Об одном классе факторно делимых абелевых групп с изоморфными полугруппами эндоморфизмов

О. В. ЛЮБИМЦЕВ
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: факторно делимая абелева группа, полугруппа эндоморфимов.

Аннотация

Пусть Λ — некоторый класс абелевых групп. Говорят, что группа $A \in \Lambda$ определяется своей полугруппой $E^\star(A)$ эндоморфизмов в классе Λ, если всякий раз из изоморфизма $E^\star(A) \cong E^\star(B)$, где $B \in \Lambda$, следует изоморфизм $A \cong B$. В работе описаны расщепляющиеся абелевы группы из класса $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$ вполне разложимых факторно делимых абелевых групп, которые определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$.

Abstract

O. V. Lyubimtsev, On a class of quotient divisible Abelian groups with isomorphic endomorphism semigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 121—130.

Let Λ be some class of Abelian groups. We say that a group $A \in \Lambda$ is determined by its endomorphism semigroup $E^\star(A)$ in Λ if the isomorphism $E^\star(A) \cong E^\star(B)$, where $B \in \Lambda$, implies $A \cong B$. We describe split Abelian groups in the class $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$ of completely decomposable quotient divisible Abelian groups determined by their endomorphism semigroups in the class $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$.

Важной задачей теории абелевых групп является изучение связей между абелевой группой и её кольцом эндоморфизмов. При этом один из наиболее естественных возникающих вопросов следующий: когда из изоморфизма колец эндоморфизмов двух абелевых групп следует изоморфизм самих групп? Если для периодических абелевых групп ответ на поставленный вопрос положительный (теорема Бэра—Капланского), то для абелевых групп без кручения это далеко не так (см., например, [5]). Иногда вместо кольца эндоморфизмов рассматривалась только его мультипликативная часть (полугруппа эндоморфизмов). В [4] было доказано, что для того чтобы периодические абелевы группы были изоморфны, достаточно изоморфизма их полугрупп эндоморфизмов. Абелевы группы без кручения с изоморфными полугруппами эндоморфизмов изучались в [6].

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 121—130.
© 2019 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Вопрос определяемости смешанных абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов до настоящего времени не являлся объектом систематического изучения. В [3] автором были найдены некоторые классы смешанных абелевых групп с указанным свойством. В частности, были описаны вполне разложимые почти делимые факторно делимые группы, которые определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе вполне разложимых факторно делимых групп. В данной статье результаты упомянутой работы обобщаются на класс расщепляющихся вполне разложимых факторно делимых групп.

1. Основные понятия и обозначения

Все группы, рассматриваемые в работе, являются абелевыми.

Говорят, что группа A, принадлежащая классу Ξ абелевых групп, определяется своим кольцом $E(A)$ (своей полугруппой $E^\star(A)$) эндоморфизмов в этом классе, если из $E(A) \cong E(B)$ ($E^\star(A) \cong E^\star(B)$) для $B \in \Xi$ следует $A \cong B$.

Группа G называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F — периодическая делимая группа. Факторно делимые группы без кручения были введены в 1961 году Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [10]. В 1998 году в [11] А. А. Фомин и У. Уиклесс определили смешанные факторно делимые группы конечного ранга и доказали, что категории смешанных факторно делимых групп и групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов двойственны. Факторно делимая группа называется *вполне разложимой*, если она раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. Через $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$ и $\mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$ обозначим классы вполне разложимых и расщепляющихся вполне разложимых факторно делимых групп соответственно. В статье найдены группы из класса $\mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$, которые принадлежат классу $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$ групп, определяющихся своей полугруппой эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$.

Приведём необходимые понятия кохарактеристик и котипов факторно делимых групп ранга 1 (подробнее см. [8]).

Пусть $m_p \in \{\infty, 0, 1, 2, \ldots\}$ для каждого простого числа p. Тогда последовательность (m_p) по всем простым числам p называется характеристикой. Две характеристики (m_p) и (k_p) эквивалентны, если множество $S = \{p\colon k_p \neq m_p\}$ конечно, а также $k_p < \infty$ и $m_p < \infty$ для всех $p \in S$. Классы эквивалентных характеристик называются типами (Бэра). Пусть a — произвольный элемент группы A. Для каждого простого числа p обозначим через m_p наименьшее целое неотрицательное число, такое что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p в группе A, т. е. $p^{m_p}a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} p^nA$. Если такого m_p не существует, то будем считать, что $m_p = \infty$. Характеристика (m_p) называется *кохарактеристикой* элемента a в группе A и обозначается $\chi(a)$. Тип $\tau(a)$, содержащий кохарактеристику $\chi(a)$ называется *котипом* элемента a. Кохарактеристикой факторно

делимой группы A ранга 1 называют кохарактеристику любого её базисного элемента и обозначают $\chi(A)$. Две факторно делимые группы ранга 1 изоморфны тогда и только тогда, когда их кохарактеристики совпадают. Кроме того, факторно делимая группа ранга 1 изоморфна своей группе эндоморфизмов.

Через Z_m обозначим группу классов вычетов по модулю m, через $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, через P — множество простых чисел. Пусть A — смешанная группа, $p \in P$. Тогда через $t(A)$ обозначим периодическую часть группы A, через $t_p(A)$ — p-примарную компоненту группы A, $\operatorname{supp} t(A) = \{p\colon t_p(A) \neq 0\}$. Под рангом $r(A)$ группы A понимается ранг без кручения.

2. Предварительные результаты

Следующая лемма будет часто использоваться в дальнейшем.

Лемма 1 [6]. *Если $\alpha\colon E^\star(A) \to E^\star(B)$ — изоморфизм и $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$, то*

1) $B = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i$;
2) $\alpha(e_i) = \varepsilon_i$, *где* $\{e_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\}$ *и* $\{\varepsilon_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\}$ — *проекции, соответствующие указанным разложениям групп A и B*;
3) *изоморфизм α индуцирует изоморфизмы $E^\star(A_i) \to E^\star(B_i)$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$*;
4) *изоморфизм α индуцирует групповые изоморфизмы*
$$\operatorname{Hom}(A_i, A_j) \cong \operatorname{Hom}(B_i, B_j)$$
для всех $i \neq j$, $i, j \in \{1,\dots,n\}$.

Нам также понадобиться несколько утверждений, доказанных в [3].

Лемма 2 [3, лемма 1]. *Пусть $A, B \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$. Если $E^\star(A) \cong E^\star(B)$, то $r(A) = r(B)$ и $t(A) \cong t(B)$.*

Лемма 3 [3, предложение 2]. *Пусть A — расщепляющаяся факторно делимая группа ранга 1 с кохарактеристикой $\chi(A) = (m_p)$. Тогда $A \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$ в том и только том случае, если $P_0(A) = \{p \in P \mid m_p = 0\} = \varnothing$ или $P_\infty(A) = \{p \in P \mid m_p = \infty\} = \varnothing$.*

Пусть
$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n -$$
фиксированное разложение группы $A \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$, $r(A) > 1$, $r(A_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Прямое слагаемое A_i назовём *изолированным*, если в дополнительном прямом слагаемом не найдётся прямого слагаемого ранга 1, котип которого сравним с котипом группы A_i.

Предложение 1 [3, предложение 3]. *Пусть A — вполне разложимая факторно делимая группа без кручения, $r(A) > 1$. $A \in QD_{\mathrm{cd}}(E^\star)$ в точности тогда, когда A не имеет изолированных прямых слагаемых.*

Согласно предложению 1 будем предполагать, что факторно делимая группа A является смешанной.

Лемма 4. *Если $A \in \mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$, $r(A) > 1$, A не содержит изолированных прямых слагаемых, то $A \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^{\star})$.*

Доказательство. Пусть $A = A' \oplus t(A)$, где A' — вполне разложимая факторно делимая группа без кручения. Тогда все прямые слагаемые ранга 1 группы A' имеют идемпотентные котипы [8], а группа $t(A)$ конечна [7]. Если $E^{\star}(A) \cong E^{\star}(B)$ для $B \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$, то согласно леммам 1 и 2 $B = B' \oplus t(B)$, причём $E^{\star}(A') \cong E^{\star}(B')$ и $t(A) \cong t(B)$. Поскольку $E(A')$ — кольцо с однозначным сложением [2], то $E(A') \cong E(B')$. Последний изоморфизм влечёт изоморфизм $A' \cong B'$, так как группы без кручения ранга 1 идемпотентного котипа определяются своими кольцами эндоморфизмов в классе групп без кручения ранга 1 [1, упр. 4, с. 188]. $\square$

Из леммы 4 следует, что задача описания групп $A \in \mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}} \cap \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^{\star})$ сводится к изучению групп, имеющих изолированные прямые слагаемые без кручения ранга 1.

3. Основные результаты

Пусть Ω — множество идемпотентных котипов, $Q^{(\tau)}$ — рациональная группа котипа $\tau = (m_p^{\tau}) \in \Omega$, $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} \in \mathbb{N}$ и $P_n = \{p_1, \dots, p_s\}$. Введём следующие обозначения:

$$P_{\tau,n} = \{p \in P \setminus P_n \mid p \equiv q \,(\mathrm{mod}\ n) \text{ и } m_p^{\tau} \neq m_q^{\tau} \text{ для некоторого } q \in P \setminus P_n\};$$
$$P^0_{\tau,n} = \{p \in P_{\tau,n} \mid m_p^{\tau} = 0\}.$$

Заметим, что если $p \notin P_n$, то по теореме Дирихле (см., например, [9]) найдётся бесконечно много таких простых чисел $q \notin P_n$, что $p \equiv q \,(\mathrm{mod}\ n)$.

Пусть $p, q \in P_{\tau,n}$. Положим

$$p \sim q \Longleftrightarrow p \equiv q \,(\mathrm{mod}\ n).$$

Класс эквивалентности элемента $p \in P_{\tau,n}$ обозначим через $P_{\tau,n}[p]$. Введём отношение эквивалентности на множестве Ω для фиксированного $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau \overset{n}{\sim} \tau' \Longleftrightarrow P_{\tau,n}[p] = P_{\tau',n}[p],\ |P^0_{\tau,n}[p]| = |P^0_{\tau',n}[p]|, \text{ если } p \in P_{\tau,n},$$
$$m_p^{\tau} = m_p^{\tau'}, \text{ если } p \notin P_{\tau,n}.$$

Класс эквивалентности котипа $\tau \in \Omega$ обозначим через $\Omega_{\tau,n}$.

Пусть $A \in \mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$,

$$A = A' \oplus t(A), \tag{1}$$

где $A' = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$ — прямая сумма рациональных групп $A_i = Q^{(\tau_i)}$, $\tau_i \in \Omega$.

Предложение 2. *Пусть* $A = A_i \oplus \bar{A}_i \in \mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$, $r(A) > 1$, *где* $A_i \in A'$ — *изолированное слагаемое, причём* $P_\infty(A_i) \cap \operatorname{supp} t(A) = \varnothing$. *Тогда* $A \notin \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$.

Доказательство. Так как $\operatorname{Hom}\bigl(A_i, t(A)\bigr) = 0$, то A_i — вполне инвариантная подгруппа в A. Тогда $A \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$ в том и только том случае, если $A_i \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$ и $\bar{A}_i \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$. Если $A_i \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$, то по лемме 3 $A_i \cong Z$ или $A_i \cong Q$. Однако указанные группы не могут быть вполне инвариантными подгруппами в A. Противоречие. □

Далее, не умаляя общности, будем предполагать, что $P_\infty(A_i) \cap \operatorname{supp} t(A) \neq \varnothing$ для изолированного слагаемого $A_i \in A'$. Кроме того, для котипов $\tau, \tau' \in \Omega$ имеем $\tau = (m_p^\tau)$, $\tau' = (m_p^{\tau'})$.

Лемма 5. *Пусть* $A = A_i \oplus \bar{A}_i \in \mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$, *где* $A_i = Q^{(\tau)}$ — *изолированное слагаемое с* $P_{\tau,n} = \varnothing$, $n = \exp\Bigl(\operatorname{Hom}\bigl(Q^{(\tau)}, t(A)\bigr)\Bigr)$. *Если* $E^\star(A) \overset{\alpha}{\cong} E^\star(B)$, *где* $B \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$, *то* $A_i \cong B_i$ *для соответствующей подгруппы* B_i *в* B.

Доказательство. По лемме 1 имеем $B = B_i \oplus \bar{B}_i$ и $E^\star(A_i) \cong E^\star(B_i)$. Пусть $B_i = Q^{(\tau')}$, $\tau' \in \Omega$. Если $A_i \ncong B_i$, то найдутся такие $p \cdot 1 \in E(A_i)$ и $q \cdot 1 \in E(B_i)$, $p \neq q$, что $\alpha(p \cdot 1) = q \cdot 1$ и $m_p^\tau \neq m_p^{\tau'}$, $m_p^\tau = m_q^{\tau'}$, $m_q^\tau = m_p^{\tau'}$. Тогда $p \notin P_n$ и $q \notin P_n$. Действительно, если $p \in P_n$ ($q \in P_n$), то $t_p\bigl(\operatorname{Hom}(A_i, \bar{A}_i)\bigr) \neq 0$ ($t_q\bigl(\operatorname{Hom}(A_i, \bar{A}_i)\bigr) \neq 0$), в то время как $t_p\bigl(\operatorname{Hom}(B_i, \bar{B}_i)\bigr) = 0$ ($t_q\bigl(\operatorname{Hom}(B_i, \bar{B}_i)\bigr) = 0$), что противоречит лемме 1.

Пусть $\varphi = \varphi_{11} + \varphi_{21} + \varphi_{22} \in E(A)$, где $\varphi_{11} \in E(A_i)$, $\varphi_{21} \in \operatorname{Hom}(A_i, \bar{A}_i)$ и $\varphi_{22} \in E(\bar{A}_i)$. По лемме 1

$$\alpha(\varphi) = \alpha(\varphi_{11}) + \alpha(\varphi_{21}) + \alpha(\varphi_{22}),$$

причём $\alpha(\varphi'_{21} + \varphi''_{21}) = \alpha(\varphi'_{21}) + \alpha(\varphi''_{21})$ для любых $\varphi'_{21}, \varphi''_{21} \in \operatorname{Hom}(A_i, \bar{A}_i)$.

Рассмотрим элементы $\varphi = \varphi_{11} + \varphi_{21}$, $\psi = \psi_{11} + \psi_{21}$. Поскольку α — мультипликативный изоморфизм, то $\alpha(\varphi_{21}\psi_{11}) = \alpha(\varphi_{21})\alpha(\psi_{11})$. Положим $\psi_{11} = p \cdot 1$. Тогда

$$\alpha(p\varphi_{21}) = p\alpha(\varphi_{21}) = \alpha(p)\alpha(\varphi_{21}) = q\alpha(\varphi_{21}).$$

Отсюда получаем равенство $p\alpha(\varphi_{21}) = q\alpha(\varphi_{21})$ в группе $\operatorname{Hom}(B_i, \bar{B}_i)$ для всех $\varphi_{21} \in \operatorname{Hom}(A_i, \bar{A}_i)$. Так как α — биекция и

$$\operatorname{Hom}(B_i, \bar{B}_i) \cong \operatorname{Hom}(A_i, \bar{A}_i) = \operatorname{Hom}\bigl(Q^{(\tau)}, t(A)\bigr),$$

то указанное равенство эквивалентно сравнению $p \equiv q \pmod{n}$. Однако по условию $P_{\tau,n} = \varnothing$. Противоречие. Значит, $A_i \cong B_i$. □

Из доказательства леммы 5 получаем важное для дальнейших рассуждений следствие.

Следствие 1. *Пусть* $A_i = Q^{(\tau)}$ — *изолированное слагаемое группы* $A \in \mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$, $r(A) > 1$, *и* $B_i = Q^{(\tau')}$ — *соответствующая подгруппа в группе* $B \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$ *при изоморфизме* $E^\star(A) \cong E^\star(B)$. *Если* $m_p^\tau \neq m_p^{\tau'}$ *для некоторого* $p \in P$, *то найдётся такое* $q \in P_{\tau,n}[p]$, *что* $m_q^\tau \neq m_q^{\tau'}$ *и* $m_p^{\tau'} = m_q^\tau$, $m_q^{\tau'} = m_p^\tau$.

Лемма 6. *Пусть $Q^{(\tau)}$, $Q^{(\tau')}$ — рациональные группы котипов $\tau, \tau' \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$. Если $\tau \overset{n}{\sim} \tau'$, то $E^\star\big(Q^{(\tau)}\big) \overset{\alpha_\tau}{\cong} E^\star\big(Q^{(\tau')}\big)$, причём $\alpha_\tau(p) \equiv p \pmod n$ для всех $p \in P$.*

Доказательство. Так как $\tau \overset{n}{\sim} \tau'$, то для каждого класса $P_{\tau,n}[p]$ существует такая биекция $\varphi'_{[]}\colon P_{\tau,n}[p] \to P_{\tau',n}[p]$, что $\varphi'_{[]}(q) = q'$ и $m_q^\tau = m_{q'}^{\tau'}$ для всех $q \in P_{\tau,n}[p]$. Таким образом, имеем взаимно-однозначное отображение $\varphi'\colon P_{\tau,n} \to P_{\tau',n}$. Продолжим отображение φ' до отображения $\varphi\colon P \to P$, полагая $\varphi(p) = p$ для всех $p \notin P_{\tau,n}$. Пусть $r \in E\big(Q^{(\tau)}\big)$ и $r = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m} r'$, где $k_i \in \mathbb{Z}$; $i = 1, 2, \dots m$; $p_1, \dots, p_m \in P_{\tau,n}$. Обозначим $q_1 = \varphi(p_1), \dots, q_m = \varphi(p_m)$. Положим

$$\alpha_\tau(r) = \alpha_\tau(p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m} q_1^{l_1} \dots q_m^{l_m} r'') = p_1^{l_1} \dots p_m^{l_m} q_1^{k_1} \dots q_m^{k_m} r''.$$

Нетрудно видеть, что α_τ — полугрупповой изоморфизм кольца $E\big(Q^{(\tau)}\big)$ на кольцо $E\big(Q^{(\tau')}\big)$ и $\alpha_\tau(p) \equiv p \pmod n$ для всех $p \in P$. $\square$

Рассмотрим теперь общий случай. В разложении (1)

$$A' = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i = \bigoplus_{\tau \in \Omega(A)} A^{(\tau)} -$$

вполне разложимая факторно делимая группа без кручения, где

$$A^{(\tau)} = \bigoplus_{i \in I(\tau)} A_i, \quad I(\tau) = \{i \in \{1, 2, \dots n\} \mid \tau(A_i) = \tau\},$$

$\Omega(A)$ — множество различных котипов прямых слагаемых без кручения ранга 1.

Скажем, что котип $\tau \in \Omega$ изолирован в Ω', $\Omega' \subset \Omega$, если для любого $\tau' \in \Omega'$ либо τ равен τ', либо τ несравним с τ'. Введём следующее обозначение:

$$\Omega'(A) = \Big\{\tau \in \Omega(A) \mid \tau \text{ изолирован в } \Omega(A),\ |I(\tau)| = 1 \text{ и } P_{\tau,n} \neq \varnothing, \text{ где } n = \exp\Big(\mathrm{Hom}\big(Q^{(\tau)}, t(A)\big)\Big)\Big\}.$$

Из лемм 2, 4 и 5 следует, что если $\Omega'(A) = \varnothing$, то группа $A \in \mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$ определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$.

Множество $\Omega'' \subset \Omega$ назовём изолированным в $\Omega' \subset \Omega$, если любой котип из Ω'' изолирован в Ω'. Следуя терминологии [6], множество $\Omega'(A)$ назовём *сверхизолированным* в $\Omega(A)$, если для множества $\Omega' \subset \Omega$ различных котипов из того, что

a) Ω' изолированное в $\Omega' \cup \big(\Omega(A) \setminus \Omega'(A)\big)$;
b) $\Omega' \cap \big(\Omega(A) \setminus \Omega'(A)\big) = \varnothing$;
c) существует взаимно-однозначное соответствие $\tau \leftrightarrow \tau'$ между котипами множеств $\Omega'(A)$ и Ω', причём $\tau \overset{n}{\sim} \tau'$ для $n = \exp\Big(\mathrm{Hom}\big(Q^{(\tau)}, t(A)\big)\Big)$;

следует, что $\Omega' = \Omega'(A)$.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$, $r(A) > 1$, причём $\Omega'(A) \neq \varnothing$ и A не имеет таких изолированных слагаемых A_i, что $P_\infty(A_i) \cap \operatorname{supp} t(A) = \varnothing$. Группа A определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$ тогда и только тогда, когда множество $\Omega'(A)$ сверхизолированное в $\Omega(A)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = A_1 \oplus \bar{A}_1$, где $A_1 = \bigoplus\limits_{\tau \in \Omega'(A)} Q^{(\tau)}$. Допустим противное: найдётся такое множество $\Omega' \subset \Omega$, что выполнены условия a)—c), но $\Omega' \neq \Omega'(A)$. Построим группу $B = B_1 \oplus \bar{B}_1$, где $B_1 = \bigoplus\limits_{\tau' \in \Omega'} Q^{(\tau')}$, $\bar{B}_1 = \bar{A}_1$. Проверим, что $E^\star(A) \cong E^\star(B)$.

Так как все котипы во множествах $\Omega'(A)$ и Ω' различны, то в силу условий a) и b)

$$E(A_1) \cong \prod_{\tau \in \Omega'(A)} E\big(Q^{(\tau)}\big), \quad E(B_1) \cong \prod_{\tau' \in \Omega'} E\big(Q^{(\tau')}\big).$$

Из леммы 6 и условия c) следует существование полугруппового изоморфизма $\alpha_\tau \colon E^\star\big(Q^{(\tau)}\big) \to E^\star\big(Q^{(\tau')}\big)$ на всех компонентах прямых произведений, причём $\alpha_\tau(p) \equiv p \pmod n$ для всех $p \in P$, $n = \exp\Big(\operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau)}, t(A)\big)\Big)$. Тогда определён изоморфизм полугрупп $\alpha_1 = \prod\limits_{\tau \in \Omega'(A)} \alpha_\tau \colon E^\star(A_1) \to E^\star(B_1)$. Заметим, что

$$\operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau')}, \bar{B}_1\big) = \operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau')}, t(B)\big) = \operatorname{Hom}\Big(Q^{(\tau')}, \bigoplus_{p \in \operatorname{supp} t(A)} Z_{p^k}\Big) \cong \bigoplus_{p \in P^t_{\tau'}} Z_{p^k},$$

где $P^t_{\tau'} = P_\infty\big(Q^{(\tau')}\big) \cap \operatorname{supp} t(A)$, $\tau' \in \Omega'(B)$, $\tau' = (m_p^{\tau'})$. Так как $\tau' \overset{n}{\sim} \tau$ для некоторого $\tau \in \Omega'(A)$, $\tau = (m_p^\tau)$, то $m_p^\tau = m_p^{\tau'}$ для всех $p \notin P_{\tau,n} = P_{\tau',n}$, $n = \exp\Big(\bigoplus\limits_{p \in P^t_{\tau'}} Z_{p^k}\Big)$. Тогда

$$\operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau)}, \bar{A}_1\big) = \operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau)}, t(A)\big) \cong \operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau')}, t(B)\big) = \operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau')}, \bar{B}_1\big),$$

и

$$\exp\Big(\operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau')}, \bar{B}_1\big)\Big) = \exp\Big(\operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau)}, \bar{A}_1\big)\Big) = n.$$

В результате получили, что $\operatorname{Hom}(A_1, \bar{A}_1) \cong \operatorname{Hom}(B_1, \bar{B}_1)$, поэтому далее эти две группы, а также кольца $E(\bar{A}_1)$ и $E(\bar{B}_1)$ мы будем отождествлять.

Пусть $\varphi \in E(A)$, $\varphi = \varphi_{11} + \varphi_{21} + \varphi_{22}$, где $\varphi_{11} \in E(A_1)$, $\varphi_{21} \in \operatorname{Hom}(A_1, \bar{A}_1)$, $\varphi_{22} \in E(\bar{A}_1)$. Положим

$$\alpha(\varphi) = \alpha_1(\varphi_{11}) + \varphi_{21} + \varphi_{22}.$$

Так как α_1 — биекция, то отображение $\alpha \colon E(A) \to E(B)$ также является биекцией. Далее, α сохраняет умножение, $\alpha(\varphi\psi) = \alpha(\varphi)\alpha(\psi)$, где $\varphi, \psi \in E(A)$, если в группе $\operatorname{Hom}(B_1, \bar{B}_1)$ выполнено условие

$$\varphi_{21}\big(\psi_{11} - \alpha_1(\psi_{11})\big) = 0$$

для всех $\psi_{11} \in E(A_1)$. Последнее равенство имеет место, так как разности $\alpha_\tau(r) - r$, где $\tau \in \Omega'(A)$ и $r \in E(Q^{(\tau)})$, аннулируют все компоненты разложения группы $\mathrm{Hom}(B_1, \bar{B}_1)$:

$$\mathrm{Hom}(B_1, \bar{B}_1) \cong \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{\tau' \in \Omega'} Q^{(\tau')}, t(B)\Big) \cong \bigoplus_{\tau' \in \Omega'} \mathrm{Hom}\big(Q^{(\tau')}, t(B)\big).$$

Таким образом, $E^\star(A) \cong E^\star(B)$. Поскольку $\Omega' \neq \Omega'(A)$, то $A \ncong B$. Противоречие.

Достаточность. По условию множество $\Omega'(A)$ является сверхизолированным в $\Omega(A)$. Имеем $A = A_1 \oplus A_2 \oplus t(A)$, где $A_1 = \bigoplus\limits_{\tau \in \Omega'(A)} Q^{(\tau)}$. Если $E^\star(A) \overset{\alpha}{\cong} E^\star(B)$, $B \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$, то $B = B_1 \oplus B_2 \oplus t(B)$, причём по леммам 2, 4 и 5 $B_2 \cong A_2$ и $t(B) \cong t(A)$. Проверим, что $B_1 \cong A_1$, где $B_1 = \bigoplus\limits_{\tau' \in \Omega'(B)} Q^{(\tau')}$. Для доказательства покажем, что множество $\Omega'(B)$ удовлетворяет условиям a)—c). Так как каждое слагаемое ранга 1 группы A_1 вполне инвариантно в $A' = A_1 \oplus A_2$, то соответствующие слагаемые из группы B_1 вполне инвариантны в $B' = B_1 \oplus B_2$. Отсюда следуют a) и b).

Возьмём произвольную подгруппу $Q^{(\tau')}$, $\tau' \in \Omega'(B)$, $\tau' = (m_p^{\tau'})$. Тогда $E^\star\big(Q^{(\tau')}\big) \cong E^\star\big(Q^{(\tau)}\big)$ для некоторого $Q^{(\tau)}$, $\tau \in \Omega'(A)$, $\tau = (m_p^\tau)$. Проверим равенство $P_{\tau,n}[p] = P_{\tau',n}[p]$ для всех $p \in P_{\tau,n}$, где $n = \exp\Big(\mathrm{Hom}\big(Q^{(\tau)}, t(A)\big)\Big)$.

Пусть $q \in P_{\tau,n}[p]$ и $m_q^\tau = m_q^{\tau'}$. По условию найдётся такое $q_1 \in P_{\tau,n}[p]$, что $m_{q_1}^\tau \neq m_q^\tau$. Если $m_{q_1}^{\tau'} = m_{q_1}^\tau$, то доказывать нечего. Пусть $m_{q_1}^{\tau'} \neq m_{q_1}^\tau$. По следствию 1 существует $q_2 \in P_{\tau,n}[p]$, такое что $m_{q_2}^{\tau'} \neq m_{q_2}^\tau$ и $m_{q_1}^{\tau'} = m_{q_2}^\tau$, $m_{q_2}^{\tau'} = m_{q_1}^\tau$. Но тогда $m_{q_2}^{\tau'} \neq m_q^{\tau'}$ и $q_2 \equiv q \pmod n$, т. е. $q \in P_{\tau',n}[p]$. Пусть теперь $m_q^\tau \neq m_q^{\tau'}$. Снова применив следствие 1, найдём такое $q_1 \in P_{\tau,n}[p]$, что $m_{q_1}^{\tau'} \neq m_{q_1}^\tau$ и $m_q^{\tau'} = m_{q_1}^\tau$, $m_{q_1}^{\tau'} = m_q^\tau$. Тогда $q_1 \equiv q \pmod n$, $m_{q_1}^{\tau'} \neq m_q^{\tau'}$, и вновь $q \in P_{\tau',n}[p]$. Следовательно, $P_{\tau,n}[p] \subseteq P_{\tau',n}[p]$. Симметрично доказывается включение $P_{\tau',n}[p] \subseteq P_{\tau,n}[p]$.

Если для некоторого $p \in P^0_{\tau,n}[p]$ имеем $0 = m_p^\tau \neq m_p^{\tau'}$, то найдётся такое $q \in P_{\tau',n}[p]$, что $m_q^{\tau'} = 0$. Обратное утверждение также выполнено. Следовательно, существует взаимно-однозначное соответствие между множествами $P^0_{\tau,n}[p]$ и $P^0_{\tau',n}[p]$, т. е. $|P^0_{\tau,n}[p]| = |P^0_{\tau',n}[p]|$. Из следствия 1 вытекает равенство $m_p^\tau = m_p^{\tau'}$ для всех $p \notin P_{\tau,n}$. В результате получили, что $\tau \overset{n}{\sim} \tau'$ и множество $\Omega'(B)$ удовлетворяет условиям a)—c). Поэтому $\Omega'(A) = \Omega'(B)$ и $A \cong B$. Теорема доказана. $\square$

В [3, теорема 3] доказано, что почти делимая группа $A \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$, $r(A) > 1$, определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}$ тогда и только тогда, когда $P_\infty(A_i) \subseteq \mathrm{supp}\, t(A)$ для всякого изолированного прямого слагаемого A_i группы A. Как показывает следующий пример, в общем случае указанное условие не является необходимым.

Пример 1. Рассмотрим группу

$$A = \big(Q^{(\tau_1)} \oplus Z_3\big) \oplus \big(Q^{(\tau_2)} \oplus Z_5\big),$$

где котипы $\tau_1 = (m_p^{\tau_1})$ и $\tau_2 = (m_p^{\tau_2})$ определяются следующим образом: $m_p^{\tau_1} = 0$ для всех $p \equiv 3 \pmod 5$ и $m_p^{\tau_1} = \infty$ на остальных местах; $m_p^{\tau_2} = 0$ для всех $p \equiv 2 \pmod 3$ и $m_p^{\tau_2} = \infty$ на остальных местах. Ясно, что $Q^{(\tau_1)}$ и $Q^{(\tau_2)}$ — изолированные слагаемые в группе A и $P_\infty\big(Q^{(\tau_i)}\big) \nsubseteq \operatorname{supp} t(A) = \{3,5\}$, $i = 1,2$. Однако $A \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$ по лемме 5, поскольку $P_{\tau_1,5} = \varnothing$ и $P_{\tau_2,3} = \varnothing$.

Пример 2. Пусть

$$A = \big(Q^{(\tau_1)} \oplus Z_2\big) \oplus \big(Q^{(\tau_2)} \oplus Z_5\big),$$

где

$$\tau_1 = (0, \infty, \infty, 0, \infty, \infty, \infty, \ldots), \quad \tau_2 = (\infty, 0, 0, 0, \ldots).$$

Имеем $\Omega(A) = \Omega'(A) = \{\tau_1, \tau_2\}$, $P^t_{\tau_1} = \{5\}$, $P^t_{\tau_2} = \{2\}$, $P_{\tau_1,5} = P_{\tau_1,5}[2] = \{2, 7, 17, \ldots\}$, $P^0_{\tau_1,5} = \{2,7\}$, $P_{\tau_2,2} = \varnothing$. Положим $\Omega' = \{\tau_1', \tau_2\}$, где $\tau_1' = (m_p^{\tau_1'})$ таков, что $m_2^{\tau_1'} = m_{17}^{\tau_1'} = 0$ и $m_p^{\tau_1'} = \infty$, $p \neq 2, 17$. Тогда $P^t_{\tau_1'} = \{5\}$, $P_{\tau_1',5} = P_{\tau_1',5}[17] = P_{\tau_1,5}[2] = \{2, 7, 17, \ldots\}$, $P^0_{\tau_1',5} = \{2, 17\}$. Нетрудно видеть, что множество Ω' удовлетворяет условиям a)—c), но $\Omega' \neq \Omega'(A)$. Следовательно, множество $\Omega'(A)$ не сверхизолированное в $\Omega(A)$, и по теореме 1 группа A не определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{cd}}$.

Следующий пример показывает, что даже в случае $|P_{\tau,n}| = \infty$, где $n = \exp\Big(\operatorname{Hom}\big(Q^{(\tau)}, t(A)\big)\Big)$ для изолированного слагаемого $Q^{(\tau)}$ группы A, возможно $A \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$.

Пример 3. Рассмотрим группу

$$A = Q^{(\tau_1)} \oplus Q^{(\tau_2)} \oplus Z_3 \oplus Z_5,$$

где

$$\tau_1 = (\infty, 0, \infty, \infty, \ldots), \quad \tau_2 = (0, \infty, 0, 0, \ldots).$$

Предположим, что найдётся множество $\Omega' = \{\tau_1', \tau_2'\}$, которое удовлетворяет условиям a)—c), однако $\Omega' \neq \Omega'(A)$. Так как $P_\infty\big(Q^{(\tau_2)}\big) \subset \operatorname{supp} t(A) = \{3,5\}$, то $P_{\tau_2,3} = \varnothing$ и $\tau_2 = \tau_2'$ по лемме 5. Далее, $P_{\tau_1,5} = \{3, 13, \ldots\}$ и $P^0_{\tau_1,5} = \{3\}$. Поскольку $\tau_1 \neq \tau_1'$, то $m_3^{\tau_1'} = \infty$, $m_q^{\tau_1'} = 0$ для некоторого $q \equiv 3 \pmod 5$. Кроме того, $m_p^{\tau_1'} = m_p^{\tau_1}$ для $p \neq 3, q$. Но тогда $\tau_1' > \tau_2'$, что противоречит условию a). Следовательно, $\Omega' = \Omega'(A)$, $\Omega'(A)$ сверхизолированное в $\Omega(A)$ и $A \in \mathcal{QD}_{\mathrm{cd}}(E^\star)$ по теореме 1.

Литература

[1] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2006.

[2] Любимцев О. В. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, № 4. — С. 1419—1422.

[3] Любимцев О. В. Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Изв. высш. учебн. завед. Матем. — 2017. — № 10. — С. 75—82.

[4] Пуусемп П. Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп // Изв. АН ЭстССР, Физ. Мат. — 1980. — Т. 29, № 3. — С. 246—253.

[5] Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 4. — С. 403—408.

[6] Себельдин А. М. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. — 1991. — С. 125—134.

[7] Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, № 8. — С. 153—167.

[8] Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 157—196.

[9] Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974.

[10] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion-free rings // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 61—98.

[11] Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 1. — P. 45—52.