Об обобщениях квазиизоморфизма на абелевых группах

В. М. МИСЯКОВ
Томский государственный университет
e-mail: mvm@mail.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, ie-изоморфизм, ei-изоморфизм.

Аннотация

Обобщаются понятия квазивложения, квазиравенства, квазиизоморфизма и исследуются их свойства.

Abstract

V. M. Misyakov, On generalizations of quasi-isomorphism on Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 131—138.

The notions of quasi-embedding, quasi-equality, and quasi-isomorphism are generalized and their properties are studied.

В [6] для исследования групп конечного ранга Дж. Рейд ввёл понятия «квазивложение», «квазиравенство» и «квазиизоморфизм». В [3, с. 179] они были распространены на группы без кручения произвольного ранга. Хотя эти понятия не сыграли существенной роли в решении структурной проблемы описания даже групп без кручения ранга два [4], но идеи, заложенные в них, являются достаточно интересными. Поэтому возникает вопрос: «Можно ли обобщить эти понятия, причём так, чтобы они были определены на произвольных абелевых группах?» В данной статье рассматриваются такие обобщения и исследуются некоторые их свойства. Также даётся описание абелевых групп, которые e-равны любой своей ненулевой подгруппе. В заключение показывается (предложения 7), что условие e-равенства групп оказывается полезным при выяснении изоморфизма этих групп.

Введём следующие обозначения: $o(a)$ — порядок элемента a; $\mathrm{E}(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G; $C\big(\mathrm{E}(G)\big)$ — центр кольца $\mathrm{E}(G)$; K^+ — аддитивная группа кольца K. Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми.

Определение 1. Будем говорить, что подгруппа A группы D является вполне характеристической относительно мономорфизмов из $C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, если для любого мономорфизма $\varphi \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$ следует, что $\varphi(A) \subseteq A$.

Определение 2. Пусть A и B — подгруппы группы D.

1. Будем говорить, что подгруппа A e_D-вложена (или просто е-вложена) в подгруппу B (обозначение: $A \overset{\mathrm{e}_D}{\prec} B$ или просто $A \overset{\mathrm{e}}{\prec} B$), если существует мономорфизм $\varphi \in C\bigl(\mathrm{E}(D)\bigr)$, такой что $\varphi(A) \subseteq B$.
2. Будем говорить, что подгруппа A e_D-равна (или просто е-равна) подгруппе B (обозначение $A \overset{\mathrm{e}_D}{\approx} B$ или просто $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B$), если $A \overset{\mathrm{e}}{\prec} B$ и $B \overset{\mathrm{e}}{\prec} A$.

Определение 3. Пусть $A, C_1, C_2, \ldots, C_k$ — подгруппы в группе D. Подгруппу A назовём e_D-прямой (или просто е-прямой) суммой подгрупп $C_1, C_2, \ldots, C_k$, если имеет место e_D-равенство $A \overset{\mathrm{e}_D}{\approx} C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k$. В этом случае будем говорить о e_D-прямом (или просто е-прямом) разложении подгруппы A, а подгруппы C_i называть e_D-прямыми (или просто е-прямыми) слагаемыми группы A. Подгруппу A, имеющую лишь тривиальные e_D-прямые разложения, будем называть сильно e_D-неразложимой (или просто сильно е-неразложимой).

Определение 4. Пусть A — подгруппа группы D, вполне характеристическая относительно мономорфизмов из $C\bigl(\mathrm{E}(D)\bigr)$. Будем говорить, что подгруппа A сохраняет центральные мономорфизмы группы D, если для любого мономорфизма $\alpha \in C\bigl(\mathrm{E}(D)\bigr)$ найдётся мономорфизм $\varphi \in C\bigl(\mathrm{E}(D/A)\bigr)$, такой что $\varphi(\bar{a}) = \alpha(a) + A$ для любого $\bar{a} \in D/A$.

Определение 5. Будем говорить, что группы A и B ie_D-изоморфны (или просто ie-изоморфны) ($A \overset{\mathrm{ie}_D}{\sim} B$ или просто $A \overset{\mathrm{ie}}{\sim} B$), если они изоморфны e_D-равным подгруппам некоторой группы D.

Замечание. Простая проверка показывает, что если $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B$, то $A \overset{\mathrm{ie}}{\sim} B$. Обратное не всегда верно.

Определение 6. Эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{E}(D)$ будем называть е-эндоморфизмом подгруппы A, если имеет место е-вложение $\varphi(A) \overset{\mathrm{e}}{\prec} A$. Множество всех е-эндоморфизмов подгруппы A группы D будем обозначать через $\hat{\mathrm{E}}_D(A)$ (или просто $\hat{\mathrm{E}}(A)$), если понятно, эндоморфизмы какой группы рассматриваются.

Пусть A — подгруппа группы D, вполне характеристическая относительно мономорфизмов из $C\bigl(\mathrm{E}(D)\bigr)$. Тогда $\hat{\mathrm{E}}(A)$ образует подкольцо в кольце $\mathrm{E}(D)$, которое будем называть кольцом е-эндоморфизмов подгруппы A.

Непосредственная проверка показывает, что кольцо $\hat{\mathrm{E}}(A)$ является двусторонней алгеброй над $C\bigl(\mathrm{E}(D)\bigr)$.

Предложение 1. *Для подгрупп A, B, C группы D справедливы следующие утверждения:*

1) *если A сохраняет центральные мономорфизмы группы D и $A \oplus B \overset{\mathrm{e}}{\approx} A \oplus C$, то $B \overset{\mathrm{ie}}{\sim} C$;*
2) *если X, B, C — подгруппы группы D, вполне характеристические относительно мономорфизмов из $C\bigl(\mathrm{E}(D)\bigr)$, причём $A \overset{\mathrm{e}}{\prec} B \oplus C$ и $B \overset{\mathrm{e}}{\prec} X \overset{\mathrm{e}}{\prec} A$, то $X \overset{\mathrm{e}}{\approx} B \oplus (X \cap C)$;*
3) *если A — подгруппа группы D, вполне характеристическая относительно мономорфизмов из $C\bigl(\mathrm{E}(D)\bigr)$, то для любого идемпотента $\varepsilon \in \hat{\mathrm{E}}(A)$*

имеет место e*-прямое разложение* $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} \varepsilon A \oplus (1-\varepsilon)A$. *Обратно, если* $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B \oplus C$ *и* $\mathrm{E}(B \oplus C)$ — *подкольцо в кольце* $\mathrm{E}(D)$, *то найдётся идемпотент* $\varepsilon \in \mathrm{E}(B \oplus C)$, *такой что* $\varepsilon \in \hat{\mathrm{E}}(A)$, $B \overset{\mathrm{e}}{\approx} \varepsilon A$ *и* $C \overset{\mathrm{e}}{\approx} (1-\varepsilon)A$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Так как $A \oplus B \overset{\mathrm{e}}{\approx} A \oplus C$, то существуют мономорфизмы $\alpha, \beta \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такие что $\alpha(A \oplus B) \subseteq A \oplus C$ и $\beta(A \oplus C) \subseteq A \oplus B$. Следовательно, найдутся мономорфизмы $\varphi, \psi \in C\big(\mathrm{E}(D/A)\big)$, такие что $\varphi(\bar{a}) = \alpha(a) + A$ и $\psi(\bar{a}) = \beta(a) + A$ для любого $\bar{a} \in D/A$. Тогда

$$\varphi\big((A \oplus B)/A\big) = \alpha(A \oplus B)/A \subseteq (A \oplus C)/A$$

и

$$\psi\big((A \oplus C)/A\big) = \beta(A \oplus C)/A \subseteq (A \oplus B)/A,$$

т. е. $(A \oplus B)/A \overset{\mathrm{e}}{\approx} (A \oplus C)/A$ и $B \overset{\mathrm{ie}}{\sim} C$.

Докажем утверждение 2). Так как $A \overset{\mathrm{e}}{\prec} B \oplus C$ и $B \overset{\mathrm{e}}{\prec} X \overset{\mathrm{e}}{\prec} A$, то существуют мономорфизмы $\alpha, \beta, \varphi \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такие что $\alpha(B) \subseteq X$, $\beta(X) \subseteq A$, $\varphi(A) \subseteq$ $\subseteq B \oplus C$. Тогда

$$\begin{aligned}(\alpha\varphi)\big(\beta(X)\big) = (\alpha\varphi)\big(\beta(X)\big) \cap X \subseteq \\ \subseteq \big(\alpha(B) \oplus \alpha(C)\big) \cap X = \alpha(B) \oplus (\alpha(C) \cap X) \subseteq B \oplus (C \cap X).\end{aligned}$$

В то же время

$$\alpha\big(B \oplus (C \cap X)\big) \subseteq \alpha(B) \oplus \alpha(C \cap X) \subseteq X.$$

Таким образом, $X \overset{\mathrm{e}}{\approx} B \oplus (X \cap C)$.

Докажем утверждение 3). Пусть $\varepsilon \in \hat{\mathrm{E}}(A)$. Тогда найдётся мономорфизм $\delta \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такой что $\delta\big(\varepsilon(A)\big) \subseteq A$. Тогда

$$\delta(\varepsilon(A) \oplus (1-\varepsilon)A) \subseteq \delta\big(\varepsilon(A)\big) \oplus \Big(\delta(A) - \delta\big(\varepsilon(A)\big)\Big) \subseteq A.$$

С другой стороны,

$$1_{\mathrm{E}(D)}(A) = \Big(\varepsilon + \big(1_{\mathrm{E}(D)} - \varepsilon\big)\Big)(A) \subseteq \varepsilon(A) \oplus (1_{\mathrm{E}(D)} - \varepsilon)(A).$$

Обратно. Пусть $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B \oplus C$. Тогда существуют $\alpha, \beta \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такие что $\alpha A \subseteq B \oplus C$ и $\beta(B \oplus C) \subseteq A$. Рассмотрим идемпотент $\varepsilon \in \mathrm{E}(B \oplus C)$, такой что $\varepsilon(B \oplus C) = B$ и $(1-\varepsilon)(B \oplus C) = C$. Учитывая, что $\mathrm{E}(B \oplus C)$ — подкольцо в кольце $\mathrm{E}(D)$, имеем $(\beta\alpha)(\varepsilon A) \subseteq A$, т. е. $\varepsilon \in \hat{\mathrm{E}}(A)$. Покажем, что $B \overset{\mathrm{e}}{\approx} \varepsilon A$. Действительно, так как $\beta B \subseteq \varepsilon\beta B \subseteq \varepsilon A$, то $B \overset{\mathrm{e}}{\prec} \varepsilon A$. С другой стороны, так как $(\beta\alpha)(\varepsilon A) \subseteq A$, то

$$(\alpha\beta\alpha)(\varepsilon A) \subseteq \varepsilon(\alpha\beta\alpha)(\varepsilon A) \subseteq \varepsilon\alpha A \subseteq \varepsilon(B \oplus C) = B,$$

т. е. $\varepsilon A \overset{\mathrm{e}}{\prec} B$. Таким образом, $B \overset{\mathrm{e}}{\approx} \varepsilon A$. Аналогично показывается, что $C \overset{\mathrm{e}}{\approx} (1-\varepsilon)A$. $\square$

Определение 7. Пусть A_1, B_1 — подгруппы в группе D. Будем говорить, что подгруппа A_1 ei_D-изоморфна (или просто ei-изоморфна) B_1 ($A_1 \overset{\mathrm{ei}_D}{\sim} B_1$ или просто $A_1 \overset{\mathrm{ei}}{\sim} B_1$), если существуют подгруппы A_2 и B_2 в группе D, такие что $A_1 \overset{\mathrm{e}_D}{\approx} A_2$, $B_1 \overset{\mathrm{e}_D}{\approx} B_2$ и $A_2 \cong B_2$, причём если $\mathrm{E}(A_1), \mathrm{E}(B_1) \subseteq \mathrm{E}(D)$, то $\mathrm{E}(A_2), \mathrm{E}(B_2) \subseteq \mathrm{E}(D)$.

Предложение 2. *Пусть A, B — подгруппы группы D, вполне характеристические относительно мономорфизмов из $C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, причём $\mathrm{E}(A), \mathrm{E}(B) \subseteq \mathrm{E}(D)$ и для каждого мономорфизма α из $C\big(\mathrm{E}(D)\big)$ справедливо $\alpha^l \in C\Big(\mathrm{E}\big(\mathrm{E}^+(D)\big)\Big)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B$, то*
   а) $\mathrm{E}^+(A) \overset{\mathrm{e}}{\approx} \mathrm{E}^+(B)$ *и* $\hat{\mathrm{E}}(A) = \hat{\mathrm{E}}(B)$;
   б) *если $A \cap B$ — вполне характеристическая подгруппа в группах A и B, то $C^+\big(\mathrm{E}(A)\big) \overset{\mathrm{e}}{\approx} C^+\big(\mathrm{E}(B)\big)$;*
2) *если $A \overset{\mathrm{ei}}{\sim} B$, то $\mathrm{E}^+(A) \overset{\mathrm{ei}}{\sim} \mathrm{E}^+(B)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B$. Тогда существуют мономорфизмы $\alpha, \beta \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такие что $\alpha(A) \subseteq B$ и $\beta(B) \subseteq A$. Тогда α^l, β^l являются мономорфизмами центра кольца $\mathrm{E}\big(\mathrm{E}^+(D)\big)$.

Докажем утверждение а). Покажем, что $(\alpha^l\beta^l)\,\mathrm{E}^+(A) \subseteq \mathrm{E}^+(B)$. Пусть $\delta \in \mathrm{E}(A)$. Тогда

$$(\alpha^l\beta^l)(\delta)(B) = \alpha(\beta\delta)(B) = \alpha\Big(\delta\big(\beta(B)\big)\Big) \subseteq B.$$

Аналогично показывается, что $(\alpha^l\beta^l)\,\mathrm{E}^+(B) \subseteq \mathrm{E}^+(A)$, т. е. $\mathrm{E}^+(A) \overset{\mathrm{e}}{\approx} \mathrm{E}^+(B)$.

Докажем, что $\hat{\mathrm{E}}(A) = \hat{\mathrm{E}}(B)$. Пусть $\varphi \in \hat{\mathrm{E}}(A)$. Покажем, что $\varphi(B) \overset{\mathrm{e}}{\prec} B$. Так как из предположения, что $\varphi \in \hat{\mathrm{E}}(A)$, следует существование мономорфизма $\tau \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такого что $\tau\big(\varphi(A)\big) \subseteq A$, то $\alpha\tau\beta \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$ и

$$(\alpha\tau\beta)\big(\varphi(B)\big) = (\alpha\tau\varphi)\big(\beta(B)\big) \subseteq \alpha\big((\tau\varphi)(A)\big) \subseteq \alpha(A) \subseteq B.$$

Аналогично показывается, что $\hat{\mathrm{E}}(B) \subseteq \hat{\mathrm{E}}(A)$.

Докажем утверждение б). Покажем, что $\alpha^l\beta^l C^+\big(\mathrm{E}(A)\big) \subseteq C^+\big(\mathrm{E}(B)\big)$. Пусть $\delta \in C^+\big(\mathrm{E}(A)\big)$. Тогда, как следует из а), $(\alpha^l\beta^l)(\delta) \in \mathrm{E}(B)$. Пусть $\varphi \in \mathrm{E}(B)$ и $b \in B$. Тогда

$$\Big(\big((\alpha^l\beta^l)(\delta)\big)\varphi\Big)(b) = (\alpha\beta\delta\varphi)(b) = (\alpha\delta\varphi)\big(\beta(b)\big) = \Big(\alpha\delta\big(\varphi|_{A\cap B}\big)\Big)\big(\beta(b)\big) =$$

$$= \big(\varphi|_{A\cap B}\alpha\delta\big)\big(\beta(b)\big) = (\varphi\alpha\delta)\big(\beta(b)\big) = (\varphi\alpha\beta\delta)(b) = \Big(\varphi\big((\alpha^l\beta^l)(\delta)\big)\Big)(b).$$

Аналогично показывается, что $\alpha^l\beta^l C^+\big(\mathrm{E}(B)\big) \subseteq C^+\big(\mathrm{E}(A)\big)$.

Докажем утверждение 2). Пусть $A \overset{\mathrm{ei}}{\sim} B$. Тогда существуют подгруппы A' и B' в группе D, такие что $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} A'$, $B \overset{\mathrm{e}}{\approx} B'$ и $A' \cong B'$. Следовательно, найдутся мономорфизмы $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такие что $\alpha A \subseteq A'$, $\alpha' A' \subseteq A$, $\beta B \subseteq B'$ и $\beta' B' \subseteq B$. Тогда $\gamma_1^l \, \mathrm{E}^+(A') \subseteq \mathrm{E}^+(A)$, $\gamma_2^l \, \mathrm{E}^+(A) \subseteq \mathrm{E}^+(A')$, $\delta_1^l \, \mathrm{E}^+(B') \subseteq \mathrm{E}^+(B)$ и $\delta_2^l \, \mathrm{E}^+(B) \subseteq \mathrm{E}^+(B')$, где $\gamma_1 = \alpha'\alpha$, $\gamma_2 = \alpha\alpha'$, $\delta_1 = \beta'\beta$ и $\delta_2 = \beta\beta'$. Покажем, например, что $\gamma_1^l \, \mathrm{E}^+(A') \subseteq \mathrm{E}^+(A)$. Действительно, возьмём произвольные элементы $\mu \in \mathrm{E}(A')$ и $a \in A$. Так как $\mathrm{E}(A) \subseteq \mathrm{E}(D)$, то из определения ei-изоморфизма следует, что $\mathrm{E}(A') \subseteq \mathrm{E}(D)$. Тогда имеем

$$(\gamma_1^l \mu)(a) = \big((\alpha'\alpha)\mu\big)(a) = (\alpha'\mu)\big(\alpha(a)\big) \in A.$$

Так как по условию $\gamma_1^l, \gamma_2^l, \delta_1^l, \delta_1^l \in C\Big(\mathrm{E}\big(\mathrm{E}^+(D)\big)\Big)$, то $\mathrm{E}^+(A) \overset{\mathrm{e}}{\approx} \mathrm{E}^+(A')$ и $\mathrm{E}^+(B) \overset{\mathrm{e}}{\approx} \mathrm{E}^+(B')$. Поскольку $A' \cong B'$, то $\mathrm{E}(A') \cong \mathrm{E}(B')$, и следовательно, $\mathrm{E}^+(A') \cong \mathrm{E}^+(B')$. Тогда $\mathrm{E}^+(A) \overset{\mathrm{ei}}{\sim} \mathrm{E}^+(B)$. $\square$

Предложение 3. *Пусть A, B — подгруппы группы D, вполне характеристические относительно мономорфизмов из $C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, причём $\mathrm{E}(A), \mathrm{E}(B) \subseteq \mathrm{E}(D)$. Если $B = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ и $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B$, то*

1) *существует полная ортогональная система идемпотентов ε_i, $i = \overline{1,k}$, кольца $\hat{\mathrm{E}}(A)$;*
2) *соответствие*

$$A \overset{\mathrm{e}}{\approx} \varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_k A \to \hat{\mathrm{E}}(A) = \hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus \hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_k$$

является взаимно-однозначным.

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_i \mid i = \overline{1,k}\}$ — полная ортогональная система идемпотентных эндоморфизмов группы B, соответствующая данному разложению [2, с. 25]. Поскольку ε_i, $i = \overline{1,k}$, — эндоморфизмы подгруппы B и B — вполне характеристическая подгруппа относительно мономорфизмов из $C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, то для любых $\alpha \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$ и $i = \overline{1,k}$ имеем $(\alpha\varepsilon_i)(B) \subseteq B$. Таким образом, $\varepsilon_i \in \hat{\mathrm{E}}(B)$, $i = \overline{1,k}$. По предложению 2 $\hat{\mathrm{E}}(A) = \hat{\mathrm{E}}(B)$, и поэтому ортогональная система идемпотентов $\varepsilon_i \in \hat{\mathrm{E}}(A)$, $i = \overline{1,k}$, индуцирует прямое разложение кольца $\hat{\mathrm{E}}(A)$ в сумму левых идеалов: $\hat{\mathrm{E}}(A) = \hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus \hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_k$. Так как $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B$, то существуют мономорфизмы $\alpha, \beta \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такие что $\alpha A \subseteq B$, $\beta B \subseteq A$. Тогда

$$(\beta\alpha)A \subseteq \beta B \subseteq \varepsilon_1(\beta B) \oplus \ldots \oplus \varepsilon_k(\beta B) \subseteq \varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_k A.$$

Также имеем

$$(\beta\alpha)(\varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_k A) = \beta\big(\varepsilon_1(\alpha A) \oplus \ldots \oplus \varepsilon_k(\alpha A)\big) \subseteq \beta(\varepsilon_1 B \oplus \ldots \oplus \varepsilon_k B) \subseteq \beta B \subseteq A.$$

Таким образом, $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} \varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_k A$.

Рассмотрим два множества: $T = \{\varepsilon_i A\}_{i=\overline{1,k}}$ и $L = \{\hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_i\}_{i=\overline{1,k}}$. Построим отображение $\phi\colon T \to L$, действующее по правилу $\phi(\varepsilon_i A) = \hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_i$ для любого $i = \overline{1,k}$.

Покажем, что ϕ — инъективное отображение. Действительно, пусть $\phi(\varepsilon_i A) = \phi(\varepsilon_j A)$. Тогда $\hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_i = \hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_j$. Если предположить, что $i \neq j$, то, умножая обе части последнего равенства на ε_i, имеем $\hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_i = \hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_j\varepsilon_i = 0$, что приводит к противоречию, поскольку каждое слагаемое $\hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon_i$ в разложении $\hat{\mathrm{E}}(A)$ ненулевое. Таким образом, $i = j$ и $\varepsilon_i A = \varepsilon_j A$. Очевидно, что отображение ϕ сюръективно. □

Пусть A — подгруппа группы D. Обозначим через

$$l(A) = \{\alpha \in \mathrm{E}(D) \mid \alpha(A) = 0\}$$

аннулятор группы A.

Предложение 4. *Пусть A — подгруппа группы D, вполне характеристическая относительно мономорфизмов из $C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, причём $\mathrm{E}(A) \subseteq E(D)$. Пусть ε — идемпотент кольца $\hat{\mathrm{E}}(A)$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

1) *группа εA сильно е-неразложима тогда и только тогда, когда $\hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon$ — неразложимый левый $\hat{\mathrm{E}}(A)$-модуль*;
2) *если $l(A) = 0$, то $\hat{\mathrm{E}}(\varepsilon A) \cong \varepsilon\hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon$.*

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из предыдущего предложения. Докажем утверждение 2). Для произвольного элемента $\varepsilon\alpha\varepsilon \in \varepsilon\hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon$ существует е-эндоморфизм $\varphi_{\varepsilon\alpha\varepsilon} \in \hat{\mathrm{E}}(\varepsilon A)$, такой что $\varphi_{\varepsilon\alpha\varepsilon}(\varepsilon a) = (\varepsilon\alpha\varepsilon)(\varepsilon a)$ для произвольного $\varepsilon a \in \varepsilon A$. Действительно, очевидно, что $\varphi_{\varepsilon\alpha\varepsilon}$ — гомоморфизм. Поскольку $\varepsilon\alpha\varepsilon \in \hat{\mathrm{E}}(A)$, то существует $\beta \in C\big(\mathrm{E}(D)\big)$, такой что $(\beta\varepsilon\alpha\varepsilon)A \subseteq A$. Тогда имеем

$$(\beta\varphi_{\varepsilon\alpha\varepsilon})(\varepsilon a) = (\beta\varepsilon\alpha\varepsilon)(\varepsilon a) = \varepsilon(\beta\varepsilon\alpha\varepsilon)(a) \in \varepsilon A,$$

т. е. $\varphi_{\varepsilon\alpha\varepsilon} \in \hat{\mathrm{E}}(\varepsilon A)$.

Построим отображение $\psi\colon \varepsilon\hat{\mathrm{E}}(A)\varepsilon \to \hat{\mathrm{E}}(\varepsilon A)$, действующее по правилу $\psi(\varepsilon\alpha\varepsilon) = \varphi_{\varepsilon\alpha\varepsilon}$. Простая проверка показывает, что ψ — сюръективный гомоморфизм. Пусть $\varepsilon\alpha\varepsilon \in \ker\psi$. Тогда $0 = \psi(\varepsilon\alpha\varepsilon) = \varphi_{\varepsilon\alpha\varepsilon}$, и для любого $\varepsilon a \in \varepsilon A$ имеем

$$0 = \varphi_{\varepsilon\alpha\varepsilon}(\varepsilon a) = (\varepsilon\alpha\varepsilon)(\varepsilon a) = (\varepsilon\alpha\varepsilon)(a).$$

Поскольку a — произвольный элемент группы A, то $\varepsilon\alpha\varepsilon \in l(A) = 0$, и следовательно, ψ — мономорфизм. Так как ε является единицей колец $\varepsilon\hat{\mathrm{E}}\varepsilon(A)$ и $\hat{\mathrm{E}}(\varepsilon A)$, причём $\psi(\varepsilon) = \varepsilon$, то ψ — изоморфизм. □

Далее описываются абелевы группы, для которых различные в общем случае понятия, такие, как е-равенство, ie-изоморфизм и ei-изоморфизм групп, совпадают.

Теорема 5. *Для ненулевой группы A следующие условия эквивалентны*:

1) *$A \overset{\mathrm{e}_A}{\approx} B$ для любой ненулевой подгруппы B из A*;
2) *$A \cong \mathbb{Z}$ или $A \cong \mathbb{Z}(p)$*;
3) *$A \overset{\mathrm{ie}_A}{\sim} B$ для любой ненулевой подгруппы B из A*;
4) *$A \overset{\mathrm{ei}_A}{\sim} B$ для любой ненулевой подгруппы B из A.*

Доказательство. Очевидно, что справедливы импликации $2) \Longrightarrow 1)$ и $2) \Longrightarrow 4)$. Докажем, что справедлива импликация $1) \Longrightarrow 2)$. Пусть группа A e-равна любой своей ненулевой подгруппе и в ней существует элемент $a \in A$, такой что $\circ(a) = \infty$. Рассмотрим подгруппу $\langle a\rangle$, порождённую элементом a. Тогда по условию существует мономорфизм $\alpha \in C\big(\mathrm{E}(A)\big)$, такой что $\alpha A \subseteq \langle a\rangle$. Следовательно, $A \cong \alpha A \cong n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, где $n \in \mathbb{N}$. Пусть для любого $a \in A$ справедливо $\circ(a) < \infty$. Тогда существуют элемент $b \in A$ и простое число p, такие что $\circ(b) = p$. Следовательно, $\alpha A \subseteq \langle b\rangle \cong \mathbb{Z}(p)$ для некоторого мономорфизма $\alpha \in C\big(\mathrm{E}(A)\big)$. Поэтому $A \cong \alpha A \cong \mathbb{Z}(p)$. Таким образом, A — циклическая группа простого порядка.

Импликацию $1) \Longrightarrow 3)$ получаем из замечания. Покажем, что справедлива импликация $3) \Longrightarrow 2)$. Пусть B — произвольная ненулевая подгруппа группы A, такая что $A \overset{\mathrm{ie}_A}{\sim} B$. Тогда в группе A найдутся подгруппы A_1 и B_1, такие что существуют изоморфизмы $\varphi\colon A \to A_1$ и $\psi\colon B \to B_1$, причём $A_1 \overset{\mathrm{e}_A}{\approx} B_1$. Последнее гарантирует существование мономорфизма $\alpha \in C\big(\mathrm{E}(A)\big)$, такого что $\alpha A_1 \subseteq B_1$. Тогда можно построить мономорфизм $\psi^{-1}\alpha\varphi\colon A \to B$. Таким образом, группу A мы вложили в любую её ненулевую подгруппу B. Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведённым при доказательстве импликации $1) \Longrightarrow 2)$, получаем, что $A \cong \mathbb{Z}$ или $A \cong \mathbb{Z}(p)$.

Покажем, что справедлива импликация $4) \Longrightarrow 2)$. Пусть $A \overset{\mathrm{ei}_A}{\sim} B$ для любой ненулевой подгруппы B из A. В частности, если существует $0 \neq a \in A$, такой что $\circ(a) = \infty$, то $A \overset{\mathrm{ei}_A}{\sim} \langle a\rangle \cong \mathbb{Z}$. Следовательно, в группе A найдутся подгруппы A_1, B_1, такие что $A \overset{\mathrm{e}_A}{\approx} A_1$, $\langle a\rangle \overset{\mathrm{e}_A}{\approx} B_1$ и $A_1 \cong B_1$. Тогда найдутся мономорфизмы $\alpha, \beta \in C\big(\mathrm{E}(A)\big)$, такие что $\alpha A \subseteq A_1$, $\beta B_1 \subseteq \langle a\rangle$. Следовательно, можно построить мономорфизм $\psi\beta\varphi\alpha\colon A \to \mathbb{Z}$, где $\varphi\colon A_1 \to B_1$ и $\psi\colon \langle a\rangle \to \mathbb{Z}$ — изоморфизмы групп. Таким образом, если группа A содержит элемент бесконечного порядка, то она изоморфна группе $\mathbb{Z}$.

Пусть в группе A порядок любого элемента конечен. Тогда группа A содержит элемент b порядка p, где p — некоторое простое число. По условию $A \overset{\mathrm{ei}}{\sim} \langle b\rangle$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведённым выше, и заменяя при этом группу $\mathbb{Z}$ на группу $\mathbb{Z}(p)$, получаем, что $A \cong \mathbb{Z}(p)$. $\square$

Для иллюстрации e-равенства напомним несколько определений и утверждений, введённых и доказанных в [1].

Пусть A — прямая сумма циклических групп. Группу A можно представить в виде $A = \bigoplus\limits_p A_p \oplus A_0$, где A_0 — свободная группа и всякая p-компонента A_p группы A представима в виде $A_p = \bigoplus\limits_{i\in N} A_{ip}$, причём каждая группа A_{ip} есть прямая сумма $\mathcal{M}_{ip}$ циклических групп порядка p^i.

Определение 8 [1]. Группа A называется ступенчатой, если для всякого простого числа p и для любого $i \in N$, такого что $\mathcal{M}_{ip} \geqslant \aleph_0$, выполняется $\mathcal{M}_{jp} > \mathcal{M}_{ip}$ для всякого $j < i$.

Определение 9 [5]. Две абелевы группы называются почти изоморфными, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы.

Определение 10 [1]. Группа A называется корректной, если для любой группы B из почти изоморфизма групп A и B следует их изоморфизм.

Теорема 6 [1]. *Пусть A — прямая сумма циклических групп. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — корректная группа;*
2) *A определяется своими подгруппами;*
3) *A — ступенчатая группа и любая её p-компонента ограниченная.*

Предложение 7. *Пусть A и B — группы, являющиеся прямыми суммами циклических групп и содержащиеся в группе D, причём A — ступенчатая группа и любая её p-компонента ограниченная. Если $A \overset{\mathrm{e}}{\approx} B$, то $A \cong B$.*

Доказательство следует из определения e-равенства и теоремы 6.

Литература

[1] Гриншпон С. Я., Мордовской А. К. Почти изоморфизм абелевых групп и их определяемость своими подгруппами // Фундам. и прикл. матем. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 21—36.

[2] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск: Томский гос. унив., 2002.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[4] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free groups of rank two. — Providence: Amer. Math. Soc., 1961. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 38).

[5] Jonson B. On direct decomposition of torsion free Abelian groups // Math. Scand. — 1959. — No. 2. — P. 361—371.

[6] Reid J. D. On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group // Topics in Abelian Groups. — Chicago, 1963. — P. 51—68.