть C — нерасщепляющаяся урегулированная p-адическая алгебраически компактная группа. Пусть*
$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$
для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда C является RAI-группой, причём существует такое умножение $\times$ на C, что $c \times C = \mathrm{M}(C)(c)$ для всех $c \in C$.

Доказательство. Так как
$$\sum_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k \geqslant \aleph_0$$
для всех $n\in\mathbb{N}$, то индукцией по n можно доказать, что существуют попарно непересекающиеся подмножества T_n $(n\in\mathbb{N})$, такие что $T_n\subseteq I_n^*$,
$$|T_n| = |I_n^*| = \sum_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k$$
и
$$|I_n^*\setminus T_n| = |I_{n+1}^*| = \sum_{k=n+1}^{\infty}\mathfrak{m}_k.$$
Пусть $n\in\mathbb{N}$. Так как
$$|T_n| = \sum_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k = \Bigl(\sum_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k\Bigr)^2 = |I_n^*|\prod_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k,$$
то можно разделить T_n на попарно непересекающиеся подмножества $X_i^{(t,n)}$ $(i\in I_t,\ t\geqslant n)$, такие что $X_i^{(t,n)}\subseteq I_n^*$,
$$\bigl|X_i^{(t,n)}\bigr| = \prod_{k=n}^{\infty}\mathfrak{m}_k = |G[p^n]\cap C_n|.$$
Тогда для каждого $t\geqslant n$ и каждого $i\in I$ существует биекция
$$\varphi_i^{(t,n)}\colon \bigl\{e_j \mid j\in X_i^{(t,n)}\bigr\}\to G[p^n]\cap C_n.$$

Определим кольцо $(G,\times)$, положив
$$e_i\times e_j = \begin{cases}\varphi_i^{(t,n)}(e_j), & \text{если } t\geqslant n,\ i\in I_t,\ j\in X_i^{(t,n)},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Покажем, что $\langle c\rangle_\times = \langle c\rangle_{\mathrm{AI}}$ для всех $c\in C$. Пусть
$$c = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i}c_ie_i,$$
$p\nmid c_i$, и
$$h = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i}h_i\in \bar H_c,$$
где $h_i\in G[p^{s_i}]$, $\{p^{t_i-r_i}\}_{i\in I}$ — почти конечный набор целых чисел.

Пусть $i\in I$. Представим h_i в виде $h_i = b_1+\ldots+b_{s_i-1}+\bar h_{s_i}$, где $b_r\in B_r\subseteq G[p^r]\cap C_r$ $(1\leqslant r\leqslant s_i-1)$, $\bar h_{s_i}\in G[p^{s_i}]\cap C_{s_i}$. Пусть
$$f_i = c_i^{-1}\bigl[\bigl(\varphi_i^{(s_i,1)}\bigr)^{-1}(b_1)+\ldots+\bigl(\varphi_i^{(s_i,s_i-1)}\bigr)^{-1}(b_{s_i-1})+\bigl(\varphi_i^{(s_i,s_i)}\bigr)^{-1}(\bar h_{s_i})\bigr].$$

Тогда нетрудно заметить, что

$$c \times f_i = p^{r_i} c_i e_i \times f_i = p^{r_i} c_i c_i^{-1}(b_1 + \ldots + b_{s_i-1} + \bar{h}_{s_i}) = p^{r_i} h_i.$$

Так как $\{p^{t_i-r_i}\}_{i\in I}$ — почти конечный набор целых чисел, то существует элемент

$$f = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i-r_i} f_i \in G.$$

Тогда

$$c \times f = c \times \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i-r_i} f_i = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i-r_i}(c \times f_i) = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i-r_i}(p^{r_i} h_i) = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{t_i} h_i = h.$$

Следовательно, $h \in c \times G$. Значит, $\bar{H}_c \subseteq c \times G$. Поэтому из леммы 3 следует, что $\mathrm{M}(C)(c) \subseteq c \times C$. Так как обратное включение очевидно, то $c \times C = \mathrm{M}(C)(c)$. Следовательно,

$$\langle c\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle c\rangle + \mathrm{M}(C)(c) \subseteq \langle c\rangle_{\times},$$

поэтому $\langle c\rangle_{\times} = \langle c\rangle_{\mathrm{AI}}$. Значит, G — RAI-группа. □

Из следствия 7 и лемм 8—10 получаем условие, необходимое и достаточное для того, чтобы редуцированная нерасщепляющаяся p-адическая алгебраически компактная группа G являлась RAI-группой.

Теорема 11. *Пусть $G = A \oplus C$ — редуцированная нерасщепляющаяся p-адическая алгебраически компактная группа.*

1. *Если $A \neq 0$, то G является* RAI-*группой тогда и только тогда, когда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что*

$$\mathfrak{m}_A \geqslant \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k.$$

2. *Если $A = 0$, то G является* RAI-*группой тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{m}_k$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. □

Следствие 12. *Пусть G — редуцированная нерасщепляющаяся p-адическая алгебраически компактная группа. Группа G является* RAI-*группой тогда и только тогда, когда существует кольцо $(G, \times)$, в котором $g \times G = \mathrm{M}(G)(g)$ для всех $g \in G$.*

Доказательство. Если G является RAI-группой, то указанное кольцо существует в силу теоремы 11 и лемм 9, 10.

Пусть теперь существует кольцо $(G, \times)$, в котором $g \times G = \mathrm{M}(G)(g)$ для всех $g \in G$. Тогда

$$\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + \mathrm{M}(G)(g) = \langle g\rangle + g \times G \subseteq \langle g\rangle_{\times}.$$

Так как обратное включение очевидно для всех $g \in G$, то $(G, \times)$ является AI-кольцом. $\square$

Следующая теорема вместе с теоремой 11 даёт описание RAI-групп в классе редуцированных алгебраически компактных групп с нерасщепляющимися p-адическими компонентами.

Теорема 13. *Пусть $G = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}} G_p$ — редуцированная алгебраически компактная группа, где G_p — нерасщепляющаяся группа при всех простых p. Группа G является* RAI*-группой тогда и только тогда, когда G_p является* RAI*-группой для каждого p.*

Доказательство. Пусть G — RAI-группа и $(G, \times)$ — AI-кольцо. Разложение $G = \prod\limits_{p} G_p$ является разложением любого кольца на G в прямое произведение идеалов [13]. Покажем, что $(G_p, \times)$ — AI-кольцо при всех простых p. Пусть $(G_p, *_p)$ — произвольное кольцо на G_p. Определим кольцо $(G, *)$ на группе G следующим образом: $a * a' = \pi_p(a) *_p \pi_p(a')$. Пусть A_p — идеал кольца $(G_p, \times)$. Тогда A_p также является идеалом кольца $(G, \times)$. Так как $(G, \times)$ — AI-кольцо, то A_p является абсолютным идеалом группы G. Следовательно, A_p — идеал кольца $(G, *)$. Согласно определению умножения $*$ на группе G A_p является идеалом кольца $(G_p, *_p)$. Следовательно, $(G_p, \times)$ — AI-кольцо, и поэтому G_p — RAI-группа.

Пусть теперь G_p — RAI-группа для каждого простого числа p. Тогда по следствию 12 существуют AI-кольца $(G_p, \times_p)$ на G_p, такие что

$$\text{для каждого } g_p \in G_p \ g_p \times_p G_p = \mathrm{M}(G_p)(g_p). \tag{16}$$

Определим умножение $\times$ на группе G, положив $(g_p)_p \times (g'_p)_p = (g_p \times_p g'_p)_p$ для всех $(g_p)_p, (g'_p)_p \in G$. Пусть $g = (g_p)_p \in G$ и $h = (h_p)_p \in \mathrm{M}(G)(g)$. Тогда $h = g * f$ для некоторого элемента $f = (f_p)_p \in G$ и некоторого умножения $*$ на группе G. Следовательно, $h_p = g_p * f_p$ для всех простых p. Поэтому $h_p \in \mathrm{M}(G_p)(g_p)$. По (16) для каждого простого числа p существует элемент $a_p \in G_p$, такой что $h_p = g_p \times_p a_p$. Значит,

$$h = (h_p)_p = (g_p \times_p a_p)_p = g \times (a_p)_p \in \langle g \rangle_\times.$$

Следовательно, $\mathrm{M}(G)(g) \subseteq \langle g \rangle_\times$. Поэтому

$$\langle g \rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g \rangle + \mathrm{M}(G)(g) \subseteq \langle g \rangle_\times.$$

Так как обратное включение очевидно, то $\langle g \rangle_\times = \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$. Следовательно, G — RAI-группа. $\square$

Пусть $G = A \oplus C$ — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа. Если $g \in C \setminus T(G)$, то представление элемента $h \in \bar{H}_g$ в виде $h = \widetilde{\sum\limits_{i \in I}} p^{t_i} h_i$, $h_i \in G[p^{s_i}]$, вообще говоря, неоднозначно. Поэтому часто трудно ответить на вопрос, принадлежит ли элемент h подгруппе $\bar{H}_g$. Решение этой задачи облегчает следующая лемма, в которой приводится необходимое условие принадлежности элемента подгруппе $\bar{H}_g$.

Лемма 14. *Пусть $G = A \oplus C$ — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа. Пусть*

$$g = \widetilde{\sum_{i \in I_C}} p^{r_i} u_i e_i \in C \setminus T(G)$$

и

$$h = \widetilde{\sum_{i \in I_C}} p^{n_i} v_i e_i \in \bar{H}_g,$$

где $r_i, n_i \in \mathbb{N}_0$, $u_i, v_i \in \mathbb{Q}_p^*$, $p \nmid u_i$, $p \nmid v_i$. Пусть $o(h) = \infty$ и множество $J = I(g) \cap I(h)$ бесконечно. Тогда последовательность $\{n_i - r_i\}_{i \in J}$ неограниченная.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $J = \mathbb{N}$. Пусть

$$C_1 = \widetilde{\sum_{i \in J}} \mathbb{Q}_p^* e_i$$

и

$$h = \widetilde{\sum_{i \in I_C}} p^{t_i} h_i,$$

где $t_i \in \mathbb{N}_0$, $h_i \in G[p^{s_i}]$, $\{p^{t_i - r_i}\}_{i \in I_C}$ — почти конечный набор целых чисел. Для произвольного $k \in J$ проекция $\pi_{C_1}(p^{t_k} h_k)$ на C_1 имеет вид

$$\pi_{C_1}(p^{t_k} h_k) = (p^{t_k} c_1, \ldots, p^{t_k} c_k, p^{s_{k+1} - s_k + t_k} c_{k+1}, \ldots, p^{s_i - s_k + t_k} c_i, \ldots),$$

где $c_i \in \langle e_i \rangle$, $i \in J$. Следовательно, $n_i \geqslant \min\{s_i - s_k + t_k \mid 1 \leqslant k \leqslant i\}$ для всех $i \in J$. Значит,

$$\text{для каждого } i \in J \text{ найдётся } k(i) \leqslant i, \text{ такой что } n_i \geqslant s_i - s_{k(i)} + t_{k(i)}. \tag{17}$$

Пусть L — целое положительное число. Так как $\{p^{t_i - r_i}\}_{i \in J}$ — почти конечный набор, то

$$\text{найдётся } i_1 \in \mathbb{N}, \text{ такой что для каждого } i \geqslant i_1 \text{ справедливо } t_i - r_i > L. \tag{18}$$

Пусть $m = \max\{s_i - t_i \mid i \leqslant i_1\}$. Так как $o(h) = \infty$, то существует $i_2 > i_1$, такой что $s_{i_2} - t_{i_2} \geqslant m$ и $s_i - t_i \leqslant m$ при $i \leqslant i_2$. Поэтому

$$\text{для каждого } i \leqslant i_2 \text{ справедливо } (s_{i_2} - t_{i_2}) - (s_i - t_i) \geqslant 0. \tag{19}$$

Так как $k(i_2) \leqslant i_2$, то по (19) имеем

$$(s_{i_2} - t_{i_2}) - \big(s_{k(i_2)} - t_{k(i_2)}\big) \geqslant 0. \tag{20}$$

Из (18) следует, что

$$t_{i_2} - r_{i_2} > L. \tag{21}$$

Следовательно, из (17), (20) и (21) получаем, что

$$n_{i_2} - r_{i_2} \geqslant s_{i_2} - s_{k(i_2)} + t_{k(i_2)} - r_{i_2} = \\ = (s_{i_2} - t_{i_2}) - \big(s_{k(i_2)} - t_{k(i_2)}\big) + (t_{i_2} - r_{i_2}) \geqslant t_{i_2} - r_{i_2} > L. \quad \square$$

Теорема 15. *Пусть $G = A \oplus C$ — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа. Группа G является afi-группой тогда и только тогда, когда $A \neq 0$ или G ограниченная.*

Доказательство. Если $A \neq 0$, то по теореме 3 имеем $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = p^r G + H_c$ — вполне характеристическая подгруппа группы G для каждого элемента $g \in G$. Следовательно, G — afi-группа.

Если G является ограниченной группой, то $G = T(G)$. Тогда по следствию 4 $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = H_g$ — вполне характеристическая подгруппа группы G для каждого $g \in G$. Следовательно, G — afi-группа.

Пусть теперь $G = C$ — неограниченная урегулированная p-адическая алгебраически компактная группа. Тогда существует элемент

$$g = \widetilde{\sum_{i\in I}} p^{r_i} u_i e_i \in C \setminus T(C),$$

где $r_i \in \mathbb{N}_0$, $u_i \in \mathbb{Q}_p^*$, $p \nmid u_i$. По теореме 3 $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + \bar{H}_g$. Покажем, что $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ не является вполне характеристической подгруппой группы G. Будем считать, что $I(g) = \mathbb{N}$, и зададим эндоморфизм φ базисного подмодуля $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$, положив

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_i, & \text{если } i \in I(g),\ i \text{ чётно},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда φ однозначно продолжается до эндоморфизма группы G [10].

Нетрудно убедиться, что

$$\varphi(g) = \widetilde{\sum_{i\in I(g)}} p^{r_{2i}} u_{2i} e_{2i}.$$

Допустим, что $\varphi(g) \in \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$. Тогда $\varphi(g) = mg + h$ для некоторых $m \in \mathbb{Z}$ и $h \in \bar{H}_g$. Отсюда следует, что $h = \varphi(g) - mg$ и проекция $\pi(h)$ на $\widetilde{\sum_{i\in I(g)}} \mathbb{Q}_p^* e_i$ имеет вид

$$\pi(h) = (-mp^{r_1} u_1 e_1,\ (1-m)p^{r_2} u_2 e_2,\ -mp^{r_3} u_3 e_3, \ldots).$$

Если $m = 0$, то

$$\pi(h) = (0,\ p^{r_2} u_2 e_2,\ 0,\ p^{r_4} u_4 e_4, \ldots).$$

Значит, $o(h) = \infty$ и $I(g) \cap I(h)$ совпадает с множеством чётных чисел. Но последовательность $\{r_{2i} - r_{2i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ нулевая, что противоречит лемме 14. Следовательно, $m \neq 0$.

Если $m=1$, то

$$\pi(h)=(-p^{r_1}u_1e_1,\,0,\,-p^{r_3}u_3e_3,\,0,\,\ldots).$$

Значит, $o(h)=\infty$ и $I(g)\cap I(h)$ — множество нечётных чисел. Так как последовательность $\{r_{2i+1}-r_{2i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ нулевая, то $m\neq 1$.

Пусть $m\notin\{0,1\}$ и $m=p^{k_1}m_1$, $1-m=p^{k_2}m_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}_0$, $p\nmid m_1$, $p\nmid m_2$. Тогда

$$\pi(h)=(-p^{r_1+k_1}m_1u_1e_1,\,p^{r_2+k_2}m_2u_2e_2,\,-p^{r_3+k_1}m_1u_3e_3,\,\ldots).$$

Так как хотя бы одна из последовательностей $\{s_{2i+1}-r_{2i+1}-k_1\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{s_{2i}-r_{2i}-k_2\}_{i\in\mathbb{N}}$ неограниченная, то $o(h)=\infty$, при этом $I(g)\cap I(h)=\mathbb{N}$. Пусть

$$n_i=\begin{cases} r_i+k_1, & \text{если } i \text{ нечётно},\\ r_i+k_2, & \text{если } i \text{ чётно}.\end{cases}$$

Тогда

$$\pi(h)=(-p^{n_1}m_1e_1,\,p^{n_2}m_2e_2,\,-p^{n_3}m_1e_3,\,p^{n_4}m_2e_4,\,\ldots)$$

и

$$n_i-r_i=\begin{cases} k_1, & \text{если } i \text{ нечётно},\\ k_2, & \text{если } i \text{ чётно},\end{cases}$$

т. е. последовательность $\{n_i-r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ограниченная, что противоречит лемме 14.

Таким образом, $\varphi(g)\notin\langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$, откуда следует, что $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ не является вполне характеристической подгруппой группы G. Следовательно, G не является afi-группой. □

Следствие 16. *Пусть G — редуцированная p-адическая алгебраически компактная* afi*-группа. Тогда $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}}=\mathrm{M}(G)(g)$ для любого элемента $g\in G$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из теорем 15 и 3 и следствия 4. □

Следующая теорема вместе с теоремой 15 даёт описание afi-групп в классе редуцированных алгебраически компактных групп.

Теорема 17. *Пусть $G=\prod\limits_{p\in\mathbb{P}}G_p$ — редуцированная алгебраически компактная группа. Группа G является* afi*-группой тогда и только тогда, когда G_p является* afi*-группой для каждого простого p.*

Доказательство. Для каждого элемента $g_p\in G_p$ обозначим через $\langle g_p\rangle_{\mathrm{AI}}^{(p)}$ главный абсолютный идеал, порождённый g_p в группе G_p, и через $\langle g_p\rangle_{\mathrm{AI}}$ главный абсолютный идеал, порождённый g_p в группе G.

Пусть G — afi-группа, $g_p\in G_p$, $\varphi_p\in\operatorname{End}G_p$. Покажем, что $\varphi_p(g_p)\in\langle g_p\rangle_{\mathrm{AI}}^{(p)}$. Определим $\varphi\in\operatorname{End}G$, положив $\varphi(a)=\varphi_p\bigl(\pi_p(a)\bigr)$ для всех $a\in G$. Тогда $\varphi_p(g_p)=\varphi(g_p)\in\langle g_p\rangle_{\mathrm{AI}}$, так как $\langle g_p\rangle_{\mathrm{AI}}$ — вполне характеристическая подгруппа группы G. Нетрудно убедиться, что $\langle g_p\rangle^{(p)}_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$. Следовательно, $\varphi_p(g_p) \in \in \langle g_p\rangle^{(p)}_{\mathrm{AI}}$, значит, $\langle g_p\rangle^{(p)}_{\mathrm{AI}}$ — вполне характеристическая подгруппа группы G_p. Поэтому G_p является RAI-группой.

Пусть теперь G_p — afi-группа для каждого простого числа p. Пусть $g \in G$, $\varphi \in \operatorname{End} G$ и φ_p — сужение эндоморфизма φ на G_p. Тогда $\varphi(g) = \big(\varphi_p(g_p)\big)_p$ [10]. Так как G_p — afi-группа, то $\varphi_p(g_p) \in \langle g_p\rangle^{(p)}_{\mathrm{AI}}$. Из следствия 16 имеем $\langle g\rangle^{(p)}_{\mathrm{AI}} = = \mathrm{M}(G_p)(g_p)$, откуда следует, что $\varphi_p(g_p) = g_p *_p f_p$ для некоторого элемента $f_p \in G_p$ и некоторого умножения $*_p$ на G_p. Пусть $*$ — умножение на G, определённое естественным образом: $(a_p)_p * (b_p)_p = (a_p *_p b_p)_p$. Тогда

$$\varphi(g) = \big(\varphi_p(g_p)\big)_p = (g_p *_p f_p)_p = (g_p)_p * (f_p)_p = g * (f_p)_p \in \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}.$$

Таким образом, $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ — вполне характеристическая подгруппа группы G. Следовательно, G — afi-группа. $\square$

Литература

[1] Куликов Л. Я. Обобщённые примарные группы. 1 // Тр. ММО. — 1952. — Т. 1. — С. 247—326; 2 // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 85—167.

[2] Aghdam A. M., Karimi F., Najafizadeh A. On the subgroups of torion-free groups which are subrings in every ring // Ital. J. Pure Appl. Math. — 2013. — Vol. 31. — P. 63—76.

[3] Andruszkiewicz R. R., Woronowicz M. On associative ring multiplication on Abelian mixed-groups // Commun. Algebra. — 2014. — Vol. 42, no. 9. — P. 3760—3767.

[4] Andruszkiewicz R. R., Woronowicz M. Some new results for the square subgroup of an Abelian group // Commun. Algebra — 2016. — Vol. 44, no. 2. — P. 2351—2361.

[5] Beaumont R. A. Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups // Duke Math. J. — 1948. — Vol. 15. — P. 367—369.

[6] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free rings // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 61—98.

[7] Czele T. Zur Theorie der Zeroringe // Math. Ann. — 1949. — B. 121. — S. 242—246.

[8] Feigelstock S. The additive groups of self-injective rings // Soochow J. Math. — 2007. — Vol. 33, no. 4. — P. 641—645.

[9] Fried E. On the subgroups of Abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian Groups. — Budapest, 1964. — P. 51—55.

[10] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vols. 1, 2. — London: Academic Press, 1973, 1974.

[11] Kuratowski K., Mostowski A. Set Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1976.

[12] Jacobson N. Structure of Rings. — Providence: Amer. Math. Soc., 1956.

[13] Kompantseva E. I. Torsion free rings // J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 171, no. 2. — P. 213—247.

[14] McLean K. R. The additive ideals of a p—ring // J. London Math. Soc. — 1975. — Vol. 2. — P. 523—529.

[15] Wickless W. J. Abelian group which admit only nilpotent multiplications // Pacific J. Math. — 1972. — Vol. 40, no. 1. — P. 251—259.