Определяемость вполне разложимых абелевых групп без кручения полугруппами эндоморфизмов и группами гомоморфизмов

Т. А. ПУШКОВА
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: bta17@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: вполне разложимая абелева группа без кручения, группа гомоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов, определяемость абелевых групп.

Аннотация

Пусть C — абелева группа. Класс X абелевых групп назовём ${}_CE^\bullet H$-классом, если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизмов $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B)$ и $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \mathrm{Hom}(C, B)$ следует изоморфизм $A \cong B$. В статье исследуются условия, которым должна удовлетворять группа C, чтобы класс вполне разложимых почти делимых абелевых групп без кручения и класс вполне разложимых абелевых групп без кручения A, где $\Omega(A)$ содержит только несравнимые типы, были ${}_CE^\bullet H$-классами.

Abstract

T. A. Pushkova, Definability of completely decomposable torsion-free Abelian groups by semigroups of endomorphism and groups of homomorphisms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 145—152.

Let C be an Abelian group. A class X of Abelian groups is called a ${}_CE^\bullet H$-class if for any groups $A, B \in X$, it follows from the existence of isomorphisms $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B)$ and $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \mathrm{Hom}(C, B)$ that there is an isomorphism $A \cong B$. In this paper, conditions are studied under which the class $\Im_{\mathrm{cd}}^{\mathrm{ad}}$ of completely decomposable almost divisible Abelian groups and class $\Im_{\mathrm{cd}}^{*}$ of completely decomposable torsion-free Abelian groups A where $\Omega(A)$ contains only incomparable types are ${}_CE^\bullet H$-classes, where C is a completely decomposable torsion-free Abelian group.

Хорошо известный результат Р. Бэра [9] и И. Капланского [10] об определяемости периодических абелевых групп их кольцом эндоморфизмов в классе периодических групп положил начало многочисленным исследованиям в этом направлении. Класс X абелевых групп называется E-классом, если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизма $E(A) \cong E(B)$ следует изоморфизм $A \cong B$. Такой же вопрос, как для кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A, стоит для его мультипликативной полугруппы $E^\bullet(A)$, называемой полугруппой эндоморфизмов группы A. Проблему определяемости абелевых групп их мультипликативными полугруппами рассматривали П. Пуусемп [2] и А. М. Себельдин [6]. В связи с вышесказанным представляется естественным изучать вопросы определяемости абелевых групп их полугруппами эндоморфизмов вместе с дополнительным условием изоморфизма групп гомоморфизмов.

Пусть C — абелева группа. Класс X абелевых групп назовём ${}_CE^{\bullet}H$-классом, если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизмов $E^{\bullet}(A) \cong E^{\bullet}(B)$ и $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \mathrm{Hom}(C, B)$ следует изоморфизм $A \cong B$. В данной работе описаны необходимые и достаточные условия на вполне разложимую абелеву группу C без кручения, чтобы заданный класс абелевых групп без кручения был ${}_CE^{\bullet}H$-классом.

Введём следующие обозначения: Ω — множество различных типов абелевых групп без кручения ранга 1; $\tau(A)$ — тип абелевой группы A без кручения ранга 1; $\Omega(A)$ — множество различных типов прямых слагаемых ранга 1 абелевой группы A без кручения; Ω_0 — множество всех типов из Ω, характеристики которых не содержат символов ∞; $\Omega_0(A)$ — множество всех типов из $\Omega(A)$, характеристики которых не содержат символов ∞; $\aleph_0$ — наименьший бесконечный кардинал; $|M|$ — мощность множества M.

Множество Ω можно разбить следующим образом:

$$\Omega = \bar{\Omega} \cup \Omega^*, \quad \bar{\Omega} \cap \Omega^* = \varnothing,$$

где Ω^* — множество всех типов почти делимых групп без кручения ранга 1. Аналогично любую вполне разложимую абелеву группу без кручения A можно представить в виде $A = \bar{A} \oplus A^*$, где $\bar{A}$ не содержит почти делимых групп ранга 1.

Теорема 1. *Пусть C — вполне разложимая абелева группа без кручения. Класс $\Im_{\mathrm{cd}}^{\mathrm{ad}}$ вполне разложимых почти делимых абелевых групп без кручения является ${}_CE^{\bullet}H$-классом тогда и только тогда, когда группа C удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\Omega_0(C) \neq \varnothing$;
2) $\Omega_0(C) = \varnothing$ *и для любого почти делимого типа τ_0 найдётся тип $\tau' \in \Omega(C)$, такой что $\tau' \leqslant \tau_0$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть

$$A = \bigoplus_{\tau \in \Omega(A)} \bigoplus_{i \in I(\tau)} A_i = A_1 \oplus A_2,$$

$$B = \bigoplus_{\tau \in \Omega(B)} \bigoplus_{j \in J(\tau)} B_j = B_1 \oplus B_2,$$

где

$$A_1 = \bigoplus_{\tau \in \Omega_1(A)} A^{(\tau)}, \quad A_2 = \bigoplus_{\tau \in \Omega_2(A)} A^{(\tau)}, \quad A^{(\tau)} = \bigoplus_{i \in I(\tau)} A_i,$$

$$B_1 = \bigoplus_{\tau \in \Omega_1(B)} B^{(\tau)}, \quad B_2 = \bigoplus_{\tau \in \Omega_2(B)} B^{(\tau)}, \quad B^{(\tau)} = \bigoplus_{j \in J(\tau)} B_j$$

и

$$\Omega_1(A)=\{\tau\in\Omega(A)\colon |I(\tau)|=1\},\quad \Omega_2(A)=\{\tau\in\Omega(A\colon |I(\tau)|>1\},$$
$$\Omega_1(B)=\{\tau\in\Omega(B)\colon |J(\tau)|=1\},\quad \Omega_2(B)=\{\tau\in\Omega(B)\colon |J(\tau)|>1\}.$$

Поскольку $\mathrm{Hom}(C,A)\cong\mathrm{Hom}(C,B)$, учитывая [7, теорема 43.1; 11], получаем

$$\prod_{k\in K}\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(C_k,A_i)\cong\prod_{k\in K}\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Hom}(C_k,B_j).$$

Покажем, что $\Omega(A)=\Omega(B)$. Рассмотрим произвольный $\tau(A_i)\in\Omega(A)$.

1. Пусть группа C удовлетворяет первому условию теоремы, т. е. в разложении группы C найдётся группа C_k, такая что $\tau(C_k)\in\Omega_0(C)$. Тогда, учитывая, что группа A_i почти делимая, получаем

$$\tau\bigl(\mathrm{Hom}(C_t,A_i)\bigr)=\tau(A_i)-\tau(C_t)=\tau(A_i),$$

и значит, $\Omega(A)\subset\Omega\bigl(\mathrm{Hom}(C,A)\bigr)$.

2. Пусть группа C удовлетворяет второму условию теоремы, т. е. в разложении группы C найдётся группа C_t, такая что $\tau(C_t)\leqslant\tau(A_i)$. Тогда, учитывая, что группа A_i почти делимая, получаем

$$\tau\bigl(\mathrm{Hom}(C_k,A_i)\bigr)=\tau(A_i)-\tau(C_k)=\tau(A_i),$$

и значит, $\Omega(A)\subset\Omega\bigl(\mathrm{Hom}(C,A)\bigr)$.

С другой стороны, в силу того что группы A_i почти делимые, имеем, что $\mathrm{Hom}(C_k,A_i)\cong A_i$ или $\mathrm{Hom}(C_k,A_i)=0$. Значит, $\Omega\bigl(\mathrm{Hom}(C,A)\bigr)\subset\Omega(A)$. Следовательно, $\Omega\bigl(\mathrm{Hom}(C,A)\bigr)=\Omega(A)$. Аналогично $\Omega\bigl(\mathrm{Hom}(C,B)\bigr)=\Omega(B)$. Тогда из изоморфизма $\mathrm{Hom}(C,A)\cong\mathrm{Hom}(C,B)$ следует $\Omega(A)=\Omega(B)$. Тогда $A_1\cong B_1$.

Из $E^\bullet(A)\cong E^\bullet(B)$ следует, что $E^\bullet(A_1)\cong E^\bullet(B_1)$, $E^\bullet(A_2)\cong E^\bullet(B_2)$ [5, лемма 2.1]. Отсюда согласно [1,3] получаем, что $A_2\cong B_2$. Итак, $A\cong B$.

Необходимость. Пусть, от противного, $\Omega_0(C)=\varnothing$ и существует $\tau^*\in\Omega^*$, такой что для всех $\tau\in\Omega(C)$ выполняется $\tau^*\ngeqslant\tau$. Рассмотрим два различных почти делимых типа τ_1 и τ_2, для которых

$$|P_\infty(\tau_1)|=|P_\infty(\tau_2)|=|P_\infty(\tau^*)|-1\ \text{ и }\ P_\infty(\tau_1)\subset P_\infty(\tau^*),\quad P_\infty(\tau_2)\subset P_\infty(\tau^*).$$

Ясно, что для любого типа $\tau\in\Omega(C)$ $\tau_1\ngeqslant\tau$ и $\tau_2\ngeqslant\tau$. Тогда существуют две неизоморфные группы ранга 1 A, B из $\Im^{\mathrm{ad}}_{\mathrm{cd}}$, типы которых соответственно равны τ_1 и τ_2. С другой стороны, $E^\bullet(A)\cong E^\bullet(B)$ и $\mathrm{Hom}(C,A)=\mathrm{Hom}(C,B)=0$. Следовательно, $\Im^{\mathrm{ad}}_{\mathrm{cd}}$ не является ${}_CE^\bullet H$-классом. Противоречие. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть C — вполне разложимая абелева группа без кручения. Класс $\Im^*_{\mathrm{cd}}$ вполне разложимых абелевых групп без кручения A, где $\Omega(A)$ содержит только несравнимые типы, является ${}_CE^\bullet H$-классом тогда и только тогда, когда группа C удовлетворяет условию:*

> *для любого типа $\tau_0\in\bar\Omega$ в разложении группы $\bar C$ найдётся непустое конечное множество групп ранга 1 идемпотентных типов, меньших типа τ_0.*

Доказательство. Достаточность. Пусть

$$A = \bigoplus_{\tau\in\Omega(A)} \bigoplus_{i\in I(\tau)} A_i = A_1 \oplus A_2,$$

$$B = \bigoplus_{\tau\in\Omega(B)} \bigoplus_{j\in J(\tau)} B_j = B_1 \oplus B_2,$$

где

$$A_1 = \bigoplus_{\tau\in\Omega_1(A)} A^{(\tau)}, \quad A_2 = \bigoplus_{\tau\in\Omega_2(A)} A^{(\tau)}, \quad A^{(\tau)} = \bigoplus_{i\in I(\tau)} A_i,$$

$$B_1 = \bigoplus_{\tau\in\Omega_1(B)} B^{(\tau)}, \quad B_2 = \bigoplus_{\tau\in\Omega_2(B)} B^{(\tau)}, \quad B^{(\tau)} = \bigoplus_{j\in J(\tau)} B_j$$

и

$$\Omega_1(A) = \{\tau \in \Omega(A)\colon |I(\tau)| = 1\}, \quad \Omega_2(A) = \{\tau \in \Omega(A)\colon |I(\tau)| > 1\},$$

$$\Omega_1(B) = \{\tau \in \Omega(B)\colon |J(\tau)| = 1\}, \quad \Omega_2(B) = \{\tau \in \Omega(B)\colon |J(\tau)| > 1\}.$$

Поскольку $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \mathrm{Hom}(C, B)$, учитывая [7, теорема 43.1; 11], получаем

$$\prod_{k\in K} \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(C_k, A_i) \cong \prod_{k\in K} \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Hom}(C_k, B_j). \tag{$*$}$$

Покажем, что $\Omega(A) = \Omega(B)$. Из условия теоремы следует, что для любой группы A_i из разложения группы A в разложении группы $\bar{C}$ найдётся группа C_k идемпотентного типа $\tau(C_k) \leqslant \tau(A_i)$. Тогда $\mathrm{Hom}(C_k, A_i) \cong\ \cong A_i$. Отсюда, учитывая [8] и $(*)$, получаем, что для любой группы A_i из A найдётся группа $\mathrm{Hom}(C_t, B_j)$ из $\mathrm{Hom}(C, B)$, такая что $A_i \cong \mathrm{Hom}(C_t, B_j)$. Отсюда по [4, следствие 1] следует, что $\tau(B_j) \geqslant \tau(A_i)$. Аналогично для группы B_j найдётся группа $\mathrm{Hom}(C_k, A_l)$ из $\mathrm{Hom}(C, A)$, такая что $B_j \cong \mathrm{Hom}(C_k, A_l)$. Тогда $\tau(B_j) \leqslant \tau(A_l)$. Далее, $\tau(A_i) \leqslant \tau(B_j) \leqslant \tau(A_l)$. Так как все типы из $\Omega(A)$ несравнимы, то $A_i \cong B_j$. Отсюда следует, что $\Omega(A) \subset \Omega(B)$.

Аналогично для любой группы B_j из B найдётся группа A_i из A, такая что $B_j \cong A_i$. Следовательно, $\Omega(A) = \Omega(B)$. Тогда $A_1 \cong B_1$.

Представим группы A_2 и B_2 в виде $A_2 = \bar{A}_2 \oplus A_2^*$, $B_2 = \bar{B}_2 \oplus B_2^*$.

Из $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B)$ следует, что $E^\bullet(A_2^*) \cong E^\bullet(B_2^*)$, $E^\bullet(\bar{A}_2) \cong E^\bullet(\bar{B}_2)$ [5]. Отсюда согласно [1,3] получаем, что $A_2 \cong B_2$ и $E(\bar{A}_2) \cong E(\bar{B}_2)$.

Предположим, что $\bar{A}_2 \ncong \bar{B}_2$, т. е. найдётся тип $\tau_1 \in \Omega(A) = \Omega(B)$, такой что $|I(\tau_1)| \neq |J(\tau_1)|$. По условию теоремы в разложении группы $\bar{C}$ найдётся лишь конечное множество мощности m групп C_t ранга 1 идемпотентных типов, таких что $\tau(C_t) \leqslant \tau_1$. Тогда в $\mathrm{Hom}(C, A)$ мощность множества групп ранга 1 типа τ_1 равна $m|I(\tau_1)|$, а в $\mathrm{Hom}(C, B) - m|J(\tau_1)|$. Поскольку $|I(\tau_1)| \neq |J(\tau_1)|$, то $m|I(\tau_1)| \neq m|J(\tau_1)|$, т. е. мощности множеств прямых слагаемых ранга 1 типа τ_1 в $\mathrm{Hom}(C, A)$ и $\mathrm{Hom}(C, B)$ различны. Значит, $\mathrm{Hom}(C, \bar{A}) \ncong \mathrm{Hom}(C, \bar{B})$. Противоречие. Следовательно, $\bar{A}_2 \cong \bar{B}_2$. Отсюда следует, что $A \cong B$.

Необходимость. Пусть группа C не удовлетворяет условию теоремы. Тогда возможны два случая:

1) существует такой не почти делимый тип τ, что в разложении группы $\bar{C}$ нет слагаемого идемпотентного типа, меньшего типа τ;
2) существует такой тип $\bar{\tau} \in \bar{\Omega}$, что в разложении группы $\bar{C}$ найдётся бесконечное множество групп ранга 1, типы которых идемпотентны и меньше типа $\bar{\tau}$.

Рассмотрим первый случай. Очевидно, что $\tau(Z) \notin \Omega(C)$. Положим

$$\Omega_{(01)} = \{\tau \in \Omega_0 \colon \tau \ni (\ldots, h_p^\tau, \ldots),\ (0,0,0,\ldots) < (\ldots, h_p^\tau, \ldots) < (1,1,1,\ldots)\},$$
$$\Omega_{(01)}(C) = \Omega_0(C) \cap \Omega_{(01)}.$$

Заметим, что $\Omega_{(01)}(C) \neq \varnothing$. Действительно, пусть $\Omega_{(01)}(C) = \varnothing$. Возьмём любые два несравнимых типа $\tau_1, \tau_2 \in \Omega_{(01)}$. Рассмотрим абелевы группы без кручения ранга 1 A и B, для которых $\tau(A) = \tau_1$, $\tau(B) = \tau_2$. Тогда $E(A) \cong E(B)$, $\mathrm{Hom}(C, A) = \mathrm{Hom}(C, B) = 0$, но $A \ncong B$. Значит, $\Omega_{(01)}(C) \neq \varnothing$.

Тогда возможны два подслучая.

а) $\Omega_{(01)}(C)$ содержит минимальные типы.

Пусть τ_0 — минимальный тип в $\Omega_{(01)}(C)$. Возьмём два несравнимых типа τ_1 и τ_2, таких что $\tau_1, \tau_2 < \tau_0$. Рассмотрим группы без кручения ранга 1 A и B, для которых $\tau(A) = \tau_1$, $\tau(B) = \tau_2$. Очевидно, что $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B)$ и $\mathrm{Hom}(C, A) = \mathrm{Hom}(C, B) = 0$, но $A \ncong B$. Противоречие.

б) $\Omega_{(01)}(C)$ не содержит минимальных типов, т. е. для любого типа $\tau \in \Omega_{(01)}$ найдётся тип $\tau' \in \Omega_{(01)}(C)$, такой что $\tau' \neq \tau(\mathbf{Z})$ и $\tau' < \tau$.

Возьмём произвольный тип $\tau_0 \in \Omega_{(01)}(C)$. Рассмотрим множество $\Omega_{(01)}(\tau_0)$ всех несравнимых типов, содержащее тип τ_0. Пусть $\tau^* \in \Omega_{(01)}(\tau_0)$, $\tau^* \neq \tau_0$. Рассмотрим группы

$$A = \bigoplus_{\tau \in \Omega_{(01)}(\tau_0)} \bigoplus_{r(C)} \mathbf{Q}(\tau), \quad B = \bigoplus_{\tau \in \Omega_{(01)}(\tau_0),\ \tau \neq \tau^*} \bigoplus_{r(C)} \mathbf{Q}(\tau),$$

где $\mathbf{Q}(\tau)$ — рациональная группа типа τ. Очевидно, что $E(A) \cong E(B)$. Покажем, что

$$\Omega\Big(\mathrm{Hom}\big(C, \mathbf{Q}(\tau^*)\big)\Big) \subset \Omega\big(\mathrm{Hom}(C, B)\big).$$

Возьмём

$$\tau' \in \Omega\Big(\mathrm{Hom}\big(C, \mathbf{Q}(\tau^*)\big)\Big).$$

Тогда $\tau' = \tau^* - \tau(C_0)$, где $\tau(C_0) \in \Omega_{(01)}(C)$. Пусть $\tau^* \ni (\ldots, \alpha_p^*, \ldots)$, $\tau(C_0) \ni (\ldots, \gamma_p, \ldots)$, $\tau' \ni (\ldots, \alpha_p^* - \gamma_p, \ldots)$. Положим для типа τ, содержащего характеристику $(\ldots, h_p, \ldots)$,

$$P_0(\tau) = \{p \in P \colon h_p = 0\}, \quad P_1(\tau) = \{p \in P \colon h_p = 1\}.$$

Рассмотрим тип τ_1, такой что $P_1(\tau_1) = P_0(\tau^*)$, $P_0(\tau_1) = P_1(\tau^*)$. По предположению в $\Omega_{(01)}(C)$ найдётся тип τ_1^C, такой что $\tau_1^C \neq \tau(\mathbf{Z})$ и $\tau_1^C < \tau_1$. Тогда $P_1(\tau_1^C) \subset P_1(\tau_1)$, причём $|P_1(\tau_1) \setminus P_1(\tau_1^C)| = \aleph_0$ и $|P_1(\tau_1^C)| = \aleph_0$. Построим тип

$\tau_2 \in \Omega_{(01)}$ так, чтобы $P_1(\tau_2) = P_1(\tau_1^C) \cup P_1(\tau')$. Заметим, что τ_2 не сравним с τ^*, значит, $\tau_2 \in \Omega(B)$. Тогда $\tau' \in \Omega\big(\mathrm{Hom}(C, B)\big)$, поскольку $\tau_2 - \tau_1^C = \tau'$. Таким образом,

$$\Omega\Big(\mathrm{Hom}\big(C, \mathbf{Q}(\tau^*)\big)\Big) \subset \Omega\big(\mathrm{Hom}(C, B)\big).$$

Возьмём $\tau \in \Omega\big(\mathrm{Hom}(C, A)\big)$. Пусть $|T^A(\tau)|$, $|T^B(\tau)|$ — мощности множеств прямых слагаемых ранга 1 типа τ соответственно в $\mathrm{Hom}(C, A)$ и в $\mathrm{Hom}(C, B)$. Тогда

$$|T^A(\tau)| = r(C) m^B(\tau), \quad |T^B(\tau)| = r(C)\big(m^B(\tau) + m(\tau^*)\big),$$

где $m^B(\tau)$ — мощность множества прямых слагаемых C_k ранга 1 группы C, для которых в $\Omega(\tau_0)$ найдутся типы $\tau_k \neq \tau^*$, такие что $\tau_k - \tau(C_k) = \tau$; $m(\tau^*)$ — мощность такого множества прямых слагаемых C_r ранга 1 группы C, что $\tau^* - \tau(C_r) = \tau$. Поскольку $\Omega_{(01)}(C)$ не содержит минимальных типов, то $r(C) \geqslant \aleph_0$, а значит, $|T^A(\tau)| = |T^B(\tau)|$. Следовательно, $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \cong \mathrm{Hom}(C, B)$, $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B)$, но $A \not\cong B$. Противоречие.

Рассмотрим второй случай. Существует такой тип $\bar\tau \in \bar\Omega$, что в разложении группы $\bar C$ найдётся бесконечное множество мощности α групп ранга 1, типы которых идемпотентны относительно типа $\bar\tau$.

Рассмотрим множество

$$\tilde\Omega(\bar C) = \{\tau \in \Omega(\bar C) \colon P_\infty(\tau) \subset P_\infty(\bar\tau) \text{ и } \tau \text{ не идемпотентный относительно типа } \bar\tau\}.$$

Возможны следующие подслучаи.

1) $\tilde\Omega(\bar C) = \varnothing$.

В Ω найдутся два несравнимых типа $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$, такие что $P_\infty\big(\tau^{(1)}\big) = = P_\infty\big(\tau^{(2)}\big) = P_\infty(\bar\tau)$. Положим $A = A_1 \oplus A_1 \oplus A_2$, $B = A_1 \oplus A_2 \oplus A_2$, где $\tau(A_1) = \tau^{(1)}$, $\tau(A_2) = \tau^{(2)}$. Рассмотрим $\mathrm{Hom}(C, A)$ и $\mathrm{Hom}(C, B)$. Имеем

$$\mathrm{Hom}(C, A) = \mathrm{Hom}(C, A_1) \oplus \mathrm{Hom}(C, A_1) \oplus \mathrm{Hom}(C, A_2) \cong \cong \prod_\alpha A_1 \oplus \prod_\alpha A_1 \oplus \prod_\alpha A_2 \cong \prod_\alpha A_1 \oplus \prod_\alpha A_2.$$

Аналогично

$$\mathrm{Hom}(C, B) \cong \prod_\alpha A_1 \oplus \prod_\alpha A_2.$$

Таким образом, $A \not\cong B$, но $E(A) \cong E(B)$, $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \mathrm{Hom}(C, B)$. Противоречие.

2) $\tilde\Omega(\bar C) \neq \varnothing$.

Каждому типу $\tau \in \tilde\Omega$, содержащему характеристику $(\ldots, \alpha_p, \ldots)$, поставим в соответствие тип τ^0, содержащий характеристику $(\ldots, \alpha_p^0, \ldots)$, где $\alpha_p^0 = 0$, если $p \in P_\infty(\bar\tau)$, $\alpha_p^0 = \alpha_p$ в остальных случаях. Множество всех таких типов τ^0 образует $\tilde\Omega_0$.

Возможны следующие два варианта.

а) $\tilde{\Omega}_0$ содержит минимальные типы. Пусть τ_0 — один из минимальных типов в $\tilde{\Omega}_0$. Возьмём два несравнимых типа $\tau_0^{(1)}, \tau_0^{(2)} < \tau_0$, где $\tau_0^{(1)} \ni \big(\ldots, h_p^{(1)}, \ldots\big)$ и $\tau_0^{(2)} \ni \big(\ldots, h_p^{(2)}, \ldots\big)$. Рассмотрим типы τ_1 и τ_2, содержащие характеристики соответственно $\big(\ldots, \alpha_p^{(1)}, \ldots\big)$ и $\big(\ldots, \alpha_p^{(2)}, \ldots\big)$, где $\alpha_p^{(1)} = \alpha_p^{(2)} = \infty$, если $p \in P_\infty(\bar{\tau})$ и $\alpha_p^{(1)} = h_p^{(1)}$, $\alpha_p^{(2)} = h_p^{(2)}$ в остальных случаях. Положим

$$A = A_1 \oplus A_1 \oplus A_2, \quad B = A_1 \oplus A_1 \oplus A_2,$$

где $\tau(A_1) = \tau_1$, $\tau(A_2) = \tau_2$. Далее, как и в случае 1), получим противоречие.

б) $\tilde{\Omega}_0$ не содержит минимальных типов.

Возьмём любой тип τ^*, такой что $P_\infty(\tau^*) = P_\infty(\bar{\tau})$, $P_1(\tau^*) \cup P_0(\tau^*) = P \setminus P_\infty(\tau^*)$ и $|P_1(\tau^*)| = |P_0(\tau^*)| = \aleph_0$. Положим

$$\Omega(\tau^*) = \{\tau \in \Omega \colon P_\infty(\tau) = P_\infty(\tau^*),\ \tau \text{ не сравним с } \tau^*,$$
$$\tau \ni (\ldots, \beta_p, \ldots), \text{ где } \beta_p = 0 \text{ или } \beta_p = 1 \text{ для всех } p \notin P_\infty(\tau)\}.$$

Рассмотрим группы

$$A = \bigoplus_{\tau \in \Omega(\tau^*)} \mathbf{Q}(\tau), \quad B = A \oplus \mathbf{Q}(\tau^*).$$

Доказательство того, что $\Omega\big(\mathrm{Hom}(C, A)\big) = \Omega\big(\mathrm{Hom}(C, B)\big)$ аналогично случаю 1 б). Докажем, что для любого τ из $\Omega\big(\mathrm{Hom}(C, A)\big)$ имеет место равенство $|T^A(\tau)| = |T^B(\tau)|$. Пусть $\tau \in \Omega(\tau^*)$. Тогда $\tau \in \Omega\big(\mathrm{Hom}(C, A)\big)$ и $|T^A(\tau)| = |T^B(\tau)| = \alpha$. Если $\tau \in \Omega\big(\mathrm{Hom}(C, A)\big) \setminus \Omega(\tau^*)$, т. е. $\tau = \tau_0 - \tau(C_k)$, где $\tau_0 \in \Omega(\tau^*)$, $\tau(C_k) \in \Omega(C)$. Как было показано выше (случай 1 б)), в $\Omega(\tau^*)$ существует бесконечное множество типов τ_i, для которых в $\tilde{\Omega}_0$ найдутся типы τ_k, такие что $\tau_i - \tau_k = \tau$. Таким образом, $|T^A(\tau)| = |T^B(\tau)| \geqslant \aleph_0$. Значит, $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \mathrm{Hom}(C, B)$, $E(A) \cong E(B)$, но $A \not\cong B$. Противоречие. Теорема доказана. □

Литература

[1] Любимцев О. В. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1419—1422.

[2] Пуусемп П. Об определяемости периодических абелевых групп своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат. — 1980. — Т. 29, № 3. — С. 246—253.

[3] Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 4. — С. 403—408.

[4] Себельдин А. М. Группы гомоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1973. — № 7. — С. 77—84.

[5] Себельдин А. М. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. — 1991. — № 10. — С. 125—133.

[6] Себельдин А. М. Определяемость векторных групп полугруппами эндоморфизмов // Алгебра и логика. — 1994. — Т. 33, № 4. — С. 422—428.

[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[8] Baer R. Types of elements and characteristic subgroups of Abelian groups // Proc. London Math. Soc. — 1935. — Vol. 39. — P. 481—514.

[9] Baer R. Automorphism rings of primary Abelian operator groups // Ann. Math. — 1943. — Vol. 44. — P. 192—227.

[10] Kaplansky I. Some results on Abelian groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1952. — Vol. 38. — P. 538—540.

[11] Sebeldin A. M. Isomorphisme naturel des groupes des homomorphismes des groupes abeliens // Ann. L'IPGANG, Conakry. Ser. A. — 1982. — Vol. 7. — P. 155—158.