Смешанные идемпотентные абелевы группы

А. Г. ТИСОВСКИЙ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: ag.tisovsky@gmail.com

УДК 512.541+512.553

Ключевые слова: абелевы группы, идемпотентные группы, sp-группы, умножение на группе.

Аннотация

Абелева группа называется идемпотентной, если любой её элемент является идемпотентом при некотором умножении. В статье получены полное описание идемпотентных групп без кручения и периодических идемпотентных групп, а также частичное описание смешанных идемпотентных групп.

Abstract

A. G. Tisovsky, Mixed idempotent Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 153—157.

An Abelian group is called idempotent if any element is idempotent for some multiplication. This paper contains a complete description of torsion-free idempotent groups and periodic idempotent groups. We also give a description of mixed idempotent groups.

Исследование проблемы взаимосвязи кольцевых структур и их аддитивных групп было начато Р. Бьюмонтом в 1957 году [5]. Примерно в это же время была опубликована работа Т. Селе [6], в которой исследовались абелевы группы, допускающие только нулевые умножения. Далее исследование взаимосвязей аддитивных и мультипликативных структур было продолжено такими учеными, как Р. Пирс, Л. Фукс, У. Уиклесс и др. Целиком этому вопросу посвящена 17 глава монографии Л. Фукса [3] и несколько параграфов монографии Д. Арнольда [4]. В данной статье продолжается изучение взаимосвязи кольцевых структур и их аддитивных групп.

Под группой в работе понимается абелева группа, записанная аддитивно; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ — обозначения колец целых, рациональных чисел соответственно или их аддитивных групп, $\mathbb{Z}_m$ — кольцо классов вычетов по модулю m, P — множество всех простых чисел. Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать соответственно периодическую и p-примарную часть группы A. Остальные обозначения стандартны и соответствуют [3].

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 153—157.

Определение 1. Отображение $\mu\colon A \times A \to A$ называется *умножением* на группе A, если для всех элементов $a, b, c \in A$ выполняются равенства

$$\mu(a, b+c) = \mu(a, b) + \mu(a, c),$$
$$\mu(b+c, a) = \mu(b, a) + \mu(c, a).$$

В дальнейшем для удобства результат действия умножения $*(a, b)$ будем обозначать $a * b$.

Определение 2. Группа A называется *идемпотентной*, если для любого элемента $a \in A$ существует умножение $*_a \in \operatorname{Mult} A$, такое что $a *_a a = a$.

Пример. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{Z}_p$ поля классов вычетов по модулю p. Возьмём в ней произвольный элемент $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$. Зададим умножение $*_a \in \mathrm{Mult} A$ следующим образом: $x *_a y = a^{-1}xy$. Тогда $a *_a a = a^{-1}aa = a$, т. е. $\mathbb{Z}_p$ — идемпотентная группа.

Рассмотренный пример можно обобщить следующим образом.

Предложение 1. *Аддитивная группа любого тела является идемпотентной группой.*

Доказательство. Если $A(+, \cdot)$ — тело, то для каждого ненулевого элемента существует обратный элемент по умножению. Тогда можно задать для любого $a \in A$ умножение, при котором элемент a будет идемпотентным. Предположим, что $*_a \in \operatorname{Mult} A$ — умножение для элемента a, которое определяется следующим образом:

$$x *_a y = a^{-1}xy.$$

Проверим, является ли заданная нами операция $*_a$ умножением. Для этого рассмотрим левую и правую дистрибутивность: для любых $x, y, z \in A$

$$x *_a (y+z) = a^{-1}x(y+z) = a^{-1}xy + a^{-1}xz = x *_a y + x *_a z.$$

Правая дистрибутивность проверяется аналогично. Следовательно, $*_a$ является умножением и

$$a *_a a = a^{-1}a \cdot a = (a^{-1}a) \cdot a = 1 \cdot a = a,$$

т. е. a — идемпотентный элемент относительно умножения $*_a$. □

Рассмотрим простейшие свойства идемпотентных групп.

Предложение 2.

1. *Прямая сумма и прямое произведение идемпотентных групп является идемпотентной группой.*
2. *Если B — вполне характеристическая подгруппа идемпотентной группы A, то B тоже идемпотентная группа.*
3. *Если B — вполне характеристическая подгруппа идемпотентной группы A, то A/B — идемпотентная группа.*

Доказательство. Докажем утверждение 1 для прямых произведений. Пусть $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$, где A_i — идемпотентная группа для любого $i \in I$. Так как группа A раскладывается в прямое произведение, то для любого $a \in A$ верно разложение

$$a = (a_i)_{i \in I},$$

где $a_i \in A_i$ для каждого $i \in I$. Построим отображение $*_a \colon A \times A \to A$, такое что

$$x *_a y = (x_i *_i y_i)_{i \in I},$$

где $a_i *_i a_i = a_i$ ($a_i \in A_i$ и $*_i \in \operatorname{Mult} A_i$) при $i \in I$. Тогда

$$a *_a a = (a_i *_i a_i)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} = a,$$

т. е. $a *_a a = a$.

Несложно проверяется, что $*_a$ является умножением.

Докажем утверждение 2. Возьмём умножение $\mu \in \operatorname{Mult} A$ и произвольный элемент $a \in A$. Определим эндоморфизм λ_a группы A, который действует по закону $\lambda_a(x) = \mu(a, x)$ для любого $x \in A$. Пусть $x, y \in B$. Тогда $\mu(x, y) = \lambda_x(y) \in B$ в силу вполне характеристичности подгруппы B. Таким образом, всякое умножение на группе A индуцирует умножение на группе B. А так как A — идемпотентная группа, то B тоже идемпотентная группа.

Докажем утверждение 3. Пусть $\bar{a} = a + B$ — произвольный элемент фактор-группы A/B. Тогда найдётся такое умножение $*_a \in \operatorname{Mult} A$, что $a *_a a = a$. Зададим умножение $*_{\bar{a}} \in \operatorname{Mult} A/B$ следующим образом:

$$(x + B) *_{\bar{a}} (y + B) = x *_{\bar{a}} y + B.$$

Тогда

$$(a + B) *_{\bar{a}} (a + B) = a *_{\bar{a}} a + B = a + B,$$

а значит, A/B — идемпотентная группа. □

Предложение 3. *Пусть группа A идемпотентная. Тогда её делимая часть является группой без кручения, а p-примарная часть — элементарной группой.*

Доказательство. Пусть A — идемпотентная группа и $A = D \oplus C$, где D — делимая группа. Докажем, что D — делимая группа без кручения. Любая делимая группа раскладывается в прямую сумму

$$D = \bigoplus_{r_0(A)} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in P} \Bigg[\bigoplus_{r_p(A)} \mathbb{Z}_{p^\infty} \Bigg].$$

Но $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — нуль-группа, следовательно, никакой её ненулевой элемент не является идемпотентным при любом умножении. Так как A — идемпотентная группа, то

$$D = \bigoplus_{r_0(A)} \mathbb{Q}.$$

А это значит, что D — делимая группа без кручения.

Пусть $T_p = t_p(A)$ — p-примарная часть группы A. Докажем, что T_p — элементарная группа. Предположим противное: T_p не является элементарной группой. Тогда найдётся такой элемент $a \in T_p$, что $o(a) = p^k$, где $k > 1$. Рассмотрим элемент $p^m a$, где число m удовлетворяет неравенствам $\lceil k/2 \rceil \leqslant m \leqslant k$. Для него справедливо

$$p^m a * p^m a = p^{k+l} a * a = p^l (p^k a) * a = 0 * a = 0$$

при любом умножении $* \in \operatorname{Mult} A$. Следовательно, $p^m a$ не является идемпотентом. А значит, группа T_p может быть только элементарной группой. □

Следствие 1. *Периодическая группа является идемпотентной тогда и только тогда, когда она раскладывается в прямую сумму p-элементарных групп.*

Доказательство. Прямое утверждение непосредственно вытекает из предложения 3.

Обратно, $\mathbb{Z}_p$ — идемпотентная группа и из свойства 1 предложения 2 вытекает, что прямая сумма p-элементарных групп тоже идемпотентная группа. □

Лемма 1. *Если A — идемпотентная группа без p-кручения, то A — p-делимая группа. В частности, если A — группа без кручения, то A — делимая группа.*

Доказательство. Пусть A — идемпотентная группа без p-кручения, т. е. $o(a) \neq p$ для любого $a \in A$. Рассмотрим элемент $pa \in A$. Для него существует умножение $*_{pa}$, такое что $pa *_{pa} pa = pa$. Тогда

$$pa *_{pa} pa - pa = 0 \Longrightarrow p(a *_{pa} pa - a) = 0 \Longrightarrow a *_{pa} pa - a = 0,$$
$$a = a *_{pa} pa = p(a *_{pa} a),$$

т. е. $a \,\vdots\, p$, а значит, A — p-делимая группа. □

Напомним определение sp-группы (подробнее см. [1, 2]).

Определение 3. sp-группой называется редуцированная смешанная группа A с бесконечным числом ненулевых p-компонент, такая что естественное вложение $\bigoplus\limits_{p \in P} t_p(A) \to A$ продолжается до сервантного вложения $A \to \prod\limits_{p \in P} t_p(A)$.

Далее рассмотрим идемпотентные группы в классе смешанных групп.

Теорема 1. *Если A — смешанная редуцированная идемпотентная группа, то A — sp-группа, все p-компоненты которой элементарные.*

Доказательство. Пусть A — редуцированная смешанная идемпотентная группа и a — произвольный элемент группы A. Так как $A = t_p(A) \oplus A'_p$, то $a = a_p + a'_p$, где $a_p \in t_p(A)$ и $a'_p \in A'_p$. Определим отображение

$$\varphi\colon A \longrightarrow \prod_{p \in P} t_p(A), \quad a \stackrel{\varphi}{\longmapsto} (a_p)_{p \in P} \in \prod_{p \in P} t_p(A).$$

Докажем, что группа A является sp-группой. Сначала покажем, что наше отображение является гомоморфизмом:

$$\varphi(a + b) = (a_p + b_p) = (a_p) + (b_p) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Далее, пусть $a \in \ker\varphi$. Тогда $\varphi(a) = (a_p) = 0$, следовательно, $a_p = 0$ при любом $p \in P$, а значит, $a \in A'_p$ при любом $p \in P$. Таким образом, $a \in \bigcap\limits_{p\in P} A'_p$. Так как $t_p(A)$ — вполне характеристическая подгруппа в A, то по предложению 2 группа A'_p является идемпотентной группой без p-кручения. Следовательно, по лемме 1 A'_p — p-делимая группа и $\bigcap\limits_{p\in P} A'_p$ — делимая группа, т. е. $\bigcap\limits_{p\in P} A'_p = 0$ (поскольку A — редуцированная группа). Значит, φ — мономорфизм.

Теперь докажем, что подгруппа A сервантна в группе $\prod\limits_{p\in P} t_p(A)$. Для этого рассмотрим фактор-группу $A/\bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A)$, которая по лемме 1 является делимой группой. Так как $A/\bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A)$ — делимая подгруппа в $\prod\limits_{p\in P} t_p(A)/\bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A)$, то она выделяется прямым слагаемым и является сервантной в $\prod\limits_{p\in P} t_p(A)/\bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A)$. Таким образом, поскольку $\bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A)$ сервантна в $\prod\limits_{p\in P} t_p(A)$ и $A/\bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A)$ сервантна в $\prod\limits_{p\in P} t_p(A)/\bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A)$, то A сервантна в $\prod\limits_{p\in P} t_p(A)$. Из этого следует, что A является sp-группой. □

Литература

[1] Крылов П. А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 793—812.

[2] Крылов П. А. Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Сиб. матем. журн. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 108—119.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[4] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982.

[5] Beaumont R. Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups // Duke Math. J. — 1948. — Vol. 15. — P. 367—369.

[6] Szele T. Zur Theorie der Zeroringe // Math. Ann. — 1949. — Vol. 121. — P. 242—246.