# О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп

**В. М. МИСЯКОВ**
*Томский государственный университет*
e-mail: mvm@mail.tsu.ru

УДК 512.541

**Ключевые слова:** абелева группа, группа гомоморфизмов.

**Аннотация**

В статье найдены некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы гомоморфизмов абелевых групп.

**Abstract**

*V. M. Misyakov, On vanishing of the homomorphism group of Abelian groups*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 139—143.

Some necessary and sufficient conditions for vanishing of the homomorphism group of Abelian groups are established.

В [2] С. Я. Гриншпоном сформулирована проблема 2: «Выяснить, для каких групп $A$ группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, C)$ равна нулю, где $C$ — вполне разложимая группа без кручения». Для периодической абелевой группы $C$ эта задача была решена в [1]. Близкие вопросы рассматривались также в [3—6, 9—11]. В данной заметке даются некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы $\mathrm{Hom}(A, C)$ для произвольной группы без кручения $C$. В работе под словом «группа» понимается абелева группа. Все стандартные определения и обозначения можно найти в [7, 8].

Введём обозначения: $\mathrm{Hom}(A, C)$ — группа гомоморфизмов из группы $A$ в группу $C$; $\mathrm{im}(f)$ $(\ker(f))$ — образ (ядро) гомоморфизма $f$; $\langle c\rangle$ — циклическая группа, порождённая элементом $c$; $t(c)$ $(t(C))$ — тип элемента $c$ (группы $C$); $o(a)$ — порядок элемента $a$; $F_{\mathrm{m}}$ — свободная группа с m свободными образующими; $Z$ — группа целых чисел; $T(A)$ — периодическая часть группы $A$.

В следующей лемме описание группы $A$, для которой выполняется равенство $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, в случае когда $C$ — группа без кручения, сводится к случаю, когда $A$ — непериодическая, неделимая группа.

**Лемма 1.** *Пусть $C$ — ненулевая группа без кручения.* $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ *тогда и только тогда, когда группа $A$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) *$A$ — периодическая группа*;

2) *$A$ — непериодическая группа, $C$ — редуцированная группа, причём либо $A$ — делимая группа, либо* $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, *если $A$ — непериодическая, неделимая группа.*

**Доказательство.** Пусть $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$. Для группы $A$ возможны следующие случаи: 1) $A$ — периодическая группа и 2) $A$ — непериодическая группа. Если выполняется случай 1), то из [7, с. 213] следует обратное утверждение, т. е. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$.

Пусть выполняется 2), т. е. пусть $A$ — непериодическая группа. Допустим, что $C$ содержит делимую подгруппу $D$. Тогда $\mathrm{Hom}(\langle a\rangle, \langle d\rangle) \neq 0$, где $a \in A$, $o(a) = \infty$ и $d \in D$. Поскольку $D$ — делимая группа, то любой ненулевой гомоморфизм из $\langle a\rangle$ в $D$ будет продолжаться до ненулевого гомоморфизма из $A$ в $D$, что приводит к противоречию. Таким образом, $C$ — редуцированная группа.

Если $A$ делимая, то из [7, с. 213] следует обратное утверждение, т. е. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$. □

**Теорема 2.** *Пусть $C$ — редуцированная группа без кручения и $A$ — непериодическая, неделимая группа.* $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ *тогда и только тогда, когда для редуцированной части $A'$ группы $A$ выполняется следующее:*

a) *если $T(A') = 0$, то справедливо одно из условий:*
   - i) *$A'$ не содержит прямого слагаемого, изоморфного $\mathbb{Z}$, и для любого $f \in \mathrm{Hom}(A', C)$ существует $0 \neq c \in C$, такой что $\mathrm{im}(f) \subseteq \langle c\rangle$;*
   - j) *для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A', C)$*
     - $j_1$) *существует сервантная подгруппа $C'$ ранга 1 типа $t_1$ в группе $C$, содержащая $\mathrm{im}(\varphi)$;*
     - $j_2$) *для любого элемента $a \in A'$, такого что $t(a) < t_1$, справедливо $a \in \ker(\varphi)$;*
     - $j_3$) *группа $A'$ не содержит прямого слагаемого ранга 1, изоморфного $C'$;*

b) *если $T(A') \neq 0$, то фактор-группа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию* a).

**Доказательство.** Пусть $A = A' \oplus D$ — непериодическая, неделимая группа, где $A'$ — редуцированная и $D$ — делимая части группы $A$. Пусть $T(A') = 0$. Так как $\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(A', C) \oplus \mathrm{Hom}(D, C)$, как показано выше, $\mathrm{Hom}(D, C) = 0$. Тогда из $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ следует, что $\mathrm{Hom}(A', C) = 0$, группа $A'$ при этом не содержит прямого слагаемого, изоморфного $Z$, и справедливость условий i), $j_1$), $j_2$) также очевидна.

Пусть выполняется условие i). Допустим противное, т. е. пусть $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$. Поскольку $C$ — редуцированная группа, то $\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(A', C)$. Таким образом, существует $0 \neq f \in \mathrm{Hom}(A', C)$, т. е. найдётся элемент $0 \neq c \in C$, такой что $\mathrm{im}(f) \subseteq \langle c\rangle \cong Z$. Следовательно, $\mathrm{im}(f) \cong Z$. Так как $f$ будет расщепляться, то в группе $A'$ найдётся прямое слагаемое, изоморфное $Z$, что противоречит допущению.

Необходимость условия $j_3$) очевидно. Пусть выполняется условие j), и допустим противное, т. е. пусть $\mathrm{Hom}(A,C) \neq 0$. Поскольку $C$ — редуцированная группа, то $\mathrm{Hom}(A',C) \neq 0$. Следовательно, существуют $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(A',C)$ и $C'$ — сервантная подгруппа ранга 1 группы $C$, такие что $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq C'$. Так как при гомоморфизме типы элементов не уменьшаются, для любого элемента $d \in A'$, такого что $t(d) < t(C')$, имеем $d \in \ker(\varphi)$. Поэтому для любого элемента $a \in A'$, такого что $\varphi(a) \neq 0$, получаем $t\big(\varphi(a)\big) = t(C')$, т. е. $t\big(\mathrm{im}(\varphi)\big) = t(C')$. Так как $r\big(\mathrm{im}(\varphi)\big) = r(C') = 1$ и $t\big(\mathrm{im}(\varphi)\big) = t(C')$, то $\mathrm{im}(\varphi) \cong C'$. Следовательно, $A'/\ker(\varphi) \cong C'$ и все элементы $A' \setminus \ker(\varphi)$ имеют тип $t(C')$. Поскольку $\ker(\varphi)$ — сервантная подгруппа в группе $A'$, то $\ker(\varphi)$ — прямое слагаемое группы $A'$ [8, предложение 86.5], имеющее дополнительное прямое слагаемое, изоморфное $C'$, что противоречит допущению.

Докажем утверждение b). Пусть $T(A') \neq 0$ и $\mathrm{Hom}(A,C) = 0$. Тогда $\mathrm{Hom}(A',\ C) = 0$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow T(A') \xrightarrow{\alpha} A' \xrightarrow{\beta} A'/T(A') \longrightarrow 0,$$

индуцирующую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'/T(A'),C) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(A',C) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(T(A'),C). \tag{1}$$

Так как $\mathrm{Hom}(A',C) = 0$, то $\beta^*$ — изоморфизм и, следовательно,

$$\mathrm{Hom}(A'/T(A'),C) = 0,$$

т. е. группа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию a) данной теоремы.

Обратно. Пусть группа $A'/T(A')$ либо является непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию a) данной теоремы. Тогда

$$\mathrm{Hom}(A'/T(A'),C) = 0.$$

Поскольку $T(A')$ — периодическая группа, а $C$ — группа без кручения, то

$$\mathrm{Hom}(T(A'),C) = 0$$

и, как следует из точности последовательности (1), $\mathrm{Hom}(A',C) = 0$. Тогда из изоморфизма

$$\mathrm{Hom}(A,C) \cong \mathrm{Hom}(A',C) \oplus \mathrm{Hom}(D,C)$$

и равенства $\mathrm{Hom}(D,C) = 0$ следует, что $\mathrm{Hom}(A,C) = 0$. □

В следующем утверждении рассматривается равенство нулю группы $\mathrm{Hom}(A,C)$ для произвольных групп $A$ и $C$.

**Предложение 3.** *Пусть $A$ и $C$ — произвольные абелевы группы. $\mathrm{Hom}(A,C) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *группа $A$ не содержит прямого слагаемого, изоморфного $Z$;*

2) *для любого гомоморфизма* $\beta\colon A \to C$ *найдётся гомоморфизм* $\alpha\colon A \to F_{\mathrm{m}}$, *такой что* $\pi\alpha = \beta$, *т. е. диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F_{\mathrm{m}} \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd},$$

*где* $F_{\mathrm{m}}$ — *свободная группа и* $\pi$ — *эпиморфизм, коммутативна.*

**Доказательство.** Необходимость. Очевидно, что группа $A$ не может содержать прямого слагаемого, изоморфного $Z$. Пусть для определённости группа $C$ содержит систему образующих мощности $\mathrm{m}$. Тогда существует эпиморфизм $\pi\colon F_{\mathrm{m}} \to C$, [7, следствие 14.3], где $F_{\mathrm{m}} = \bigoplus\limits_{\mathrm{m}} Z$. Так как

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{\mathrm{m}} Z\Big) \subseteq \mathrm{Hom}\Big(A, \prod_{\mathrm{m}} Z\Big) \cong \prod_{\mathrm{m}} \mathrm{Hom}(A, Z)$$

и $\mathrm{Hom}(A, Z) = 0$ [9, теорема 3], то $\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus\limits_{\mathrm{m}} Z\Big) = 0$. Таким образом, диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F_{\mathrm{m}} \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd},$$

где $\alpha = \beta = 0$, коммутативна.

Обратно. Пусть $A$ не содержит прямого слагаемого, изоморфного $Z$, и диаграмма в условии теоремы коммутативна, т. е. $\pi\alpha = \beta$, где $F_{\mathrm{m}} = \bigoplus\limits_{\mathrm{m}} Z$. Тогда $\mathrm{Hom}(A, Z) = 0$ [9, теорема 3] и, следовательно,

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{\mathrm{m}} Z\Big) = 0,$$

т. е. $\alpha = 0$. Тогда $\beta = 0$. □

## Литература


[1] Гриншпон С. Я. О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1998. — № 9. — С. 42—46.

[2] Гриншпон С. Я. Проблема 2 // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума, 22—25 августа 2005 г. — Бийск: РИО БПГУ, 2005. — С. 60.

[3] Гриншпон С. Я., Ельцова Т. А. Гомоморфные образы абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 17—24.

[4] Крылов П. А., Подберезина Е. И. Группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ как артинов $\mathrm{E}(B)$- или $\mathrm{E}(A)$-модуль // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 81—96.

[5] Куликов Л. Я. Обобщённые примарные группы. II // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 85—167.

[6] Мишина А. П. Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1962. — № 4. — С. 39—43.

[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[8] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[9] Dimitrić R. On coslender groups // Glas. Matem. — 1986. — Vol. 21, no. 2. — P. 327—329.

[10] Dimitrić R., Goldsmith B. A note on coslender groups // Glas. Matem. Ser. III. — 1988. — Vol. 23, no. 2. — P. 241—246.

[11] Schultz P. Annihilator classes of torsion-free Abelian groups // Topics in Algebra. Proceedings, 18th Summer Research Institute of the Australian Mathematical Society, Australian National University Canberra, January 9 — February 17, 1978 / M. F. Newman, J. S. Richardson, eds. — Berlin: Springer, 1978. — (Lect. Notes Math.; Vol. 697). — P. 88—94.