О проективно вполне транзитивных абелевых группах

А. Р. ЧЕХЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: cheklov@math.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: проективно вполне транзитивная группа, высотная матрица, идемпотентный эндоморфизм, сепарабельная группа.

Аннотация

Дано описание проективно вполне транзитивных групп в классах делимых групп, смешанных расщепляющихся групп, сепарабельных и векторных групп без кручения.

Abstract

A. R. Chekhlov, On projectively fully transitive Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 177—189.

A description of projectively fully transitive groups is presented in classes of divisible groups, mixed split groups, and separable and vector torsion-free groups.

Обозначим через $H_G(g)$ высотную матрицу элемента g группы G. В случае если группа G является p-группой, вместо $H_G(g)$ рассматриваем индикатор $U_G(g)$ элемента g; аналогично если G — группа без кручения, рассматриваем характеристику $\chi_G(g)$ элемента g. Через $o(g)$ обозначается порядок элемента g; $\mathrm{E}(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G; $\mathrm{End}(G) = \mathrm{E}(G)^+$ — её группа эндоморфизмов; $\mathrm{Proj}(G)$ — подкольцо в $\mathrm{E}(G)$, порождённое всеми идемпотентами кольца $\mathrm{E}(G)$; $\Pi(G)$ — подгруппа в $\mathrm{End}(G)$, порождённая всеми идемпотентами кольца $\mathrm{E}(G)$. Если m — некоторое кардинальное число, то $A^{(m)}$ — прямая сумма m копий группы A. $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — кольцо (аддитивная группа) всех рациональных чисел. $r(A)$ — ранг, $T(A)$ — периодическая часть группы A.

На множестве $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ рассмотрим следующее отношение $\preccurlyeq$: полагаем $m \preccurlyeq n$, если и только если $m, n \in \mathbb{N}$ и $n \mid m$ или $m = \infty$.

Напомним, что группа G называется *вполне транзитивной*, если для любых $x, y \in G$ с условием $H_G(x) \leqslant H_G(y)$ и $o(x) \preccurlyeq o(y)$ найдётся $\alpha \in \mathrm{E}(G)$ со свойством $\alpha(x) = y$. Если группа G редуцированная, то условие $o(x) \preccurlyeq o(y)$ можно опустить (см. [1]). Различные классы вполне транзитивных групп изучались в [1—3, 5, 6, 9, 11—17] и других работах.

Следуя [13], группу G назовём *проективно вполне транзитивной* (кратко *pft-группой*), если для любых $x, y \in G$ с условием $H_G(x) \leqslant H_G(y)$ и $o(x) \preccurlyeq o(y)$

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 177—189.

найдётся $\alpha \in \mathrm{Proj}(G)$ со свойством $\alpha(x) = y$; если α можно выбрать из $\Pi(G)$, то группу назовём *spft-группой*. Если $\mathrm{E}(G) = \mathrm{Proj}(G)$, то группа G называется *IG-группой*, а если $\mathrm{E}(G) = \Pi(G)$, то *IS-группой*. В [13] изучались IG-группы и IS-группы, а также примарные pft-группы и spft-группы. Некоторые свойства идемпотентных эндоморфизмов приведены в [7, 8].

Ясно, что если G — неразложимая и неоднородная вполне транзитивная группа без кручения, то G не является pft-группой. Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где все A_i вполне инвариантны в A, а каждая A_i такая же группа, как вышеупомянутая G, то A также не является pft-группой.

Для удобства ссылок приведём некоторые результаты из [13].

Лемма 1. *Если $G = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где все A_i являются IG-группами (IS-группами), то G является IG-группой (соответственно IS-группой).*

Лемма 2. *Если $G = A \oplus B$, где A — вполне инвариантная подгруппа группы G, то G является IG-группой (IS-группой) тогда и только тогда, когда A, B являются IG-группами (соответственно IS-группами).*

Лемма 3. *Если A — произвольная группа, то $A^{(m)}$ является IG-группой для каждого кардинального числа $m \geqslant 2$.*

Лемма 4. *Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — такая группа, что для каждого конечного подмножества $J \subseteq I$ группа $\bigoplus_{j \in J} A_j$ является pft-группой (spft-группой), то A также будет pft-группой (соответственно spft-группой).*

Напомним, что всякая делимая группа D представима в виде

$$D = D_0 \oplus \left(\bigoplus_{p \in \Pi} D_p \right),$$

где D_0 — делимая группа без кручения, D_p — делимые p-группы, а Π — некоторое множество простых чисел.

Предложение 5. *Делимая группа*

$$D = D_0 \oplus \left(\bigoplus_{p \in \Pi} D_p \right)$$

является IG-группой тогда и только тогда, когда если $D_0 \neq 0$, то $r(D_0) \geqslant 2$, и для каждого $p \in \Pi$ если $D_p \neq 0$, то $r(D_p) \geqslant 2$.

Доказательство. Докажем необходимость. Подгруппа $T(D) = \bigoplus_{p \in \Pi} D_p$ вполне инвариантна в D. Поэтому по лемме 2 D_0 и $T(D)$ являются IG-группами. Каждая D_p также вполне инвариантна в D, значит, является IG-группой. Поэтому если $D_p \neq 0$, то $r(D_p) \geqslant 2$ [13, следствие 2.4]. Если $r(D_0) = 1$, то $\mathrm{E}(D_0)$ изоморфно кольцу рациональных чисел $\mathbb{Q}$; единственными его идемпотентами являются 0 и 1, порождающие подкольцо, изоморфное $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Q} \cong \mathrm{E}(\mathbb{Q})$. Следовательно, $r(D_0) \geqslant 2$.

Докажем достаточность. По лемме 3 D_0 и каждая D_p являются IG-группами. Покажем, что $T(D)$ — IG-группа. Запишем $T(D)$ в виде $T(D) = D_1 \oplus D_2$, где D_1 — прямая сумма тех D_p, ранги которых бесконечны или, если они конечны, чётны, а D_2 — прямая сумма тех D_p, ранги которых конечны и нечётны. По лемме 1 достаточно показать, что D_1 и D_2 являются IG-группами. Группу D_1 можно представить в виде $D_1 = A \oplus B$, где $A \cong B$, поэтому по лемме 3 D_1 — IG-группа. Запишем D_2 в виде $D_2 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus C$, где A_1, A_2, A_3 — изоморфные делимые группы с p-компонентами ранга 1, а C — делимая группа с p-компонентами чётного ранга. По доказанному C является IG-группой, а $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ — IG-группа по лемме 3. $\square$

В примере 2.5 из [13] показано, что $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ не является IS-группой; при доказательстве использовался факт, что кольцо эндоморфизмов квазициклической p-группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — коммутативная область целостности, Это утверждение распространяется на всякую группу A, кольцо $\mathrm{E}(A)$ которой есть коммутативная область целостности; в частности, $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ не является IS-группой.

Напомним, что всякая ненулевая вполне разложимая группа без кручения G однозначно с точностью до изоморфизма представима в виде $G = \bigoplus\limits_{t \in \Omega} G_t$, где $G_t \neq 0$ — однородные вполне разложимые группы типа t (они называются *однородными компонентами* группы G), а Ω — некоторое множество типов. Напомним также, что если A — группа без кручения ранга 1, то кольцо $\mathrm{E}(A)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathbb{Q}$, порождённому 1 и всеми дробями $\frac{1}{p}$, где p — простое число, такими что $pA = A$ [4, пример 3.3].

Предложение 6. *Вполне разложимая группа без кручения G является IG-группой тогда и только тогда, когда каждая её однородная компонента, делимая хотя бы на одно простое число, имеет ранг не меньше* 2*; множество же однородных компонент, имеющих ранг* 1*, конечно.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если $t \in \Omega$, то подгруппа

$$G(t) = \bigoplus_{\tau \geqslant t} G_\tau = G_t \oplus \left(\bigoplus_{\tau > t} G_\tau \right)$$

будет вполне инвариантным прямым слагаемым в G. Поэтому по лемме 2 как $G(t)$, так и $\bigoplus\limits_{\tau > t} G_\tau$, а также G_t будут IG-группами. Если $r(G_t) = 1$, то единственными идемпотентами кольца $\mathrm{E}(G_t)$ будут 0 и 1, поэтому

$$\mathrm{E}(G_t) = \mathrm{Proj}(G_t) \cong \mathbb{Z}.$$

Следовательно, G_t не делима ни на одно простое число. Обозначим через T множество типов однородных компонент группы G, имеющих ранг 1 (и, следовательно, не делящихся ни на одно простое число). Допустим, что $t_1 > t_2 > \ldots$, где $t_i \in T$, $G_1 = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} G_{t_i}$. Тогда

$$\bar{G} = \bigoplus_{t \geqslant t_i\ (i=1,2,\ldots)} G_t, \quad G_2 = \bigoplus_{t > t_i\ (i=1,2,\ldots)} G_t$$

являются вполне инвариантными прямыми слагаемыми группы G. Так как $\bar{G} = G_1 \oplus G_2$, то по лемме 2 G_1 будет IG-группой. Каждый эндоморфизм группы G_1 можно представить в виде бесконечной треугольной матрицы

$$\Delta = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \ldots \\ \alpha_1 & \varphi_2 & 0 & \ldots \\ \alpha_2 & \beta_1 & \varphi_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Если $\Delta^2 = \Delta$, то все φ_i также являются идемпотентами; так как $r(G_{t_i}) = 1$, то по доказанному $\mathrm{E}(G_{t_i}) \cong \mathbb{Z}$, поэтому каждый φ_i совпадает с 0 или 1. Значит, если подобная треугольная матрица есть конечное произведение идемпотентных матриц, то её диагональные элементы будут совпадать с 0 или 1; а у матрицы, являющейся суммой m таких матриц, диагональные элементы не превосходят m. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \notin \mathrm{Proj}(G_1),$$

т. е. G_1 не является IG-группой. Поэтому T удовлетворяет условию максимальности. Аналогичным образом показывается, что T не содержит бесконечных подмножеств несравнимых типов. Следовательно, множество T конечно.

Достаточность. Имеем $G = G_0 \oplus \left(\bigoplus G_t\right)$, где G_0 — прямая сумма всех тех однородных компонент группы G, которые имеют ранг 1. Покажем, что $H = \bigoplus G_t$ является IG-группой; воспользуемся приёмом, использованном в предложении 5. Запишем H в виде $H = G_1 \oplus G_2$, где G_1 — прямая сумма тех G_t, ранги которых бесконечные или, если они конечные, чётные; G_2 — прямая сумма тех G_t, ранги которых конечные и нечётные. По лемме 1 достаточно показать, что G_1 и G_2 являются IG-группами. Группу G_1 можно представить в виде $G_1 = A \oplus B$, где $A \cong B$, поэтому по лемме 3 G_1 — IG-группа. Запишем G_2 в виде $G_2 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus C$, где A_1, A_2, A_3 — изоморфные вполне разложимые группы с однородными компонентами ранга 1, а C — вполне разложимая группа с однородными компонентами чётного ранга. По доказанному C является IG-группой, а $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ — IG-группа по лемме 3. Осталось показать, что G_0 будет IG-группой. Поскольку G_0 — вполне разложимая группа конечного ранга, то её можно записать в виде конечной прямой суммы групп C_i, каждая из которых представляет собой прямую сумму групп ранга 1, типы которых образуют конечную цепь; поскольку кольцо эндоморфизмов таких групп ранга 1 изоморфно $\mathbb{Z}$, то каждая из них является IG-группой. Для доказательства того, что C_i являются IG-группами, можно применить математическую индукцию, которая очевидным образом проверяется с помощью леммы 2. $\square$

Идея доказательства предыдущего утверждения, может быть использована для проверки справедливости следующего предложения.

Предложение 7. *Векторная группа без кручения $G = \prod_{t\in\Omega} G_t$, где G_t — прямое произведение групп ранга 1 типа t, Ω — некоторое множество типов, является IG-группой тогда и только тогда, когда каждая группа G_t, делимая хотя бы на одно простое число, имеет ранг не меньше 2; множество групп G_t, имеющих ранг 1, конечно.*

В [13] приведены примеры p-групп, не являющиеся IG-группами. При их построении использовалась теорема Корнера о реализации для колец эндоморфизмов сепарабельных p-групп (см., например, [4, § 28]). Аналогичным образом можно построить соответствующие примеры для других классов групп. Поскольку для групп без кручения они приводятся непосредственно, то ограничимся смешанными группами. Если у расщепляющейся смешанной группы периодическая часть или часть без кручения не является IG-группой, то и сама группа не является IG-группой. Рассмотрим случай нерасщепляющейся группы.

Пример 8. Пусть R — счётное кольцо, аддитивная группа R^+ которого является редуцированной группой без кручения и подкольцо, порождённое всеми идемпотентами кольца R, не совпадает с R. Тогда существует счётная редуцированная смешанная группа G со следующими свойствами:

1) фактор-группа $G/T(G)$ делима;
2) если R^+ имеет конечный ранг n, то ранг без кручения группы G равен $2n$;
3) G не является IG-группой.

Доказательство. Группа G со свойствами 1) и 2) существует согласно [4, следствие 30.5], причём $\mathrm{E}(G)^+ = R^+ \oplus \mathrm{E}_t(G)$; здесь $\mathrm{E}_t(G)$ — идеал кольца $\mathrm{E}(G)$, состоящий из эндоморфизмов, образы которых лежат в $T(G)$. Поэтому если бы $\mathrm{Proj}(G) = \mathrm{E}(G)$, то соответствующим свойством обладало бы и кольцо R, что доказывает (3). □

Замечание 9.

1. Если $G = A \oplus B$ и φ — такой эндоморфизм группы G, что $\varphi|A = \alpha \in \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $\varphi|B = 0$, то $\varphi \in \Pi(G)$ [13, лемма 3.11].
2. Если $G = A \oplus B$, где A вполне инвариантна в G, то эндоморфизм
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
группы G является её идемпотентом тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha^2$, $\gamma = \gamma^2$ и $\alpha\beta + \beta\gamma = \beta$.
3. Если $G = A \oplus B$, где A — вполне инвариантная подгруппа группы G, а G является pft-группой (spft-группой), то A и B являются pft-группами (соответственно spft-группами).

Доказательство. Докажем утверждение 1. Действительно,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Pi(G).$$

Утверждение 2 очевидно, а утверждение 3 вытекает из утверждения 2. $\square$

Отметим, что обратить утверждение 3 нельзя. В этом убеждает следующий простой пример.

Пример 10. Пусть A, B — группы без кручения ранга 1, $\mathrm{E}(A) \cong \mathrm{E}(B) \cong \mathbb{Z}$, $t(A) < t(B)$, $0 \neq a \in A$, $0 \neq b \in B$, p — простое число. Группа $A \oplus B$ не является pft-группой, так как не существует её эндоморфизма, переводящего элемент $pa + b$ в a. Группу B можно было выбрать и с несравнимым с $t(A)$ типом (тогда A и B — вполне инвариантные прямые слагаемые в $A \oplus B$).

Предложение 11. *Делимая группа $D = D_0 \oplus T(D)$ является pft-группой, если и только если $D_0 \neq 0$ влечёт $r(D_0) > 1$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Поскольку подгруппа $T(D)$ вполне инвариантна в D, то из п. 3 замечания 9 следует, что D_0 и $T(D)$ — pft-группы. Если $D_0 \neq 0$, то $r(D_0) > 1$, так как в противном случае

$$\mathrm{Proj}(D_0) \cong \mathbb{Z} \neq \mathrm{E}(D_0) \cong \mathbb{Q}.$$

Докажем достаточность. Всякая делимая группа вполне транзитивна, а поскольку при $r(D_0) > 1$ группа D_0 является IG-группой (лемма 3), то D_0 будет и pft-группой. Всякая же делимая p-группа является pft-группой [13, теорема 3.1]. Поэтому по лемме 4 $T(D)$ будет pft-группой. Допустим, что $H(a+b) \leqslant H(x+y)$ и $o(a+b) \preccurlyeq o(x+y)$, где $a, x \in D_0$, $b, y \in T(D)$. Если $a = 0$, то $x = 0$, и значит, $\varphi(b) = y$ для некоторого

$$\varphi \in \mathrm{Proj}\big(T(D)\big) \subseteq \mathrm{Proj}(D).$$

Если же $a \neq 0$, то $\varphi(a) = x$ и $\psi(a) = y$, где

$$\varphi \in \mathrm{Proj}(D_0) \subseteq \mathrm{Proj}(D),$$

$\psi \in \Pi(D)$ по утверждению 1 замечания 9. $\square$

Предложение 12. *Если $G = D \oplus A$, где D — делимая, A — редуцированная части группы G, то G является pft-группой (spft-группой) тогда и только тогда, когда D и A — pft-группы (соответственно spft-группы).*

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 3 замечания 9. Докажем достаточность. Пусть $H(a + b) \leqslant H(x + y)$ и $o(a + b) \preccurlyeq o(x + y)$, где $a, x \in D$ и $b, y \in A$. Заметим, что $H(a + b) = H(b)$ и $H(x + y) = H(y)$. Поэтому если $b = 0$, то $y = 0$, и в этом случае доказательство завершается по условию. Пусть $b \neq 0$. Если $y = 0$, то либо a, либо b можно отобразить нужным эндоморфзмом в x. Если же и $y \neq 0$, то $o(b) \preccurlyeq o(y)$, переводим b в y, а в x переводим a или b в зависимости от того, каковы их порядки. $\square$

Предложение 13. *Если* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *где каждая* A_i *является pft-группой* (*spft-группой*), *то* A *является pft-группой* (*соответственно spft-группой*) *тогда и только тогда, когда* A *вполне транзитивна.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что $H_A(a) \leqslant H_A(b)$ для некоторых $0 \neq a, b \in A$. Нужно показать, что существует $\alpha \in \mathrm{Proj}(A)$ со свойством $\alpha(a) = b$. Поскольку a и b являются суммами элементов из конечного множества некоторых A_i, то можно предполагать, что I конечно и, в частности, что $|I| = 2$. Итак, $A = A_1 \oplus A_2$. По предположению $\alpha(a) = b$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{E}(A)$. Пусть $\pi_i \colon A \to A_i$ — проекции, $i = 1, 2$; $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, где $a_i, b_i \in A_i$. Тогда

$$\alpha = (\pi_1 + \pi_2)\alpha(\pi_1 + \pi_2) = \pi_1\alpha\pi_1 + \pi_1\alpha\pi_2 + \pi_2\alpha\pi_1 + \pi_2\alpha\pi_2.$$

Имеем

$$\pi_i\alpha\pi_i \in \mathrm{E}(A_i) = \mathrm{Proj}(A_i) \subseteq \mathrm{Proj}(A)$$

и $\pi_1\alpha\pi_2, \pi_2\alpha\pi_1 \in \Pi(A)$ по замечанию 9, откуда следует, что $\alpha \in \mathrm{Proj}(A)$. □

Следствие 14. *Если* $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — *редуцированная группа без кручения и* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$ *или* $\mathrm{Hom}(A_j, A_i) = 0$ *для любых* $i \neq j$, *то* G *является pft-группой* (*spft-группой*) *тогда и только тогда, когда каждая* A_i *является pft-группой* (*соответственно spft-группой*) *и если* $pA_i \neq A_i$, *то* $pA_j = A_j$ *для каждого простого числа* p *и любых* $i \neq j$, *где* $i, j \in I$.

Доказательство. Докажем необходимость. Всякая pft-группа является вполне транзитивной, поэтому условие $pA_i \neq A_i$ влечёт $pA_j = A_j$ при $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$ или $\mathrm{Hom}(A_j, A_i) = 0$ (см., например, [1, теорема 3.20]), т. е. подгруппы A_i вполне инвариантны, поэтому по утверждению 3 замечания 9 все A_i являются pft-группами (соответственно spft-группами). Достаточность вытекает из вполне транзитивности группы G.

Для spft-групп доказательство аналогично. □

Следствие 15. *Пусть* $\kappa > 1$ *и* G *является* p*-группой или однородной группой без кручения. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) G *вполне транзитивна*;

б) $G^{(\kappa)}$ *вполне транзитивна*;

в) $G^{(\kappa)}$ *является pft-группой.*

Доказательство. Если G — p-группа, то эквивалентность условий а), б) и в) доказана в [13, теорема 3.7]. Если же G — однородная группа без кручения, то эквивалентность а) и б) отмечена в [4, § 25, упражнение 12]. Импликация в) $\Longrightarrow$ б) очевидна. Так как по лемме 3 $G^{(\kappa)}$ является IG-группой, то справедлива импликация б) $\Longrightarrow$ в). □

Лемма 16. *Если* A — *вполне транзитивная группа, все ненулевые эндоморфизмы которой суть мономорфизмы, то* A *является pft-группой* (*spft-группой*) *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{E}(A) \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. Докажем необходимость. Поскольку A неразложима, то $\mathrm{Proj}(A) \cong \mathbb{Z}$. Если теперь $\varphi \in \mathrm{E}(A)$, то для любого $0 \neq a \in A$ имеем $\chi(a) \leqslant \chi\big(\varphi(a)\big)$. По условию $\psi(a) = \varphi(a)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{Proj}(A)$, откуда следует, что $\varphi = \psi$.

Докажем достаточность. Если $\chi(a) \leqslant \chi(b)$, то в силу вполне транзитивности $b = f(a)$ для некоторого $f \in \mathrm{E}(A)$. По условию $\mathrm{Proj}(A) = \mathrm{E}(A)$. $\square$

Напомним следующее понятие. Говорят, что p-группы G_1 и G_2 образуют *вполне транзитивную пару*, если для любых ненулевых $x \in G_i$ и $y \in G_j$ $(i, j \in \{1, 2\})$ условие $U_{G_i}(x) \leqslant U_{G_j}(y)$ влечёт существование такого $\alpha \in \mathrm{Hom}(G_i, G_j)$, что $\alpha(x) = y$. В [14] доказано, что если $\{G_i\}_{i \in I}$ — такое множество p-групп, что для любых $i, j \in I$ пара $\{G_i, G_j\}$ вполне транзитивна, то $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ является вполне транзитивной группой.

Группа $A \oplus B$ из примера 10 показывает, что прямая сумма двух групп без кручения, образующих вполне транзитивную пару, не обязана быть вполне транзитивной.

В [1] для описания прямых сумм вполне транзитивных групп введено и изучалось понятие системы групп, удовлетворяющих *условию монотонности* для высотных матриц. В [5] найдены некоторые достаточные условия, при которых система групп без кручения удовлетворяет условию монотонности.

Заметим также, что в [15, лемма 2.2] доказано, что p-группа G является вполне транзитивной тогда и только тогда, когда для любых $0 \neq x, y \in G$ с условием $py = 0$ и $U_G(x) \leqslant U_G(y)$ существует такой $\alpha \in \mathrm{E}(G)$, что $\alpha(x) = y$ Это утверждение доказывается индукцией по порядку элемента y: предположим, что $o(y) = p^{n+1}$ и $U_G(x) \leqslant U_G(y)$; если $\varphi(px) = py$ и $\psi(x) = y - \varphi(x)$, то $(\varphi + \psi)x = y$. Аналогичным образом образом доказывается, что если G — p-группа, то для любых $a \in A$, $b \in G$ с условием $H_A(a) \leqslant H_G(b)$ существует $f \in \mathrm{Hom}(A, G)$ со свойством $f(a) = b$ тогда и только тогда, когда такой f существует для любых $a \in A$, $b \in G[p]$ с условием $H_A(a) \leqslant H_G(b)$.

Следующее утверждение — аналог теоремы 1.1 из [15].

Предложение 17. *Если $\{G_i\}_{i \in I}$ — p-группы, являющиеся pft-группами (spft-группами), то периодическая часть $H = T\Big(\prod\limits_{i \in I} G_i\Big)$ будет pft-группой (соответственно spft-группой) тогда и только тогда, когда для любых $i, j \in I$ пара (G_i, G_j) вполне транзитивна.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Пусть $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ и $U_H(x) \leqslant U_H(y)$, где $x = (\ldots, x_i, \ldots), y = (\ldots, y_i, \ldots) \in H$, $py = 0$ (см. замечание перед предложением). Поскольку

$$h_H(x) = \inf\{h_{G_i}(x_i),\ i \in I\},$$

то существует $i \in I$ со свойством $h_H(x) = h_{G_i}(x_i)$; можно считать, что $i = 1$. Так как $py = 0$, то $U_{G_1}(x_1) \leqslant U_H(y) \leqslant U_{G_i}(y_i)$ для каждого i и поэтому

$\alpha_i(x_1) = y_i$, где $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(G_1, G_i)$ и $i \in I$. Имеем

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots \\ \alpha_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \in \Pi(G).$$

Далее, $\alpha_1 \in \mathrm{Proj}(G_1) \subseteq \mathrm{Proj}(G)$, $(\alpha_1 + \varphi)x = y$ и ограничение $\alpha_1 + \varphi$ на H является эндоморфизмом группы H.

Для spft-групп доказательство аналогично. □

Поскольку любые две сепарабельные или тотально проективные p-группы образуют вполне транзитивную пару, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 18. *Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ — p-группы, являющиеся либо сепарабельными, либо тотально проективными pft-группами (spft-группами). Тогда периодическая часть $H = t\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i\Big)$ будет pft-группой (соответственно spft-группой).*

Теорема 19. *Пусть $G = A \oplus T$, где A — редуцированная группа без кручения, T — редуцированная периодическая группа. Тогда G будет pft-группой (spft-группой) тогда и только тогда, когда A и T являются pft-группами (соответственно spft-группами).*

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 3 замечания 9.

Докажем достаточность. Пусть $H(x) \leqslant H(y)$ для некоторых $x = a + b$, $y = c + d$, где $a, c \in A$ и $b, d \in T$. Тогда $H(x) \leqslant H(c), H(d)$. Достаточно показать, что существуют такие $\alpha, \beta \in \mathrm{Proj}(G)$, что $\alpha(x) = c$, $\beta(x) = d$.

Рассмотрим сначала случай $H(a + b) \leqslant H(c)$. Заметим, что $H(a) \leqslant H(c)$. Действительно, если $h_p(b) = \infty$, то $H_p(a + b) = H_p(a)$. Если же $h_p(b) < \infty$, то $h_p(p^k b) = \infty$ для некоторого натурального k, откуда следует, что $h_p\big(p^k(a+b)\big) = h_p(p^k a) \leqslant h_p(p^k c)$, значит, $h_p(a) \leqslant h_p(c)$ и $H_p(a) \leqslant H_p(c)$. Следовательно, $\alpha(a) = c$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{Proj}(A) \subseteq \mathrm{Proj}(G)$.

Перейдём к неравенству $H(a + b) \leqslant H(d)$. Имеем $d = d_1 + \ldots + d_k$, где d_i принадлежат p_i-компонентам T_{p_i} группы T и $H(d) \leqslant H(d_i)$ для каждого $i = 1, \ldots, k$, поэтому достаточно предположить, что $d \in T_p$ для некоторого p. Согласно сделанному ранее замечанию можно считать, что $d \in T[p]$.

Если $H(b) \leqslant H(d)$, то в силу условия на T такой β найдётся. Предположим теперь, что $H(a) \leqslant H(d)$. Если $h_p(d) = \infty$, то $H(b) \leqslant H(d)$, поэтому пусть $h_p(d) < \infty$ и $h_p(a) = n$. Поскольку группа T редуцированная, то в T_p найдётся циклическое прямое слагаемое $\langle z\rangle$, такое что $o(z) > p^n$. Имеем $H(a) \leqslant H(p^n z) \leqslant H(d)$. Поэтому существуют гомоморфизмы $f\colon \langle a\rangle_* \to \langle z\rangle \subseteq T$, $f(a) = p^n z$, где $\langle a\rangle_*$ — чистая подгруппа в A, порождённая a. Ограниченная группа $\langle z\rangle$ является алгебраически компактной, поэтому гомоморфизм f продолжается до гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, T)$. По условию $\gamma(p^n z) = d$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{E}(T)$, откуда следует, что $\gamma\varphi(a) = d$, и согласно замечанию 9 $\gamma\varphi \in \Pi(G)$.

В заключение заметим, что поскольку $h_q(d) = \infty$ для каждого простого $q \neq p$ и $H_p(d) = (h_p(d), \infty, \ldots)$, то случай $H(a), H(b) \nleqslant H(d)$ невозможен. □

Группа $\mathbb{Q}^{(n)}$ при $n=1$ не является spft-группой. При $n=2$ эндоморфизм, представленный, например, матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{n} & \frac{mk}{ns}-\frac{m^2k}{n^2s} \\ \frac{s}{k} & 1-\frac{m}{n} \end{pmatrix},$$

где $\frac{m}{n},\frac{s}{k}\in\mathbb{Q}$ и $\frac{s}{k}\neq 0$, будет идемпотентным. При $n=3$ для любых $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 2-c-d & a & \frac{ab}{d-1} \\ \frac{(d-1)(1-c-d)}{a} & d & b \\ \frac{(c-1)(d-1)(1-c-d)}{ab} & \frac{(c-1)(d-1)}{b} & c \end{pmatrix} \quad (a,b\neq 0,\ d\neq 1)$$

и

$$\begin{pmatrix} 1-c-d & a & \frac{ab}{d} \\ \frac{(1-c-d)d}{a} & d & b \\ \frac{(1-c-d)cd}{ab} & \frac{cd}{b} & c \end{pmatrix} \quad (a,b,d\neq 0),$$

а также

$$\begin{pmatrix} 1-c & a & 0 \\ \frac{c(1-c)}{a} & c & 0 \\ b & -\frac{ab}{c} & 1 \end{pmatrix} \quad (a,c\neq 0) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{bc}{1-a} & a & b \\ c & \frac{a(1-a)}{b} & 1-a \end{pmatrix} \quad (a\neq 1,\ b\neq 0)$$

будут идемпотентными.

Лемма 20. *Пусть A — вполне транзитивная группа, G — такая группа, что каждый её элемент содержится в прямом слагаемом, изоморфном группе A, причём дополнительное прямое слагаемое отлично от 0 и также обладает указанным свойством. Тогда G является spft-группой.*

Доказательство. Пусть $H(x)\leqslant H(y)$ и $o(x)\preccurlyeq o(y)$, $G=B\oplus C$, где $x\in$ $\in B\cong A$, $y=a+b$, $a\in B$, $b\in C$, причём $C\neq 0$ и ввиду условия на группу G можно считать, что $C\cong A$. Если $o(x)$ конечен, то $o(y)\mid o(x)$, а так как в этом случае $o(a),o(b)\mid o(y)$, то $o(a),o(b)\mid o(x)$. Итак, $H(x)\leqslant H(a),H(b)$ и $o(x)\preccurlyeq o(a),o(b)$. Ввиду вполне транзитивности существует эндоморфизм группы G, переводящий x в b. Согласно замечанию 9 его можно выбрать из $\Pi(G)$. Пусть $\alpha(x)=a$, где $\alpha\in\mathrm{E}(B)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha & (1-\alpha)(\alpha-2) \\ 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-1 & (1-\alpha)(\alpha-2) \\ 1 & 2-\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \Pi(G),$$

и матрица переводит элемент x в a. $\square$

Следствие 21. *Делимая группа $D=D_0\oplus T(D)$ является spft-группой тогда и только тогда, когда $D_0\neq 0$ влечёт $r(D_0)>1$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из предложения 11. Докажем достаточность. Из леммы 20 следует, что D_0 является spft-группой. Всякая делимая p-группа является spft-группой [13, следствие 4.4]. Из леммы 4 следует, что

$T(D)$ будет spft-группой. Теперь так же, как в предложении 11, доказывается, что D является spft-группой. $\square$

Напомним, что сепарабельная группа без кручения $G \neq 0$ является вполне транзитивной тогда и только тогда, когда G представима в виде $G = \bigoplus\limits_{t\in\Omega} G_t$, где $G_t \neq 0$ — однородные сепарабельные группы типа t, Ω — некоторое множество типов, причём для всякого простого числа p и любых $t_1, t_2 \in \Omega$, если $pG_{t_1} \neq G_{t_1}$, то $pG_{t_2} = G_{t_2}$ при $t_1 \neq t_2$ [4, § 19, упр. 7; § 42, упр. 4]. Аналогично векторная группа без кручения $G \neq 0$ является вполне транзитивной тогда и только тогда, когда она представима в виде $G = \prod\limits_{t\in\Omega} G_t$, где $G_t \neq 0$ — прямое произведение групп без кручения ранга 1 типа t, а Ω — некоторое множество типов, причём для всякого простого числа p и любых $t_1, t_2 \in \Omega$, если $pG_{t_1} \neq G_{t_1}$, то $pG_{t_2} = G_{t_2}$ при $t_1 \neq t_2$.

Следствие 22. *Редуцированная сепарабельная группа без кручения $G = \bigoplus\limits_{t\in\Omega} G_t$ ранга не меньше 2 является pft-группой (spft-группой) тогда и только тогда, когда $r(G_t) > 1$ для каждого $t \in \Omega$, причём для всякого простого числа p и любых $t_1, t_2 \in \Omega$ если $pG_{t_1} \neq G_{t_1}$, то $pG_{t_2} = G_{t_2}$ при $t_1 \neq t_2$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность следует из предложения 13 и леммы 20. $\square$

Следствие 23. *Редуцированная векторная группа без кручения $G = \prod\limits_{t\in\Omega} G_t$ ранга не меньше 2 является pft-группой тогда и только тогда, когда $r(G_t) > 1$ для каждого $t \in \Omega$, причём для всякого простого числа p и любых $t_1, t_2 \in \Omega$ если $pG_{t_1} \neq G_{t_1}$, то $pG_{t_2} = G_{t_2}$ при $t_1 \neq t_2$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для завершения доказательства достаточно показать, что G является IG-группой, но это непосредственно следует из предложения 7. $\square$

Напомним, что если p — простое число, то *p-рангом* $r_p(A)$ группы A называется ранг фактор-группы A/pA. Всякая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения $G \neq 0$ представима в виде $G = \prod\limits_{p\in\Pi} G_p$, где $G_p \neq 0$ — p-адические алгебраически компактные группы, а Π — некоторое множество простых чисел.

Аналогично следствию 23 доказывается следующее утверждение.

Следствие 24. *Редуцированная алгебраически компактная группа без кручения $G = \prod\limits_{p\in\Pi} G_p$ является pft-группой тогда и только тогда, когда $r_p(G_p) > 1$ для каждого $p \in \Pi$.*

Напомним, что группа называется *сепарабельной* [10, § 65], если каждый её элемент содержится в прямом слагаемом, являющемся прямой суммой групп ранга 1.

Обозначим через $r_0(G)$ ранг без кручения группы G.

Следствие 25. *Редуцированная сепарабельная группа G, где $r_0(G) \geqslant 2$, является pft-группой (spft-группой) тогда и только тогда, когда для любых её неизоморфных прямых слагаемых без кручения G_1, G_2 ранга 1 и каждого простого числа p если $pG_1 \neq G_1$, то $pG_2 = G_2$, причём если A — прямое слагаемое без кручения ранга 1 группы G, то в G найдётся такая подгруппа $B \cong A$, что $A \oplus B$ — прямое слагаемое группы G.*

Доказательство. Необходимость следует из описания вполне транзитивных сепарабельных групп. Достаточность вытекает из следствия 22, теоремы 19 и из того, что всякая периодическая сепарабельная группа является spft-группой [13, следствие 4.2]. □

Литература

[1] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 407—473.

[2] Крылов П. А. Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. — 1990. — Т. 29, № 5. — С. 549—560.

[3] Крылов П. А. О прямых суммах сильно однородных абелевых групп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1991. — Вып. 2. — С. 65—68.

[4] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2007.

[5] Чехлов А. Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. — 2001. — Т. 42, № 3. — С. 714—719.

[6] Чехлов А. Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 6. — С. 944—949.

[7] Чехлов А. Р. О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, № 5. — С. 1157—1165.

[8] Чехлов А. Р. О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, № 2. — С. 451—464.

[9] Чехлов А. Р. Слабо транзитивные E-энгелевы абелевы группы без кручения // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 4. — С. 620—627.

[10] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.

[11] Carroll D., Goldsmith B. On transitive and fully transitive Abelian p-groups // Math. Proc. Royal Irish Acad. — 1996. — Vol. 96. — P. 33—41.

[12] Danchev P., Goldsmith B. On socle-regularity and some notions of transitivity for Abelian p-groups // J. Comm. Algebra. — 2011. — Vol. 3. — P. 301—319.

[13] Danchev P., Goldsmith B. On projectively fully transitive Abelian p-groups // Results Math. — 2013. — Vol. 63. — P. 1109—1130.

[14] Files S., Goldsmith B. Transitive and fully transitive groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 1605—1610.

[15] Goldsmith B., Strüngmann L. Some transitivity results for torsion Abelian groups // Houston J. Math. — 2007. — Vol. 23. — P. 941—957.

[16] Grinshpon S. Ya., Krylov P. A. Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 128. — P. 2894—2997.

[17] Hill P. On transitive and fully transitive primary groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 22. — P. 414—417.