Кольца квазиэндоморфизмов некоторых квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 4

А. В. ЧЕРЕДНИКОВА
Костромской государственный технологический университет
e-mail: av-cherednikova@list.ru

УДК 512.541.7

Ключевые слова: кольцо квазиэндоморфизмов, абелева группа, группа без кручения, квазиразложимая группа.

Аннотация

Получено описание колец квазиэндоморфизмов абелевых групп G без кручения ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2 в случае, когда группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\otimes\mathrm{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2.

Abstract

A. V. Cherednikova, Quasi-endomorphism rings of some quasi-decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 159—176.

We obtain a description of quasi-endomorphism rings of torsion-free Abelian groups G of rank 4, quasi-decomposable into a direct sum of groups A_1 and A_2 of rank 1 and a strongly indecomposable group B of rank 2 in the case where the quasi-homomorphism group $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}(A_2, B)$ has rank 2.

В работе под группой понимается абелева группа без кручения конечного ранга, записанная аддитивно. Приведём необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ — полная матричная алгебра порядка 4 над полем $\mathbb{Q}$.

Для групп G и H запись $G \doteq H$ означает, что G квазиравна H, т. е. подгруппа $G \cap H$ имеет конечный индекс как в G, так и в H.

Под *квазиразложением* группы G понимается семейство ненулевых подгрупп G_i, $i \in I$, делимой оболочки $\mathbb{Q} \otimes G$ группы G, таких что $G \doteq \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется *квазислагаемым* группы G. Группа G называется *квазиразложимой*, если она обладает нетривиальными квазиразложениями.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 159—176.

Кольцом квазиэндоморфизмов или *алгеброй квазиэндоморфизмов* $\mathcal{E}(G)$ группы G называется $\mathbb{Q}$-алгебра $\mathbb{Q}\otimes E(G)$, где $E(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G.

Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 2 были описаны в [10]. Доказано, что с точностью до изоморфизма существуют три алгебры, являющиеся алгебрами квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 2. Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 были описаны в [6, 7]. Доказано, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют 14 алгебр и 2 бесконечные серии алгебр, являющиеся алгебрами квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3. В настоящей работе получено описание колец квазиэндоморфизмов абелевых групп G без кручения ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2 в случае, когда группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\otimes\operatorname{Hom}(A_2,B)$ имеет ранг 2. Доказано, что с точностью до изоморфизма существуют 19 алгебр и 6 бесконечных серий алгебр, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов этих групп.

В статье используются также следующие обозначения.

Пусть G — группа. Тогда $\mathrm{IT}(G)$ и $\mathrm{OT}(G)$ — соответственно внутренний и внешний типы группы G [11]. Если $S\subseteq G$, то через $\langle S\rangle$ обозначается подгруппа группы G, порождённая множеством S, а через $\langle S\rangle_*$ — сервантная подгруппа группы G, порождённая множеством S.

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Через $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)$ условимся обозначать группу квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\otimes\operatorname{Hom}(A,B)$ для произвольных групп A и B.

Если группа R ранга 1 имеет тип τ, то будем писать $t(R)=\tau$. Пусть R_i, R_j — группы ранга 1, такие что $t(R_i)=\tau_i$ и $t(R_j)=\tau_j$. Запись $\tau_i\ \xi\ \tau_j$ означает, что тип τ_i несравним с типом τ_j.

Отсутствующие в тексте определения, факты и обозначения можно найти в [2, 5].

Лемма 1. *Пусть H — прямая сумма групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2. Тогда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(H)$ группы H изоморфно подалгебре полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4.*

Доказательство. Зафиксируем ненулевые элементы $a_i\in A_i$, $i=1,2$, и линейно независимые элементы $b_1,b_2\in B$. Положим $R_1=\langle a_1\rangle_*$, $R_2=\langle a_2\rangle_*$, $R_3=\langle b_1\rangle_*$, $R_4=\langle b_2\rangle_*$. Обозначим через $i_k\colon R_k\to H$ и $\pi_l\colon H\to\mathbb{Q}\otimes R_l$, $k,l\in\{1,2,3,4\}$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно. Тогда элементы $i_1(a_1)$, $i_2(a_2)$, $i_3(b_1)$, $i_4(b_2)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H.

Всякий квазиэндоморфизм $\varphi\colon H\to H$ вполне определяется элементами $\varphi i_1(a_1)$, $\varphi i_2(a_2)$, $\varphi i_3(b_1)$, $\varphi i_4(b_2)$, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\varphi\, i_1(a_1) = \pi_1\varphi\, i_1(a_1) + \pi_2\varphi\, i_1(a_1) + \pi_3\varphi\, i_1(a_1) + \pi_4\varphi\, i_1(a_1),\\
&\varphi\, i_2(a_2) = \pi_1\varphi\, i_2(a_2) + \pi_2\varphi\, i_2(a_2) + \pi_3\varphi\, i_2(a_2) + \pi_4\varphi\, i_2(a_2),\\
&\varphi\, i_3(b_1) = \pi_1\varphi\, i_3(b_1) + \pi_2\varphi\, i_3(b_1) + \pi_3\varphi\, i_3(b_1) + \pi_4\varphi\, i_3(b_1),\\
&\varphi\, i_4(b_2) = \pi_1\varphi\, i_4(b_2) + \pi_2\varphi\, i_4(b_2) + \pi_3\varphi\, i_4(b_2) + \pi_4\varphi\, i_4(b_2).
\end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, с каждым элементом $\varphi \in \mathcal{E}(H)$ ассоциируется квадратная матрица порядка 4:

$$f\colon \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \pi_1\varphi\, i_1 & \pi_1\varphi\, i_2 & \pi_1\varphi\, i_3 & \pi_1\varphi\, i_4 \\ \pi_2\varphi\, i_1 & \pi_2\varphi\, i_2 & \pi_2\varphi\, i_3 & \pi_2\varphi\, i_4 \\ \pi_3\varphi\, i_1 & \pi_3\varphi\, i_2 & \pi_3\varphi\, i_3 & \pi_3\varphi\, i_4 \\ \pi_4\varphi\, i_1 & \pi_4\varphi\, i_2 & \pi_4\varphi\, i_3 & \pi_4\varphi\, i_4 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, элементы $\varphi\, i_1(a_1)$, $\varphi\, i_2(a_2)$, $\varphi\, i_3(b_1)$, $\varphi\, i_4(b_2)$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
&\varphi\, i_1(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \alpha_{31}b_1 + \alpha_{41}b_2,\\
&\varphi\, i_2(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{32}b_1 + \alpha_{42}b_2,\\
&\varphi\, i_3(b_1) = \alpha_{13}a_1 + \alpha_{23}a_2 + \alpha_{33}b_1 + \alpha_{43}b_2,\\
&\varphi\, i_4(b_2) = \alpha_{14}a_1 + \alpha_{24}a_2 + \alpha_{34}b_1 + \alpha_{44}b_2,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Пусть задано отображение

$$g\colon \begin{pmatrix} \pi_1\varphi\, i_1 & \pi_1\varphi\, i_2 & \pi_1\varphi\, i_3 & \pi_1\varphi\, i_4 \\ \pi_2\varphi\, i_1 & \pi_2\varphi\, i_2 & \pi_2\varphi\, i_3 & \pi_2\varphi\, i_4 \\ \pi_3\varphi\, i_1 & \pi_3\varphi\, i_2 & \pi_3\varphi\, i_3 & \pi_3\varphi\, i_4 \\ \pi_4\varphi\, i_1 & \pi_4\varphi\, i_2 & \pi_4\varphi\, i_3 & \pi_4\varphi\, i_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

Тогда отображение

$$gf\colon \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом $\mathcal{E}(H)$ и подалгебры полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4 [2]. □

Замечание 1. Для групп A и B будем отождествлять естественным образом $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A,B)$ с подгруппой $\pi_B\mathcal{E}(A\oplus B)i_A$ из $\mathcal{E}(A\oplus B)$, где $i_A\colon A \to A\oplus B$ и $\pi_B\colon A\oplus B \to Q\otimes B$ являются соответственно гомоморфизмом вложения и квазигомоморфизмом проекции.

Замечание 2. Пусть $t(R_k) = \tau_k$ и $t(R_l) = \tau_l$, где $k,l \in \{1,2,3,4\}$, и r_k обозначает один из элементов системы a_1, a_2, b_1, b_2, принадлежащий R_k. В равенствах (1) леммы 1 для слагаемых $\pi_l\varphi i_k(r_k)$ имеет место $\pi_l\varphi i_k(r_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $\tau_k > \tau_l$ или $\tau_k \not\sim \tau_l$.

Для типов τ_k и τ_l групп R_k и R_l соответственно $\tau_k \leqslant \tau_l$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(R_k, R_l) \cong \mathbb{Q}$ и α_{lk} из равенств (2) леммы 1 пробегает всё множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ [5].

Лемма 2 [11]. *Пусть R — группа ранга 1 и A — сильно неразложимая группа ранга 2. Группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(R, A)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $t(R) \leqslant \operatorname{IT}(A)$. Группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, R)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\operatorname{OT}(A) \leqslant t(R)$.*

Лемма 3 [7]. *Пусть R — группа ранга 1 и A — сильно неразложимая группа ранга 2. Если $t(R) \leqslant \operatorname{IT}(A)$, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, R) = 0$. Если $\operatorname{OT}(A) \leqslant t(R)$, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(R, A) = 0$.*

Замечание 3. Для произвольной абелевой группы A без кручения конечного ранга $\operatorname{IT}(A) \leqslant \operatorname{OT}(A)$ [11]. Более того, если A — группа без кручения конечного ранга, такая что $\operatorname{IT}(A) = \operatorname{OT}(A)$, то A — прямая сумма групп ранга 1 (все они типа $\operatorname{OT}(A)$). Следовательно, если A — сильно неразложимая группа, то $\operatorname{IT}(A) < \operatorname{OT}(A)$.

Соглашение 1. Всюду далее G будет обозначать квазиразложимую абелеву группу без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение

$$G \doteq A_1 \oplus A_2 \oplus B, \tag{3}$$

где A_1 и A_2 — группы ранга 1, B — сильно неразложимая группа ранга 2.

Лемма 4 [9]. *Пусть H — прямая сумма $A_1 \oplus A_2 \oplus B$ в разложении* (3). *Тогда $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$.*

Соглашение 2. В следующих теоремах 1—6 нижний индекс $\mathbf{i}$ в обозначении алгебры $\mathbf{A}_\mathbf{i}^{(\mathbf{j})}$ — это её размерность над $\mathbb{Q}$, верхний индекс $\mathbf{j}$ — порядковый номер алгебры. Кроме того, $\mathbf{k}$ в обозначении алгебры $\mathbf{A}_\mathbf{i}^{(\mathbf{j})}(\mathbf{k})$ и в записи представляющей её матрицы — это целое число, свободное от квадратов.

Теорема 1. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (3), *где $t(A_1) = \tau_1$, $t(A_2) = \tau_2$, $\operatorname{IT}(B) = \tau_3$, $\operatorname{OT}(B) = \tau_4$. Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеют ранг 2. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A}_\mathbf{7}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_\mathbf{8}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{2})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{3})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1 < \tau_3$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$;
2) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{3})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 \leqslant \tau_3$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$;
3) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{2})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$, $\tau_1 < \tau_3$, $\tau_2 < \tau_3$.

Доказательство. Пусть квазиразложимая группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$. Согласно лемме 2 группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеют ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_1 \leqslant \tau_3$ и $\tau_2 \leqslant \tau_3$. На основании леммы 3 отсюда следует, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1) = 0$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2) = 0$. Тогда α_{13}, α_{14}, α_{23}, α_{24} в равенствах (2) леммы 1 равны нулю.

Так как в рассматриваемом случае B является вполне характеристической подгруппой группы H, для любого $\varphi \in \mathcal{E}(H)$ ограничение $\varphi|B$ отображения φ на B будет являться некоторым квазиэндоморфизмом группы B.

Воспользуемся классификацией колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 2, полученной Дж. Д. Рейдом [10]. Пусть B — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 2. Тогда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ имеет один из следующих видов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{Q} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \mathbf{k}y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Q},\ \mathbf{k} \text{ — целое число, свободное от квадратов} \right\}.$$

Исходя из возможных соотношений между типами квазислагаемых ранга 1 в разложении (3), классификации колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 2, а также учитывая замечание 2 и лемму 4, мы получаем, что

1) $\mathcal{E}(G)$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A_8^{(1)}}$, $\mathbf{A_9^{(1)}}$, $\mathbf{A_9^{(2)}}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1 < \tau_3$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$;
2) $\mathcal{E}(G)$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A_9^{(3)}}$, $\mathbf{A_{10}^{(1)}}$, $\mathbf{A_{10}^{(2)}}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 \leqslant \tau_3$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$;
3) $\mathcal{E}(G)$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A_7^{(1)}}$, $\mathbf{A_8^{(2)}}$, $\mathbf{A_8^{(3)}}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$, $\tau_1 < \tau_3$, $\tau_2 < \tau_3$. □

Теорема 2. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение (3), где $t(A_1) = \tau_1$, $t(A_2) = \tau_2$, $\mathrm{IT}(B) = \tau_3$, $\mathrm{OT}(B) = \tau_4$. Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеют ранг 2. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр*:

$$\mathbf{A_8^{(4)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$
$$\mathbf{A_9^{(4)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$
$$\mathbf{A_9^{(5)}}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом кольцо $\mathbf{K}$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A_8^{(4)}}$, $\mathbf{A_9^{(4)}}$, $\mathbf{A_9^{(5)}}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\tau_2 \leqslant \tau_3$, $\tau_4 \leqslant \tau_1$.

Доказательство. Пусть квазиразложимая группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$. По лемме 4 имеем, что $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$. Согласно лемме 2 группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеют ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \leqslant \tau_3$ и $\tau_4 \leqslant \tau_1$. Согласно замечанию 3 имеет место неравенство $\tau_3 < \tau_4$. Следовательно, $\tau_2 < \tau_1$.

Так как $\tau_2 < \tau_1$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$, $\tau_4 \leqslant \tau_1$, то из замечания 2 и леммы 3 следует, что α_{21}, α_{31}, α_{41}, α_{23}, α_{24} в равенствах (2) леммы 1 равны нулю. Тогда на основании классификации колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 2 [10] получаем:

а) если $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$, то
$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_8^{(4)}};$$

б) если
$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$
то
$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_9^{(4)}};$$

в) если
$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \mathbf{k}y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q}, \mathbf{k} \text{ — целое число, свободное от квадратов} \right\},$$
то
$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_9^{(5)}}(\mathbf{k}). \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение (3), где $t(A_1) = \tau_1$, $t(A_2) = \tau_2$, $\operatorname{IT}(B) = \tau_3$, $\operatorname{OT}(B) = \tau_4$. Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеют соответственно ранги 1 и 2, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1) = 0$. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:*
$$\mathbf{A_6^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_7^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_7^{(3)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_8^{(5)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A_6^{(1)}}$, $\mathbf{A_7^{(2)}}$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 \not\xi \tau_2$, $\tau_1 \ \xi \ \tau_3$, $\tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$ *и существует однозначно определённая сервантная подгруппа* C *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(C) \geqslant \tau_1$;
2) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A_7^{(3)}}$, $\mathbf{A_8^{(5)}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:
   а) $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_1 \ \xi \ \tau_3$, $\tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 < \tau_3$ *и существует однозначно определённая сервантная подгруппа* C *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(C) \geqslant \tau_1$;
   б) $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$ *и существует однозначно определённая сервантная подгруппа* C *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(C) \geqslant \tau_1$, *но не существует сервантная подгруппа* D *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(B/D) \leqslant \tau_1$.

Доказательство. Пусть квазиразложимая группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$. По лемме 4 имеем, что $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$.

Согласно лемме 2 группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \leqslant \tau_3$. На основании леммы 3 имеем, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2) = 0$. Тогда α_{23}, α_{24} в равенствах (2) леммы 1 равны нулю.

Далее, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ имеет ранг 1 и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий [3]:

1) $\tau_1 \ \xi \ \tau_3$, $\tau_1 \leqslant \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$;
2) $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$, но не существует сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$.

Рассмотрим случай, когда $\tau_2 \leqslant \tau_3$, $\tau_1 \ \xi \ \tau_3$, $\tau_1 \leqslant \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$. Отсюда следует, что типы квазислагаемых ранга 1 могут удовлетворять одному из следующих условий: а) $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$; б) $\tau_1 > \tau_2$. Типы квазислагаемых ранга 1 не могут удовлетворять условию $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Действительно, в этом случае получаем, что $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_3$. Следовательно, $\tau_1 \leqslant \tau_3$. Получили противоречие. Заметим также, что в этом случае не может выполняться условие $\tau_1 = \tau_4$, так как иначе получаем, что $\tau_3 \not\leq \tau_4$, что противоречит замечанию 3.

Зафиксируем ненулевые элементы $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$. Пусть $f \in \mathcal{E}(H)$ такой, что $f\colon A_1 \to B$ и $f\colon B \to B$. Предположим, что $f(a_1) = b_1$, где $b_1 \in B$. Возьмём элемент $b_2 \in B$, такой что b_1 и b_2 линейно независимы. Положим $R_1 = \langle a_1 \rangle_*$, $R_2 = \langle a_2 \rangle_*$, $R_3 = \langle b_1 \rangle_*$, $R_4 = \langle b_2 \rangle_*$. Обозначим через $i_k\colon R_k \to H$ и $\pi_l\colon H \to \mathbb{Q} \otimes R_l$, $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно. Тогда элементы $i_1(a_1)$, $i_2(a_2)$, $i_3(b_1)$, $i_4(b_2)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H.

Заметим, что B является вполне характеристической подгруппой группы H. Значит, для любого $\varphi \in \mathcal{E}(H)$ ограничение $\varphi|B$ отображения φ на B является некоторым квазиэндоморфизмом группы B.

Замечание 4 [8]. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) \neq 0$, то группа B не может быть однородной, так как иначе $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$, очевидно, имеет ранг 2. Значит, кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ не может быть полем квадратичных чисел.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $\tau_1 \not\leq \tau_2$ и $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Тогда равенства (2) леммы 1 примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varphi\, i_1(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{31}b_1,\\
\varphi\, i_2(a_2) &= \alpha_{22}a_2 + \alpha_{32}b_1 + \alpha_{42}b_2,\\
\varphi\, i_3(b_1) &= \alpha_{33}b_1,\\
\varphi\, i_4(b_2) &= \alpha_{33}b_2.
\end{aligned}$$

Отсюда по лемме 1 получаем, что

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle|\, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{1})}.$$

Пусть $\tau_1 \not\leq \tau_2$ и

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

В этом случае мощность множества типов группы B равна 2 [8]. По условию существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$. Выберем линейно независимые элементы b_1 и b_2 группы B, такие что $b_1 \in$. Тогда $t(b_1) > t(b_2)$, так как если бы $t(b_1) < t(b_2)$, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ имел бы ранг 2, что противоречит условию теоремы. В этом случае равенства (2) леммы 1 примут вид

$$\begin{aligned}
\varphi\, i_1(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{31}b_1,\\
\varphi\, i_2(a_2) &= \alpha_{22}a_2 + \alpha_{32}b_1 + \alpha_{42}b_2,
\end{aligned}$$

$$\varphi\, i_3(b_1) = \alpha_{33}b_1,$$
$$\varphi\, i_4(b_2) = \alpha_{34}b_1 + \alpha_{33}b_2.$$

Тогда по лемме 1

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_7^{(2)}}.$$

Если $\tau_1 > \tau_2$, то, рассуждая аналогично, легко видеть, что алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфна одной из следующих алгебр:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_7^{(3)}},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_8^{(5)}}.$$

Перейдём к рассмотрению следующего случая: $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$, но не существует сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$. Имеем, что $\tau_2 \leqslant \tau_3 < \tau_1$. Следовательно, $\tau_2 < \tau_1$. Очевидно, что в этом случае алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфна одной из алгебр $\mathbf{A_7^{(3)}}$ или $\mathbf{A_8^{(5)}}$. □

Теорема 4. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (3), *где $t(A_1) = \tau_1$, $t(A_2) = \tau_2$, $\mathrm{IT}(B) = \tau_3$, $\mathrm{OT}(B) = \tau_4$. Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеют соответственно ранги 2 и 1, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр*:

$$\mathbf{A_7^{(4)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$
$$\mathbf{A_8^{(6)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом $\mathbf{K}$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A_7^{(4)}}$, $\mathbf{A_8^{(6)}}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) *$\tau_3 < \tau_1$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$;*

б) *$\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$, но не существует сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$.*

Доказательство. Пусть квазиразложимая группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$. По лемме 4 имеем, что $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$.

Зафиксируем ненулевые элементы $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$, и линейно независимые элементы $b_1, b_2 \in B$. Положим $R_1 = \langle a_1 \rangle_*$, $R_2 = \langle a_2 \rangle_*$, $R_3 = \langle b_1 \rangle_*$, $R_4 = \langle b_2 \rangle_*$. Обозначим через $i_k \colon R_k \to H$ и $\pi_l \colon H \to \mathbb{Q} \otimes R_l$, $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно. Тогда элементы $i_1(a_1)$, $i_2(a_2)$, $i_3(b_1)$, $i_4(b_2)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H.

Согласно лемме 2 группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \leqslant \tau_3$. Тогда по лемме 3 имеем, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2) = 0$. Следовательно, α_{23}, α_{24} в равенствах (2) леммы 1 равны нулю.

Далее, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеет ранг 1 и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий [3]:

а) $\tau_3 \leqslant \tau_1$, $\tau_1 \xi \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$;

б) $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$, но не существует сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$.

Пусть $\tau_2 \leqslant \tau_3$, $\tau_3 \leqslant \tau_1$, $\tau_1 \xi \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$. Так как $\tau_2 \leqslant \tau_3 \leqslant \tau_1$, то $\tau_2 \leqslant \tau_1$. Но равенство $\tau_2 = \tau_1$ не может иметь место, так как в противном случае $\tau_1 \leqslant \tau_3 < \tau_4$, откуда вытекает, что $\tau_1 < \tau_4$, что противоречит условию $\tau_1 \xi \tau_4$. Легко видеть, что в случае а) равенство $\tau_3 = \tau_1$ не может иметь места.

Пусть $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$, но не существует сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$. Так как $\tau_2 \leqslant \tau_3 < \tau_1$, то $\tau_2 < \tau_1$ и в случае б).

Таким образом, если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеет ранг 1 и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$, то $\tau_2 < \tau_1$. Следовательно, α_{21} в равенствах (2) леммы 1 равно нулю.

Замечание 5 [8]. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1) \neq 0$, то группа B не может быть однородной, так как в противном случае $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$, очевидно, имеет ранг 2. Следовательно, кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ не может быть полем квадратичных чисел.

Положим, что $\pi_1\varphi i_3(b_1) \neq 0$ и $\pi_1\varphi i_4(b_2) = 0$. Тогда в случае, когда $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$, по лемме 1 имеем

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_7^{(4)}}.$$

Если

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$

то мощность множества типов группы B равна 2 [8]. Следовательно, $t(b_1) < t(b_2)$. Действительно, предположим, что $t(b_1) > t(b_2)$. Тогда $t(B/ < b_2\rangle_*) = \tau_4$ [3]. Получили противоречие, так как в случаях а) и б) выполняется условие $t(B/ < b_2\rangle_*) \leqslant \tau_1$, но в случае а) $\tau_1 \ \xi \ \tau_4$, в случае б) $\tau_1 < \tau_4$. Следовательно, в рассматриваемом случае равенства (2) леммы 1 имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi i_1(a_1) &= \alpha_{11}a_1, \\ \varphi i_2(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{32}b_1 + \alpha_{42}b_2, \\ \varphi i_3(b_1) &= \alpha_{13}a_1 + \alpha_{33}b_1 + \alpha_{43}b_2, \\ \varphi i_4(b_2) &= \alpha_{33}b_2. \end{aligned}$$

Тогда по лемме 1

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_8^{(6)}}. \qquad \square$$

Теорема 5. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (3), *где $t(A_1) = \tau_1$, $t(A_2) = \tau_2$, $\mathrm{IT}(B) = \tau_3$, $\mathrm{OT}(B) = \tau_4$. Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2, а $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1)$ и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B)$ имеют ранг 1. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно алгебре*

$$\mathbf{A_9^{(6)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_9^{(6)}}$ тогда и только тогда, когда $\tau_2 \leqslant \tau_3$, $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существуют однозначно определённые сервантные подгруппы C и D ранга 1 группы B, такие что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$.

Доказательство. Пусть квазиразложимая группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$. Зафиксируем ненулевые элементы $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$.

Согласно лемме 2 группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \leqslant \tau_3$. Тогда по лемме 3 имеем, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2) = 0$. Следовательно, α_{23}, α_{24} в равенствах (2) леммы 1 равны нулю.

Группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ имеют ранг 1 тогда и только тогда, когда $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существуют однозначно определённые сервантные подгруппы C и D ранга 1 группы B, такие что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant \leqslant t(C)$ [3]. Имеем, что $\tau_2 \leqslant \tau_3 < \tau_1$. Следовательно, $\tau_2 < \tau_1$. Отсюда следует, что α_{21} в равенствах (2) леммы 1 равны нулю.

Из условия теоремы и замечаний 4, 5 следует, что $\mathcal{E}(B)$ не может быть полем квадратичных чисел.

Предположим, что $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Пусть $f \in \mathcal{E}(H)$ такой, что $f\colon A_1 \to B$ и $f\colon B \to B$, а $g \in \mathcal{E}(H)$ такой, что $g\colon B \to A_1$ и $g\colon A_1 \to A_1$. Допустим, что $f(a_1) = b_1$, где $b_1 \in B$. Возьмём элемент $b_2 \in B$, такой что элементы b_1 и b_2 линейно независимы. Пусть $g(b_2) = ra_1$, где $r \in \mathbb{Q}$, и $\operatorname{Ker}(g) = \langle b_1\rangle_*$. Тогда $fg(b_2) = rb_1$. Это означает, что существует ненулевой квазигомоморфизм, отображающий $\langle b_2\rangle_*$ в $\langle b_1\rangle_*$. Получили противоречие, так как по предположению $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Следовательно, $g(b_1) = sa_1$, где $s \in \mathbb{Q}$ и $\operatorname{Ker}(g) = \langle b_2\rangle_*$. Тогда $(\frac{1}{s}f)g(lb_1) = lb_1$ для произвольного рационального числа l. Отсюда следует, что короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(g) \longrightarrow B \xrightarrow{g} A_1 \longrightarrow 0$$

расщепляется [1]. Это означает, что группа B разложима в прямую сумму групп, что противоречит условию теоремы. Таким образом, если группа G удовлетворяет условию теоремы, то кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ квазислагаемого B не может быть изоморфно $\mathbb{Q}$.

Пусть

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Покажем, что в этом случае элементы b_1 и b_2 линейно зависимы.

Предположим, что b_1 и b_2 линейно независимы. Тогда $t(b_1) > t(b_2)$. Действительно, если $t(b_1) < t(b_2)$, то $\tau_3 = t(b_1)$ [8]. Так как $f(a_1) = b_1$, то $\tau_1 \leqslant \tau_3$. Но $\tau_1 > \tau_3$ по условию теоремы. Итак, $t(b_1) > t(b_2)$. Следовательно, $t(B/\langle b_2\rangle_*) = \tau_4$ [3]. Имеем, что $\tau_4 = t(B/\langle b_2\rangle_*) \leqslant \tau_1$. Получили противоречие, так как по условию теоремы $\tau_1 < \tau_4$.

Таким образом, если $f(a_1) = b_1$, то $\operatorname{Ker}(g) = \langle b_1\rangle_*$. Выберем элемент $b_3 \in B$, такой что элементы b_1 и b_3 линейно независимы. При этом $t(b_1) > t(b_3)$, так как в противном случае $\tau_1 \leqslant t(b_1) < t(b_3)$ и, значит, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$ имеет ранг 2. Положим $R_1 = \langle a_1\rangle_*$, $R_2 = \langle a_2\rangle_*$, $R_3 = \langle b_1\rangle_*$, $R_4 = \langle b_3\rangle_*$. Обозначим через $i_k\colon R_k \to H$ и $\pi_l\colon H \to \mathbb{Q} \otimes R_l$, $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно. Тогда элементы $i_1(a_1)$, $i_2(a_2)$, $i_3(b_1)$, $i_4(b_3)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H. Следовательно, равенства (2) леммы 1 примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\varphi\, i_1(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{31}b_1,\\
&\varphi\, i_2(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{32}b_1 + \alpha_{42}b_3,\\
&\varphi\, i_3(b_1) = \alpha_{33}b_1,\\
&\varphi\, i_4(b_3) = \alpha_{14}a_1 + \alpha_{34}b_1 + \alpha_{33}b_3.
\end{aligned}
$$

Отсюда по лемме 1

$$
\mathcal{E}(H) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_9^{(6)}}.
$$

Отсюда на основании леммы 4 имеем, что $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_9^{(6)}}$. □

Теорема 6. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение (3), где $t(A_1) = \tau_1$, $t(A_2) = \tau_2$, $\mathrm{IT}(B) = \tau_3$, $\mathrm{OT}(B) = \tau_4$. Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2, $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B) = 0$ и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1) = 0$. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр*:

$$
\mathbf{A_5^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},
$$

$$
\mathbf{A_6^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},
$$

$$
\mathbf{A_6^{(3)}}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},
$$

$$
\mathbf{A_6^{(4)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},
$$

$$
\mathbf{A_7^{(5)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},
$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k}) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:
   а) $\tau_1 \not\leq \tau_2$, $\tau_1 \not\leq \tau_3$, $\tau_1 \not\leq \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$;
   б) $\tau_1 \not\leq \tau_2$, $\tau_1 \not\leq \tau_3$, $\tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$ *и не существует сервантная подгруппа* C *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(C) \geqslant \tau_1$;
2) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{5})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:
   а) $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_1 \not\leq \tau_3$, $\tau_1 \not\leq \tau_4$, $\tau_2 < \tau_3$;
   б) $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_1 \not\leq \tau_3$, $\tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 < \tau_3$ *и не существует сервантная подгруппа* C *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(C) \geqslant \tau_1$;
   в) $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_1 > \tau_3$, $\tau_1 \not\leq \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$ *и не существует сервантная подгруппа* D *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(B/D) \leqslant \tau_1$;
   г) $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$ *и не существуют сервантные подгруппы* C *и* D *ранга* 1 *группы* B, *такие что* $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$.

Доказательство. Пусть квазиразложимая группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$. По лемме 4 имеем, что $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$.

Согласно лемме 2 группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \leqslant \tau_3$. Тогда по лемме 3 имеем, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2) = 0$.

Далее, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий [3]:

а) $\tau_1 \not\leq \tau_3$, $\tau_1 \not\leq \tau_4$;
б) $\tau_1 \not\leq \tau_3$, $\tau_1 \leqslant \tau_4$ и не существует сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$;
в) $\tau_1 \geqslant \tau_3$, $\tau_1 \not\leq \tau_4$ и не существует сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$;
г) $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и не существуют сервантные подгруппы C и D ранга 1 группы B, такие что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$.

Из условия теоремы следует, что B является вполне характеристической подгруппой группы H. Следовательно, для любого $\varphi \in \mathcal{E}(H)$ ограничение $\varphi|B$ отображения φ на B является некоторым квазиэндоморфизмом группы B.

Рассмотрим случай а). Пусть $\tau_1 \not\leq \tau_2$. Тогда легко видеть, что кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Предположим, что $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Так как $\tau_2 \leqslant \tau_3$, то $\tau_1 \leqslant \tau_3$. Но тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ имеет ранг 2, что противоречит условию теоремы.

Если $\tau_1 > \tau_2$, то не может выполняться условие $\tau_2 = \tau_3$, так как в противном случае $\tau_3 \,\xi\, \tau_4$, что противоречит замечанию 3. Легко видеть, что в рассматриваемом случае кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{5})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Перейдём к случаю б). Здесь возможны следующие соотношения между типами τ_1 и τ_2 квазислагаемых ранга 1 группы G: $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$ и $\tau_1 > \tau_2$.

Если $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$, то не может выполняться условие $\tau_1 = \tau_4$, так как иначе $\tau_3 \,\xi\, \tau_4$. В этом случае $\mathcal{E}(G)$ изоморфно одной из алгебр $\mathbf{A}_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k})$.

Если $\tau_1 > \tau_2$, то не могут выполняться условия $\tau_1 = \tau_4$ и $\tau_2 = \tau_3$. Действительно, если $\tau_1 = \tau_4$, то $\tau_3 \,\xi\, \tau_4$, а если $\tau_2 = \tau_3$, то $\tau_1 > \tau_3$, что противоречит условию $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$. В этом случае $\mathcal{E}(G)$ изоморфно одной из алгебр $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{5})}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k})$.

В случае в) имеем $\tau_2 \leqslant \tau_3 \leqslant \tau_1$. Следовательно, $\tau_2 \leqslant \tau_1$. Если $\tau_2 = \tau_1$, то $\tau_1 = \tau_3$. Это равносильно тому, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ имеет ранг 2. Получили противоречие. Следовательно, $\tau_2 < \tau_1$ и $\tau_1 \neq \tau_3$. В этом случае $\mathcal{E}(G)$ изоморфно одной из алгебр $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{5})}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k})$.

В случае г) имеем: $\tau_2 \leqslant \tau_3 < \tau_1$. Следовательно, $\tau_2 < \tau_1$. Тогда $\mathcal{E}(G)$ изоморфно одной из алгебр $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{5})}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k})$. □

Замечание 6. Легко проверить, что все алгебры, перечисленные в формулировках теорем 1—6, попарно не изоморфны.

Таким образом, если G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение (3) и группа гомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2, то кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из алгебр, перечисленных в формулировках теорем 1—6. Доказано, что с точностью до изоморфизма существуют 19 алгебр и 6 бесконечных серий алгебр, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов абелевых групп G без кручения ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2 в случае, когда группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2.

В заключение отметим, что в [7] приводятся примеры реализации всех колец квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения ранга 3, квазиразложимых в прямую сумму группы ранга 1 и сильно неразложимой группы ранга 2. На основе этих примеров легко построить примеры реализации всех колец квазиэндоморфизмов, перечисленных в формулировках теорем 1—6. Приведём один из них.

Пример. Выберем в качестве сильно неразложимого квазислагаемого B ранга 2 группу из [4, пример 4.11]. Пусть $V = \mathbb{Q}x_1 \oplus \mathbb{Q}x_2$ — $\mathbb{Q}$-пространство размерности 2 с базисом x_1, x_2. Определим группу B как подгруппу V, порождённую элементами x_1, x_2 и элементами $(x_1 + px_2)/p^2$ по всем простым числам p. Пусть A_1, A_2 — группы ранга 1, такие что $t(A_1) = [(1,0,1,0,1,0,\ldots)]$ и $t(A_2) = [(0,0,0,0,\ldots)]$. Так как $\mathrm{IT}(B) = [(0,0,0,0,\ldots)]$ и $\mathrm{OT}(B) = [(2,2,2,2,\ldots)]$, то $\mathrm{IT}(B) < t(A_1) < \mathrm{OT}(B)$ и $t(A_2) = \mathrm{IT}(B)$. При этом в группе B существует однозначно определённая сервантная подгруппа $C = \langle x_1 \rangle_*$ ранга 1, такая что $t(C) > t(A_1)$, но не существует сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant t(A_1)$. На основании леммы 5.1 из [3] отсюда следует, что $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B)$ имеет ранг 1 и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1) = 0$. Так как $t(A_2) = \mathrm{IT}(B)$, то по лемме 2 группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2. Отсюда по лемме 3 следует, что $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_2) = 0$.

Пусть $G \doteq A_1 \oplus A_2 \oplus B$. Обозначим $A_1 \oplus A_2 \oplus B$ через H. Выберем ненулевые элементы a_1 и a_2, принадлежащие соответственно группам A_1 и A_2. Тогда элементы a_1, a_2, x_1, x_2 образуют максимальную линейно независимую систему группы H. Допустим, что f — это квазиэндоморфизм группы H, такой что $f\colon A_1 \to B$ и $f\colon B \to B$. Тогда $f(a_1) \in C$. Легко видеть, что в рассматриваемом случае $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_8^{(5)}}$.

Литература

[1] Маклейн С. Гомология. — М.: Мир, 1966.

[2] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[3] Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ-адическим соотношением // Алгебра и логика. — 1989. — Т. 28, № 1. — С. 83—104.

[4] Фомин А. А. Абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квазиизоморфизма: Дисс.... докт. физ.-мат. наук. — М., 1992.

[5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.2. — М.: Мир, 1977.

[6] Чередникова А. В. Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули. — 1996. — Вып. 13, 14. — С. 237—242.

[7] Чередникова А. В. Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули. — 1996. — Вып. 13, 14. — С. 224—236.

[8] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[9] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 38. — P. 1—41.

[10] Reid J. D. On the rings of quasi-endomorphism of torsion-free Abelian groups // Topics in Abelian Groups. — 1963. — P. 51—68.

[11] Warfield R. Homomorphisms and duality for torsion free groups // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 189—200.