О слабо транзитивных абелевых группах без кручения

А. Р. ЧЕХЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: cheklov@math.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: слабо транзитивная группа, слабо транзитивный эндоморфизм, мономорфизм, чистая подгруппа, квазиоднородная группа без кручения.

Аннотация

Описаны квазиоднородные слабо транзитивные группы без кручения ранга 2 и показано, что всякая группа без кручения конечного ранга с сильно неразложимыми чистыми подгруппами является слабо транзитивной.

Abstract

A. R. Chekhlov, On weakly transitive torsion-free Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 191—194.

Quasi-homogeneous weakly transitive rank 2 torsion-free groups are described, and any finite rank torsion-free group with strongly indecomposable pure subgroups is shown to be weakly transitive.

Следуя [8], группу без кручения G назовём *слабо транзитивной*, если для любых $a, b \in G$ и эндоморфизмов $\varphi, \psi \in E(G)$ из того, что $\varphi a = b$ и $\psi b = a$, следует существование автоморфизма α группы G с условием $\alpha a = b$.

Напомним, что группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых $0 \neq a, b \in G$ из условия на их характеристики $\chi(a) \leqslant \chi(b)$ следует, что $\alpha a = b$ для некоторого эндоморфизма α группы G. Если из $\chi(a) = \chi(b)$ следует существование автоморфизма (эндоморфизма) α со свойством $\alpha a = b$, то такая группа называется *транзитивной* (*эндотранзитивной* или, согласно [9], *транзитивной по Крылову*). Вполне транзитивным и транзитивным группам без кручения посвящена глава 7 книги [3]. Эндотранзитивные группы изучались в [1, 2, 5—7]. В [8] показано, что вполне транзитивная группа без кручения транзитивна тогда и только тогда, когда она является слабо транзитивной группой. Всякая группа, все ненулевые эндоморфизмы которой являются мономорфизмами, будет слабо транзитивной; это обстоятельство, в частности, даёт примеры слабо транзитивных групп, не являющихся ни транзитивными, ни вполне транзитивными группами. В [1,5] построены примеры транзитивных, не вполне транзитивных групп без кручения.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 191—194.

Через B^- обозначается замыкание в $\mathbb{Z}$-адической топологии подмножества B некоторой группы; $\langle B \rangle_*$ — чистая подгруппа, порождённая подмножеством B; $t(a)$ — тип элемента a группы без кручения. Группа без кручения A называется *квазиоднородной*, если для всякой её чистой подгруппы $G \neq 0$ и любого простого числа p условие $pG = G$ влечёт $pA = A$.

Следующая лемма легко проверяется.

Лемма 1.

1. *Если A — редуцированная группа без кручения с сильно неразложимыми чистыми подгруппами и φ — её гомоморфизм с ненулевым ядром в группу без кручения, то $t(a) < t(\varphi a)$ для каждого $0 \neq a \in A$.*
2. *Если $B \oplus G$ — чистая подгруппа редуцированной группы без кручения A, то $B^- \cap G^- = 0$ и $B^- \oplus G^-$ также является её чистой подгруппой.*

Предложение 2. *Если A — редуцированная группа без кручения с сильно неразложимыми чистыми подгруппами и множество $T(A)$ типов всех её ненулевых элементов удовлетворяет условию максимальности, то A является слабо транзитивной.*

Доказательство. Пусть $\varphi a = b$ и $\psi b = a$ для некоторых $0 \neq a, b \in A$ и $\varphi, \psi \in E(A)$. В силу леммы 1 φ и ψ являются мономорфизмами. Осталось показать, что φ и ψ — эпиморфизмы. Если $\alpha = 1 - \varphi\psi$, то $\alpha b = 0$. Следовательно, $t(c) < t(\alpha c)$ для каждого $0 \neq c \in A$. В силу условия на $T(A)$ $\alpha^n c = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $c \in \varphi A$. Таким образом, φ — эпиморфизм. □

Следствие 3. *Всякая группа без кручения конечного ранга с сильно неразложимыми чистыми подгруппами является слабо транзитивной.*

Эндоморфизм $\varphi \in E(A)$ назовём *слабо транзитивным*, если $\varphi a = b$ и $\psi b = a$ для некоторых $0 \neq a, b \in A$ и $\psi \in E(A)$ (элемент a в этом случае назовём *слабо φ-транзитивным*).

Следствие 4. *Пусть A — такая группа, что если $\ker \alpha \neq 0$, то $\alpha^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда всякий слабо транзитивный эндоморфизм группы A является эпиморфизмом.*

Лемма 5. *Пусть A — редуцированная группа без кручения. Тогда*

1) *если $\chi(a) = \chi(\varphi a)$ для некоторых $\varphi \in E(A)$ и $a \in A$, то $\langle a \rangle_\star \oplus \ker \varphi$ — чистая подгруппа в A;*
2) *если a — φ-слабо транзитивный элемент, то $G = \langle a \rangle^- \oplus \ker \varphi$ — замкнутая чистая подгруппа группы A;*
3) *если в A нет разложимых замкнутых чистых подгрупп, то все её слабо транзитивные эндоморфизмы являются мономорфизмами.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $px = ra + y$ для некоторых $r \in \mathbb{Q}$ и $y \in \ker \varphi$, где $h_p(ra) = h_p(y) = 0$. Тогда $p\varphi x = r\varphi a$, что противоречит равенству $h_p(a) = h_p(\varphi a) = h_p(r\varphi a) = 0$.

Докажем утверждение 2). Так как $\langle a\rangle^- = (\langle a\rangle_*)^-$, то ввиду леммы 1 по доказанному утверждению 1) осталось показать замкнутость G в A. Пусть $z \in G^-$. Тогда $z = r_n a + y_n + n x_n$ для некоторых $r_n \in \mathbb{Q}$, $y_n \in \ker\varphi$, $x_n \in A$ и $n \in \mathbb{N}$. Имеем $\psi\varphi z = r_n a + n(\psi\phi x_n)$, т. е. $\psi\varphi z \in \langle a\rangle^-$. Кроме того, $(1-\psi\varphi)z = y_n + n(1-\psi\varphi)x_n \in \ker\varphi$, откуда следует, что $z = \psi\varphi z + (1-\psi\varphi)z \in G$.

Утверждение 3) вытекает из 2). □

Если R — группа без кручения ранга 1 (т. е. подгруппа аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$), то через $U(R)$ обозначим подгруппу мультипликативной группы $\mathbb{Q}^*$, порождённую всеми простыми числами p со свойством $pR = R$ (множество всех таких p обозначим через $P(R)$).

Ясно, что сепарабельная группа без кручения слабо транзитивна тогда и только тогда, когда каждое её прямое слагаемое конечного ранга слабо транзитивно. Поэтому представляет интерес следующее утверждение.

Теорема 6 [8, теорема 3.17]. *Пусть C — вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Тогда если R — группа без кручения ранга 1, тип которой больше типа каждого ненулевого элемента группы C, то группа $R \oplus C$ слабо транзитивна тогда и только тогда, когда*

i) *C слабо транзитивна;*

ii) *для каждой пары $m, n \in \mathbb{N}$, таких что $(m,n) = 1$ и $(m,p) = (n,p) = 1$ для всех $p \in P(R)$, найдутся $u \in U(R)$ и $r \in R$ со свойством $um + rn = 1$.*

Теорема 7. *Если A — квазиоднородная группа без кручения ранга 2, то A является слабо транзитивной тогда и только тогда, когда A удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *A — сильно неразложимая группа;*
2) *A — однородная вполне разложимая группа;*
3) *$A = B \oplus G$, где $t(G) > t(B)$ и группа G удовлетворяет условию ii) теоремы 6;*
4) *кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A коммутативно.*

Доказательство. Докажем необходимость. Допустим, что $nA \subseteq X \oplus G$, где $r(X) = r(G) = 1$, X и G — чистые подгруппы в A. Если $t(G) \geqslant t(X)$, то $t(A/G) = t(X)$ и каждый ненулевой элемент из $A \setminus G$ имеет тип $t(X)$. Поэтому G — прямое слагаемое в A, $A = B \oplus G$, где $t(B) = t(X) \leqslant t(G)$. Если $t(B) = t(G)$, то A — однородная вполне разложимая группа. Допустим, что $t(B) < t(G)$, тогда по теореме 6 группа G удовлетворяет условию ii). Допустим теперь, что типы $t(X)$ и $t(G)$ не сравнимы. Тогда $\mathrm{Hom}(X, G) = \mathrm{Hom}(G, X) = 0$, и значит, кольцо квазиэндоморфизмов группы $X \oplus G$ коммутативно, кольцо квазиэндоморфизмов группы A совпадает с этим кольцом, поэтому кольцо $E(A)$ как подкольцо коммутативного кольца также коммутативно. Отметим, что условие 1) является частным случаем 4), так как кольцо эндоморфизмов сильно неразложимой группы без кручения ранга 2 коммутативно.

Докажем достаточность. Однородная вполне разложимая группа является транзитивной (в частности, слабо транзитивной), утверждение 3) вытекает из теоремы 6, поэтому ввиду следствия 3 перейдём к утверждению 4). Пусть $\varphi a = b$ и $\psi b = a$ для некоторых $0 \neq a, b \in A$ и $\varphi, \psi \in E(A)$. Если $\langle a\rangle_* = \langle b\rangle_* = H$, то $\varphi|H$ и $\psi|H$ — взаимно обратные автоморфизмы группы H. Поэтому φ и ψ действуют на H как умножения на рациональные числа, числители и знаменатели которых делят H и, значит, A в силу квазиоднородности. Поэтому $\varphi|H$ и $\psi|H$ продолжатся до взаимно обратных автоморфизмов группы A. Если же $\langle a\rangle_* \neq \langle b\rangle_*$, то $\langle a, b\rangle_* = A$, а так как $a, b \in \ker(1 - \varphi\psi)$ (в силу равенства $\varphi\psi = \psi\varphi$), то $\varphi\psi = 1$, т. е. φ и ψ — автоморфизмы группы A. □

Интерес представляют решения следующих задач.

1. Описать слабо транзитивные группы в классах групп без кручения конечного ранга и однородных групп без кручения.
2. Найти необходимые и достаточные условия слабой транзитивности прямой суммы $\bigoplus\limits_i A_i$ и прямого произведения $\prod\limits_i A_i$ некоторых групп A_i.
3. Изучить группы без кручения A, такие что $\bigoplus\limits_m A$ и $\prod\limits_m A$ будут слабо транзитивными группами, где m — некоторое кардинальное число.

Литература

[1] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1985. — С. 31—41.

[2] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1986. — С. 36—53.

[3] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2007.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[5] Чехлов А. Р. О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Абелевы группы и модули. — 1989. — С. 139—153.

[6] Чехлов А. Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 6. — С. 944—949.

[7] Чехлов А. Р. Слабо транзитивные E-энгелевы абелевы группы без кручения // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 4. — С. 620—627.

[8] Goldsmith B., Strüngmann L. Torsion-free weakly transitive Abelian groups // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33, no. 4. — P. 1177—1191.

[9] Goldsmith B., Strüngmann L. Some transitivity results for torsion Abelian groups // Houston J. Math. — 2007. — Vol. 23. — P. 941—957.