Распознаваемость по графу простых чисел группы $^2E_6(2)$

А. С. КОНДРАТЬЕВ
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет
e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

УДК 512.542

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, граф простых чисел, распознавание по графу простых чисел.

Аннотация

Доказано, что простая группа $^2E_6(2)$ распознаваема по своему графу простых чисел.

Abstract

A. S. Kondrat'ev, Recognizability by prime graph of the group $^2E_6(2)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 115—120.

It is proved that the simple group $^2E_6(2)$ is recognized by its prime graph.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков её элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга—Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел даётся теоремой Грюнберга—Кегеля (см. лемму 1). Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в [5,14]. Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга—Кегеля нашли большое применение в теории групп.

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. [9]) или графу простых чисел.

Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру* (*по графу простых чисел*), если она определяется однозначно с точностью до изоморфизма в классе конечных групп своим спектром (соответственно графом простых чисел). Первый необходимый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп по спектру или графу простых чисел заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости (оно было введено автором в 2001 г.), более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой* по спектру (по графу простых чисел), если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(P)$) имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

В [6] было завершено доказательство распознаваемости по спектру конечных простых групп, граф Грюнберга—Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности, за исключением группы A_6. Тем самым был дан положительный ответ на соответствующий вопрос В. Д. Мазурова из [9].

В [3, 4] была доказана распознаваемость конечных простых групп по графу простых чисел, который имеет по крайней мере пять компонент связности.

В данной работе мы делаем шаг в решении проблемы распознаваемости по графу простых чисел конечных простых групп G, для которых $s(G) = 4$. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Простая группа ${}^2E_6(2)$ распознаваема по графу простых чисел.*

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [10—12]. Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых делителей числа n.

Пусть G — конечная группа. Её спектр $\omega(G)$ частично упорядочен относительно делимости и однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ максимальных элементов G. Обозначим множество связных компонент графа $\Gamma(G)$ через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leqslant i \leqslant s(G)\}$; при этом для группы G чётного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Положим $\pi(G) = \pi(|G|)$ и

$$\mu_i(G) = \{n \in \mu(G) \mid \pi(n) \subseteq \pi_i(G)\}$$

для $1 \leqslant i \leqslant s(G)$. Обозначим через $t(G)$ наибольшую из мощностей независимых множеств графа $\Gamma(G)$ (множество вершин графа называется *независимым*, если его элементы попарно не смежны).

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Лемма 1 (теорема Грюнберга—Кегеля [14, теорема А]). *Для группы G с несвязным графом $\Gamma(G)$ верно одно из следующих утверждений:*

а) *G — группа Фробениуса;*

б) *G — 2-фробениусова группа, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно;*

в) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $\mathrm{Inn}(P) \leqslant A \leqslant \mathrm{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с условием $s(G) \leqslant s(P)$ и $A/\mathrm{Inn}(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 2 [1, 2, 5, 7, 14]. *Пусть P — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга—Кегеля. Тогда*

а) $|\mu_i(P)| = 1$ *для* $i > 1$, *ниже* $n_i(P)$ *обозначает единственный элемент из* $\mu_i(P)$ *для* $i > 1$;

б) *если* $s(P) \geqslant 4$, *то* P, $t(P)$ *и* $n_i(P)$ *для* $2 \leqslant i \leqslant s(P)$ *указаны в приведённой ниже таблице.*

Таблица 1. Параметры простых групп P с $s(P) \geqslant 4$

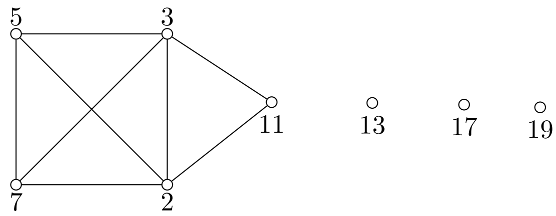
P	Ограничения на P	$t(P)$	$n_2(P), \ldots, n_{s(P)}(P)$
$A_2(4)$		4	3, 5, 7
$^2B_2(q)$	$q = 2^{2m+1} > 3$	4	$q-1$, $q-\sqrt{3q}+1$, $q+\sqrt{3q}+1$
$^2E_6(2)$		5	13, 17, 19
$E_8(q)$	$q \equiv 2, 3 \pmod 4$	12	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$, q^8-q^4+1, $\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$
M_{22}		4	5, 7, 11
J_1		4	7, 11, 19
$O'N$		5	11, 19, 31
LyS		6	31, 37, 67
Fi'_{24}		6	17, 23, 29
F_1		11	41, 59, 71
$E_8(q)$	$q \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$	12	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$, $\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$, q^8-q^4+1, $\frac{q^{10}+1}{q^2+1}$
J_4		12	23, 29, 31, 37, 43

Из лемм 1 и 2 вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга—Кегеля, не изоморфная группе Фробениуса или 2-фробениусовой группе, и P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда для каждого $i \in \{2, \ldots, s(G)\}$ существует $j \in \{2, \ldots, s(P)\}$, такое что $n_i(G) = n_j(P)$.*

Лемма 4 [8, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Доказательство теоремы. Пусть $L = {}^2E_6(2)$. Ввиду [12] граф $\Gamma(L)$ имеет следующий вид.



В частности, $s(L) = 4$ и множество $\{n_2(L), n_3(L), n_4(L)\}$ равно $\{13, 17, 19\}$.

Пусть G — конечная группа с условием $\Gamma(G) = \Gamma(L)$ и $N = F(G)$. Положим $\bar{G} = G/N$.

Докажем сначала квазираспознаваемость группы L по графу простых чисел. По леммам 1—3 имеем $\mathrm{Inn}(P) \trianglelefteq \bar{G} \leqslant \mathrm{Aut}(P)$, где P — конечная простая группа с условиями

$$s(P) \geqslant 4, \quad \pi(N) \cup \pi\big(\bar{G}/\,\mathrm{Inn}(P)\big) \subseteq \pi_1(G),$$
$$\{n_2(G), n_3(G), n_4(G)\} \subseteq \{n_i(P) \mid 2 \leqslant i \leqslant s(P)\}.$$

Поскольку числа $n_2(L)$, $n_3(L)$ и $n_4(L)$ просты, множество $\{n_2(G), n_3(G), n_4(G)\}$ равно $\{13^l, 17^m, 19^n\}$, где l, m и n — некоторые натуральные числа.

Согласно таблице группа P изоморфна одной из следующих групп: $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$, ${}^2B_2(q)$ для $q = 2^{2m+1} > 2$, $E_8(q)$, M_{22}, J_1, $O'N$, LyS, Fi'_{24}, F_1, J_4. Далее рассматриваются все эти возможности для P.

Пусть $P \cong {}^2B_2(q)$, где $q = 2^{2m+1} > 2$. Тогда из [5] и таблицы получаем, что $\pi_1(P) = \{2\}$ и

$$\{n_2(G), n_3(G), n_4(L)\} = \{n_i(P) \mid 2 \leqslant i \leqslant s(P)\} = \{q-1,\ q-\sqrt{3q}+1,\ q+\sqrt{3q}+1\}.$$

Следовательно, $\pi(P) = \{2, 13, 17, 19\}$. Но поскольку $5 : 4 \cong Sz(2) < Sz(q)$, множество $\pi(P)$ содержит 5; противоречие.

Пусть $P \cong E_8(q)$. Тогда

$$\{n_2(G), n_3(G), n_4(L)\} \subseteq \{r^8 - r^4 + 1, (r^{10} \pm r^5 + 1)/(r^2 \pm r + 1), (r^{10} + 1)/(r^2 + 1)\}.$$

Согласно таблице $t(P) = 12$, поэтому $|\pi(P)| \geqslant 12$. Но $\pi(P) \subseteq \pi(G)$ и $|\pi(G)| = |\pi(L)| = 8$; противоречие.

Если $P \cong A_2(4)$, то $\{n_2(L), n_3(L), n_4(L)\} \subseteq \{3, 5, 7\}$, что невозможно.

Если $P \cong M_{22}$, то $\{n_2(L), n_3(L), n_4(L)\} \subseteq \{5, 7, 11\}$, что невозможно.

Если $P \cong J_1$, то $\{n_2(L), n_3(L), n_4(L)\} \subseteq \{7, 11, 19\}$, что невозможно.

Если $P \cong O'N$, то $\{n_2(L), n_3(L), n_4(L)\} \subseteq \{11, 19, 31\}$, что невозможно.

Если $P \cong LyS$, то $\{n_2(L), n_3(L), n_4(L)\} \subseteq \{31, 37, 67\}$, что невозможно.

Если $P \cong Fi'_{24}$, то $\{n_2(L), n_3(L), n_4(L)\} \subseteq \{31, 37, 67\}$, что невозможно.

Если $P \cong F_1$, то $\{n_2(G), n_3(G), n_4(L)\} \subseteq \{41, 59, 71\}$, что невозможно.

Если $P \cong J_4$, то $\{n_2(G), n_3(G), n_4(L)\} \subseteq \{23, 29, 31, 37, 43\}$, что невозможно.

Итак, $P \cong L$, т. е. квазираспознаваемость по графу простых чисел группы L доказана.

Предположим, что $N \neq 1$. Можно считать, что N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p из $\pi_1(G)$ и P действует точно и неприводимо на N.

Схема Дынкина для P имеет тип F_4 (см. [11]). Возьмём в P параболическую максимальную подгруппу R, полученную выбрасыванием последней (концевой) вершины из схемы Дынкина для P. Ввиду [11, 12] разложение Леви для R имеет вид $R = UM$, где U — унипотентный радикал порядка 2^{24} и M — изоморфное группе $O_8^-(2)$ дополнение Леви группы R. Подгруппа M является CR-подгруппой в P в терминологии [13] и содержит элемент x порядка 17, образующий компоненту связности в графе $\Gamma(G)$. В частности, централизатор $C_G(x)$ является 17-группой.

Предположим, что $p \neq 2$. Подгруппа $U\langle x\rangle$ — группа Фробениуса. Применяя лемму 4 к полному прообразу в G группы $U\langle x\rangle$, получаем, что $17p \in \omega(G)$; противоречие.

Таким образом, $p = 2$. Поэтому ввиду [13, следствие 5.1] элемент x централизует некоторый неединичный элемент из N; противоречие.

Итак, $N = 1$.

Предположим, что $\mathrm{Inn}(P) < \bar{G}$. Ввиду [12] $\mathrm{Aut}(P) \cong S_3$ и для каждого $r \in \{2, 3\}$ почти простая группа вида $P : r$ содержит элемент порядка $17r$. Поэтому и группа G содержит такой элемент; противоречие.

Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.A03.21.0006).

Литература

[1] Васильев А. В., Вдовин Е. П. Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, № 6. — С. 682—725.

[2] Васильев А. В., Вдовин Е. П. Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 4. — С. 425—470.

[3] Заварницин А. В. О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. — 2006 — Т. 45, № 4. — С. 390—408.

[4] Заварницин А. В. Конечные группы с пятикомпонентным графом простых чисел // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 1. — С. 57—64.

[5] Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Матем. сб. — 1989. — Т. 180, № 6. — С. 787—797.

[6] Кондратьев А. С. Распознаваемость групп $E_7(2)$ и $E_7(3)$ по графу простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 2. — С. 223—229.

[7] Кондратьев А. С., Мазуров В. Д. Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. матем. журн. — 2000. — Т. 41, № 2. — С. 360—371.

[8] Мазуров В. Д. Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, № 1. — С. 37—53.

[9] Мазуров В. Д. Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. — 2005. — Т. 36. — С. 119—138.

[10] Aschbacher M. Finite Group Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

[11] Carter R. Simple Groups of Lie Type. — New York: Wiley and Sons, 1972.

[12] Conway J. H., Curtis R., Norton S., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of Finite Groups. — Oxford: Clarendon Press, 1985.

[13] Suprunenko I. D., Zalesski A. E. Fixed vectors for elements in modules for algebraic groups // Intern. J. Algebra Comput. — 2007. — Vol. 17, no. 5-6. — P. 1249—1261.

[14] Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. — 1981. — Vol. 69, no. 2. — P. 487—513.