Некоторые формулы для обычных функций и гиперфункций Бесселя—Клиффорда, связанные с собственной группой Лоренца

И. А. ШИЛИН
Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Московский педагогический государственный университет
e-mail: ilyashilin@li.ru

ДЖ. ЧОЙ
Университет Донгук, Южная Корея
e-mail: junesang@dongguk.ac.kr

УДК 517.584+517.986.68

Ключевые слова: функции Бесселя—Клиффорда, гиперфункции Бесселя—Клиффорда, собственная группа Лоренца.

Аннотация

Показано, что матричные элементы некоторых операторов представления группы Лоренца и операторов перехода между базисами пространства представления выражаются через модифицированные функции Бесселя—Клиффорда и введённые авторами (через определённые Делерю гиперфункции Бесселя) их мультииндексные аналоги.

Abstract

I. A. Shilin, J. Choi, Some formulas for ordinary and hyper Bessel–Clifford functions related to the proper Lorentz group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 195—208.

In this paper, we show that the matrix elements of some Lorentz group representation operators and bases transform operators acting in the representation space, may be expressed in terms of the modified Bessel—Clifford functions and their multi-index analogs introduced by the authors via Delerue hyper Bessel functions.

1. Введение

При решении некоторых задач, относящихся к разным разделам математики и её приложениям, статистике, ядерной физике и т. д., появились и были изучены обобщения некоторых известных специальных функций. Например, У. К. Клиффордом [11] через функции Бесселя I_ν и Макдональда K_ν были введены так называемые модифицированные функции Бесселя—Клиффорда $\mathcal{C}_\nu(z) = z^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{z})$ и $\mathcal{K}_\nu(z) = z^{-\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{z})$ первого и второго рода, которые позднее были использованы для описания решений волнового уравнения

Колумба [7] и асимптотического разложения дельта-функции [18]. Функции $\mathcal{C}_\nu$ и $\mathcal{K}_\nu$, кроме того, оказались частными случаями функции Райта, играющей важнейшую роль в теории специальных функций дробного исчисления (см., например, [20]). С другой стороны, функции $\mathcal{C}_\nu$ и $\mathcal{K}_\nu$ могут рассматриваться как частные случаи функций двух переменных, являющихся коэффициентами $\mathcal{D}_n^{(1,m)}(a,b)$ в разложении Лорана

$$\exp\left(ax - \frac{y}{x^m}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_n^{(1,m)}(a,b)\, x^n$$

функции $\exp(ax - \frac{y}{x^m})$ [12], которая, как будет показано в этой статье, связана с матричными элементами одного сужения оператора представления группы Лоренца.

Для описания явных решений задачи отражения и дифракции атомных волн де Бройля Н. С. Витте [28] ввёл так называемую бесселеву гиперфункцию первого рода

$${}_0f_3(a,b,c;z) = \{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\}^{-1}\, {}_0F_3(a,b,c;z),$$

где Γ — гамма-функция и ${}_pF_q$ — обобщённая гипергеометрическая функция. П. Делерю [13] определил модифицированные гиперфункции первого рода

$$I_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(z) = \frac{(\frac{z}{n+1})^{\nu_1+\ldots+\nu_n}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(\nu_i+1)}\, {}_0F_n\left[-;\nu_1+1,\,\ldots,\,\nu_n+1;\,\left(\frac{z}{n+1}\right)^{n+1}\right],$$

которые три десятилетия спустя были переоткрыты М. И. Ключанцевым [4] и затем использованы, например, в квантовой механике [21], дробном исчислении [19], теории функций Миттаг-Леффлера [17]. Свойства функций $I_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ были изучены недавно в [8, 22]. В разделах 4 и 5 настоящей работы соответственно определена гиперфункция Бесселя—Клиффорда $\mathcal{C}_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ и получены формулы, связывающие её с (обычными) функциями Бесселя—Клиффорда.

Большинство специальных функций математической физики и их аналоги возникают в матричных элементах представлений групп и матричных элементах невырожденных линейных преобразований пространства представления. Пусть, например, G — собственная группа Лоренца. Левое квазирегулярное представление T этой группы реализуется в пространстве $\mathfrak{D}$ σ-однородных бесконечно дифференцируемых функций на конусе Λ: $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$, где T отображает элемент g в линейный оператор, «сдвигающий» функцию f по правилу $f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$ [2]. И. А. Шилин и Дж. Чой [24] выразили матричные элементы линейного оператора, переводящего так называемый сферический базис

$$B_1 = \{f_{p_1,q_1} \mid p_1 \in \{0,1,2,3,\ldots,\},\ q_1 \in \mathbb{Z},\ |q_1| \leqslant p_1\}$$

пространства $\mathfrak{D}$, где

$$f_{p_1,q_1}(x) = x_1^{\sigma-|q_1|} C_{p_1-|q_1|}^{|q_1|+\frac{1}{2}}\left(\frac{x_4}{x_1}\right)(x_3 + \mathbf{i}x_2 \operatorname{sign} q_1)^{|q_1|},$$

в гиперболический базис, через обобщённую гипергеометрическую функцию ${}_4F_3$ и, опираясь на эти результаты, выразили через ${}_4F_3$ значения некоторых интегралов, содержащих функции Лежандра. Для трёхмерного аналога группы G ими [10, 25] рассмотрены сужения матричных элементов представления T на некоторые диагональные и блочно-диагональные матрицы и получены явные выражения для этих сужений относительно так называемого параболического базиса

$$B_2 = \{f_{p_2,q_2} \mid p_2 \geqslant 0,\ q_2 \in \mathbb{Z}\},$$

где

$$f^*_{p_2,q_2}(x) = (x_1+x_4)^\sigma (x_2^2+x_3^2)^{-\frac{|q_2|}{2}} J_{|q_2|}\left(\frac{p_2\sqrt{x_2^2+x_3^2}}{x_1+x_4}\right)(x_2+\mathbf{i}x_2 \operatorname{sign} q_2)^{|q_2|}.$$

2. Выражение матричных элементов главной и побочной диагоналей оператора $T^\bullet(a)$ относительно второго параболического базиса через функции Бесселя—Клиффорда

Параболическое сечение $\gamma\colon x_1+x_4=1$ конуса Λ может быть параметризовано следующим образом:

$$\gamma = \left\{\left(\frac{1+\alpha_1^2-\beta_1^2}{2},\ \alpha_1, \beta_1, \frac{1-\alpha_1^2+\beta_1^2}{2}\right) \Bigm| \alpha_1,\beta_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Для произвольных $s,t\in\mathbb{R}$ определим матрицу

$$g(s,t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{s^2-t^2}{2} & s & t & \frac{s^2-t^2}{2} \\ s & 1 & 0 & s \\ t & 0 & 1 & t \\ \frac{t^2-s^2}{2} & -s & -t & 1+\frac{t^2-s^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что $g(s,t)\in G$, подмножество H матриц $g(s,t)$ в G является подгруппой, причём $g^{-1}(s,t) = g(-s,-t)$. Поскольку сечение γ представляет собой H-орбиту точки $(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, это сечение является однородным пространством подгруппы H, т. е. для любых точек $x(p_1,q_1)\in\gamma$ и $\hat{x}(\hat{p}_1,\hat{q}_1)\in\gamma$ имеем $g(\hat{p}_1-p_1, \hat{q}_1-q_1)(x)=\hat{x}$. Функции

$$F(p_3,q_3) = \exp\frac{(p_3x_2+q_3x_3)\mathbf{i}}{x_1+x_4},$$

определённые на γ, являются собственными функциями оператора $T\bigl(g(s,t)\bigr)$, отвечающими собственному значению $\exp(-[p_3s+q_3t]\mathbf{i})$. Поскольку каждая точка $y\in\Lambda$ может быть представлена в виде $y=rx$, где $x\in\gamma$, $r\in\mathbb{R}$, и функции, принадлежащие линейному пространству $\mathfrak{D}$, σ-однородны, функцию F можно продолжить по непрерывности на весь конус Λ. Таким образом, функции $f^{**}_{p_3,q_3} = (x_2+x_4)^\sigma F(p_3,q_3)$ образуют второй параболический базис

$$B_3 = \{f^{**}_{p_3,q_3} \mid p_3,q_3 \in \mathbb{R}\}$$

в $\mathfrak{D}$. Для этих базисных функций введём $\Omega = \frac{1}{4}(p_3^2+q_3^2)$.

Пусть $\mathfrak{D}^\bullet$ будет дополнительным пространством представления с условием $\sigma^\bullet = -\sigma - 2$. Далее мы используем билинейный функционал

$$\mathsf{F}\colon \mathfrak{D}\times\mathfrak{D}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (f,g)\longmapsto \int\limits_\gamma f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

в котором $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_j$ $(j=2,3,4)$ обозначает инвариантную относительно H меру на γ.

Пусть $g\in G$. Обозначим через $t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat p_3,\hat q_3}(g)$ матричные элементы оператора $T^\bullet(g)$ относительно базиса $B_3^\bullet$, т. е. положим, что

$$T^\bullet(g)[f^{\bullet**}_{p_3,q_3}](x) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat p_3,\hat q_3}(g)\, f^{\bullet**}_{\hat p_3,\hat q_3}(x)\,\mathrm{d}\hat p_3\,\mathrm{d}\hat q_3. \tag{1}$$

Поскольку $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1$, из этого равенства получается, что

$$\mathsf{F}(T^\bullet(g)[f^{\bullet**}_{p_3,q_3}], f^{**}_{\tilde p_3,\tilde q_3}) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat p_3,\hat q_3}(g)\mathsf{F}(f^{\bullet**}_{\hat p_3,\hat q_3}, f^{**}_{\tilde p_3,\tilde q_3})\,\mathrm{d}\hat p_3\,\mathrm{d}\hat q_3 =$$

$$= 4\pi^2 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat p_3,\hat q_3}(g)\,\delta(\hat p_3+\tilde p_3)\,\delta(\hat q_3+\tilde q_3)\,\mathrm{d}\hat p_3\,\mathrm{d}\hat q_3 = 4\pi^2 t^{\bullet**}_{p_3,q_3,-\hat p_3,-\hat q_3}(g),$$

где δ обозначает дельта-функцию с запаздыванием, и следовательно,

$$t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat p_3,\hat q_3}(g) = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathsf{F}(T^\bullet(g)[f^{\bullet**}_{p_3,q_3}], f^{**}_{-\hat p_3,-\hat q_3}).$$

Положим $a = \operatorname{diag}(1,1,1,-1)$. В этом разделе будут вычислены матричные элементы $t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat p_3,\hat q_3}(a)$ главной и побочной диагонали, т. е. матричные элементы, соответствующие мультииндексы которых равны или противоположны по знаку (мультииндексы $I=(p_3,q_3)$ и $-I=(-p_3,-q_3)$ взаимно противоположны в аддитивной группе $\mathbb{R}^2$, точно так же как индексы k и $n+1-k$ матричного элемента $a_{k,n+1-k}$ $(n\times n)$-матрицы (a_{ij}), расположенного на побочной диагонали, взаимно противоположны в аддитивной группе $\mathbb{Z}_{n+1}$ вычетов по модулю $n+1$).

Теорема 1. *При* $\Re(\sigma)\in(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ *имеем*

$$t^{\bullet**}_{p_3,q_3,p_3,q_3}(a) = \frac{1}{\pi}[\mathcal{C}_{\sigma+1}(\Omega)+\mathcal{C}_{-\sigma-1}(\Omega)]\mathcal{K}_{\sigma+1}(\Omega) \tag{2}$$

и

$$t^{\bullet**}_{p_3,q_3,-p_3,-q_3}(a) = \frac{1}{8}[\Omega^{-\sigma-1}\mathcal{C}^2_{-\sigma-1}(\Omega) - \Omega^{\sigma+1}\mathcal{C}^2_{\sigma+1}(\Omega)]. \tag{3}$$

Доказательство. Чтобы получить (2), меняя порядок интегрирования в

$$t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(a) = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathsf{F}(T^{\bullet}(a)[f^{\bullet**}_{p_3,q_3}], f^{**}_{-\hat{p}_3,-\hat{q}_3}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} \alpha_2^{-2\sigma-3}\,\mathrm{d}\alpha_2 \int\limits_0^{\pi} \cos\left(\Omega\left(\alpha_2 - \frac{1}{\alpha_2}\right)\sin\beta_2\right)\mathrm{d}\beta_2$$

и используя формулу

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cos\left(ax - \frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)K_\alpha(2\sqrt{ab}),$$

выполняющуюся при $a, b > 0$ и $|\Re(\alpha)| < 1$ [5, 2.5.24.7], находим, что

$$t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(a) = \frac{1}{\pi^2}\cos([\sigma+1]\pi)\int\limits_0^{\pi} K_{2\sigma+2}(2\Omega\sin\beta_2)\,\mathrm{d}\beta_2,$$

после чего остаётся воспользоваться формулой

$$\int\limits_0^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}K_\nu(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\nu\pi}{2}\left[I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{ac}{2}\right) + I_{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{ac}{2}\right)\right]K_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{ac}{2}\right),$$

истинной при $a > 0$ и $|\Re(\nu)| < 1$ [6, 2.6.3.1], и отношением симметрии $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ для функции Макдональда.

Для вывода равенства (3) заметим, что (основная) функция Бесселя первого рода J_ν и функция $\mathcal{C}_\nu$ связаны равенством

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{4}\right)^{\nu}\mathcal{C}_\nu\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

и используем формулы 2.5.24.4 из [5] и 2.12.4.1 из [6]. Подробный вывод опускаем. □

3. Матричные элементы представления T в смешанном B_3/B_1-базисе и теоретико-групповая трактовка одного K-преобразования

Обозначим ω пересечение конуса Λ с плоскостью $x_1 = 1$, параметризовав это сечение следующим способом:

$$\omega = \{(1, \sin\alpha_3\sin\beta_3, \sin\alpha_3\cos\beta_3, \cos\alpha_3) \mid \alpha_3 \in [0, 2\pi),\ \beta_3 \in [0, \pi)\}.$$

Представим функцию $f^{\bullet**}_{p_3,q_3}$ в виде линейной комбинации функций, принадлежащих базису $B^{\bullet}_1$:

$$f^{\bullet**}_{p_3,q_3}(x) = \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{q_1=-|p_1|}^{|p_1|} c_{p_3,q_3,p_1,q_1}\, f^{\bullet}_{p_1,q_1}(x). \tag{4}$$

Вводя билинейный функционал $\Phi\colon (\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^{\bullet}) \longrightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$(f,g) \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} \sin\alpha_3 \, \mathrm{d}\alpha_3 \int_{0}^{\pi} f(\alpha_3,\beta_3)\, g(\alpha_3,\beta_3)\, \mathrm{d}\beta_3$$

и принимая во внимание отношения ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \exp(\mathbf{i}(p+q)z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\delta_{p,-q}$$

и [1, с. 462, (4) и (5)]

$$\int_{-1}^{1} C^q_p(z) C^q_{\tilde{p}}(z)(1-z^2)^{q-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi\Gamma(2q+p)\delta_{p,\tilde{p}}}{2^{2q-1}p!(p+q)[\Gamma(q)]^2},$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, находим, что

$$c_{p_3,q_3,p_1,q_1} = \frac{2^{2q_1-1}(p_1-q_1)!\left(p_1+\frac{1}{2}\right)\left[\Gamma\left(q_1+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\pi^2\,\Gamma(2q_1+1)} \Phi(f^{\bullet**}_{p_3,q_3}, f_{p_1,-q_1}).$$

Теорема 2. *При $p_1 = q_1$ и $\Re(\sigma) < 0$ выполняются равенства*

— $\Omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_{p_3,q_3,p_1,q_1} = \frac{2^{\sigma+|q_1|}\,(p_1+\frac{1}{2})\,[\Gamma(|q_1|+\frac{1}{2})]^2\,\Omega^{|q_1|-\sigma-\frac{1}{2}}}{\pi^2\,\Gamma(2|q_1|+1)\,\Gamma(|q_1|-\frac{\sigma}{2})} \times \\ \times \exp\left(\mathbf{i}|q_1|\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}p_3 - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{q_3}{p_3}\right]\right)\mathcal{K}_{\sigma+1}(\Omega); \end{aligned} \tag{5}$$

— $q_1 \neq 0$,

$$c_{0,0,p_1,q_1} = \frac{2^{2q_1}\,(p_1+\frac{1}{2})\,[\Gamma(|q_1|+\frac{1}{2})]^2\,\sin(\pi q_1)}{\pi^2\,q_1\,\Gamma(2q_1+1)}\,\mathrm{B}\left(\frac{|q_1|+1}{2}, \frac{|q_1|-1}{2} - \sigma\right), \tag{6}$$

где B — *бета-функция.*

Доказательство. Докажем сначала (5). Поскольку $C_0^\lambda(z) = 1$, имеем

$$\mathsf{F}_2(f^{\bullet**}_{p_3,q_3}, f_{p_1,-q_1}) = 2^{|q_1|-\sigma} \int\limits_0^{+\infty} \alpha_2^{|q_1|+1}\,(\alpha_2^2+1)^{\sigma-|q_1|}\,\mathrm{d}\alpha_2 \times$$
$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\mathbf{i}\left[|q_1|\beta_2 - r\alpha_2 \sin\left(\beta_2 + \operatorname{arctg}\frac{q_3}{p_3}\right)\right]\right)\,\mathrm{d}\beta_2.$$

Для вычисления внутреннего интеграла используем формулу 2.5.41.10 из [5]

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \exp(\mathbf{i}[nx - z\sin x])\,\mathrm{d}x = 2\pi\, J_n(z) \quad (n\in\mathbb{Z},\quad |\arg z| < \pi). \tag{7}$$

Внешний интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \alpha_2^{|q_1|+1}\,(\alpha_2^2+1)^{\sigma-|q_1|}\,J_{|q_1|}(\Omega\alpha_2)\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

являющийся преобразованием Ганкеля, может быть вычислен по формуле 8.5.20 из [16].

Для доказательства формулы (6) используем косинус-преобразование Фурье [15, 1.2.1] и преобразование Меллина [5, 2.2.4.24]. □

Из (1) и (4) получаем равенство

$$T^\bullet(g)[f^{\bullet**}_{p_3,q_3}](x) = \sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{q_1=-|p_1|}^{|p_1|}\left(\iint\limits_{\mathbb{R}^2} t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat p_3,\hat q_3}(g)\,c_{\hat p_3,\hat q_3,p_1,q_1}\,\mathrm{d}\hat p_3\,\mathrm{d}\hat q_3\right) f^\bullet_{p_1,q_1}(x). \tag{8}$$

С другой стороны,

$$T^\bullet(g)[f^{\bullet**}_{p_3,q_3}](x) = \sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{q_1=-|p_1|}^{|p_1|} c_{p_3,q_3,p_1,q_1}\,T^\bullet(g)[f^\bullet_{p_1,q_1}](x) \tag{9}$$

Так как при $p_1 = q_1$ функция $f^\bullet_{p_1,q_1}$ является неподвижной точкой оператора $T^\bullet(a)$ (другими словами, $f^\bullet_{p_1,q_1}$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению 1), из (8) и (9) получаем, что при $p_1 = q_1$

$$c_{p_3,q_3,p_1,q_1} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat p_3,\hat q_3}(a)\,c_{\hat p_3,\hat q_3,p_1,q_1}\,\mathrm{d}\hat p_3\,\mathrm{d}\hat q_3. \tag{10}$$

Полагая $p_3 = q_3 = 0$ в (10) (т. е. рассматривая матричные элементы операторов $T^\bullet(a)$ и $B_1^\bullet \mapsto B_3^\bullet$, расположенные в «нулевой» строке), учитывая результаты теорем 1 и 2 и выбирая полярную систему координат для вычисления двойного интеграла в правой части равенства (10), получаем частный случай известной формулы (см., например, [6, 2.16.2.2])

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} K_\nu(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{\alpha-2}}{c^\alpha}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\nu}{2}\right),$$

которая выполняется при $\Re(\alpha) > |\Re(\nu)|$ и $\Re(c) > 0$. В этом частном случае эта формула (являющаяся K-преобразованием функции $x^{\alpha-\frac{3}{2}}$ [14, 7.7.3.27]) выражает, таким образом, связь между матричными элементами оператора $T^\bullet(a)$, вычисленными относительно базисов $B_3^\bullet$ и $B_1^\bullet$ и расположенными в «нулевых» строках соответственных матриц.

4. Матричные элементы представления T относительно параболического базиса

Определим модифицированные гиперфункции Бесселя—Клиффорда первого рода формулой

$$\mathcal{C}_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(z) = z^{-\frac{\nu_1+\ldots+\nu_n}{2}}\,I_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(2\sqrt{z}).$$

Параметризуем сечение γ_2 следующим образом:

$$x = \left(\frac{1+\alpha_2^2}{2},\, \alpha_2\sin\beta_3,\, \alpha_2\cos\beta_2,\, \frac{1-\alpha_2^2}{2}\right),$$

где $\alpha_2 > 0$ и $0 \leqslant \beta_2 < 2\pi$. Для каждого $g \in G$ представим функцию $T^\bullet(g)[f^{*\bullet}_{p_2,q_2}]$ в виде линейной комбинации функций, принадлежащих базису $B_2^\bullet$:

$$T^\bullet(g)[f^{*\bullet}_{p_2,q_2}] = \sum_{\hat{q}_2\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty} t^\bullet_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g)\, f^{*\bullet}_{\hat{p}_2,\hat{q}_2}\,\mathrm{d}\hat{p}_2.$$

Так как $(\mathrm{d}x)_{\gamma_2} = \alpha_2\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2$ и

$$\int_0^{+\infty} x\,J_\mu(px)\,J_\mu(qx)\,\mathrm{d}x = \frac{\delta(p-q)}{p},$$

где $\delta(p-q)$ — дельта-функция с запаздыванием q, для каждой функции $f^*_{\check{p}_2,\check{q}_2} \in B_2$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{F}(T^\bullet(g)[f^{*\bullet}_{p_2,q_2}], f^*_{\breve{p}_2,\breve{q}_2}) = \mathsf{F}(T^\bullet(g)[f^{*\bullet}_{p_2,q_2}], f^*_{\breve{p}_2,\breve{q}_2}) = \\
&= 2\pi \sum_{\hat{q}_2\in\mathbb{Z}} \delta_{\hat{q}_2,\breve{q}_2} \int_0^{+\infty} t^\bullet_{p_2,q_2,\hat{p}_2,-\breve{q}_2}(g) \int_0^{+\infty} \alpha_2\, J_{|\breve{q}_2|}(\hat{p}_2\alpha_2)\, J_{|\breve{q}_2|}(\breve{p}_2\alpha_2)\, \mathrm{d}\alpha_2\, \mathrm{d}\hat{p}_2 = \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty} t^\bullet_{p_2,q_2,\hat{p}_2,-\breve{q}_2}(g)\, \delta(\hat{p}_2-\breve{p}_2)\, \frac{\mathrm{d}\hat{p}_2}{\hat{p}_2} = \frac{2\pi}{\breve{p}_2}\, t^\bullet_{p_2,q_2,\breve{p}_2,-\breve{q}_2}(g).
\end{aligned}
$$

Это означает, что

$$
t^\bullet_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g) = \frac{\hat{p}_2}{2\pi}\, \mathsf{F}(T^\bullet(g)[f^{*\bullet}_{p_2,q_2}], f^*_{\hat{p}_2,-\hat{q}_2}).
$$

Для матричного элемента $t^\bullet_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g)$ определим $\Theta = \frac{p_2\hat{p}_2}{4}$.

Теорема 3. *При* $|\Re(\sigma)| < \frac{|q_3|}{2} + \frac{3}{4}$

$$
\begin{aligned}
&t^\bullet_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(a) = \\
&= \frac{\pi\, \delta_{q_2,\hat{q}_2}\, \hat{p}_2}{2\sin(\pi\sigma)} \left(\frac{\hat{p}_2}{p_2}\right)^\sigma \cdot \left[\Theta^{|q_2|-\sigma}\mathcal{C}_{|q_2|,-\sigma,|q_2|-\sigma}(\Theta) - \Theta^{|q_2|+\sigma}\mathcal{C}_{|q_2|,\sigma,|q_2|+\sigma}(\Theta)\right]. \quad (11)
\end{aligned}
$$

Доказательство. В самом деле, $T^\bullet$ является гомоморфизмом группы G в группу невырожденных линейных операторов пространства $\mathfrak{D}^\bullet$, а порядок элемента $a \in G$ равен 2. В [24] показано, что функционал F, определённый на $\mathfrak{D}^\bullet \times \mathfrak{D}$, инвариантен относительно пары $(T^\bullet, T)$ представлений, следовательно,

$$
\begin{aligned}
&t^\bullet_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(a) = \frac{\hat{p}_2}{2\pi}\, \mathsf{F}(T^\bullet(a)[f^{*\bullet}_{p_2,q_2}], f^*_{\hat{p}_2,-\hat{q}_2}]) = \\
&= \frac{\hat{p}_2}{2\pi}\, \mathsf{F}(T^\bullet(a)T^\bullet(a)[f^{*\bullet}_{p_2,q_2}], T(a)[f^*_{\hat{p}_2,-\hat{q}_2}]) = \\
&= \frac{\hat{p}_2}{2\pi}\, \mathsf{F}(f^{*\bullet}_{p_2,q_2}, T(a)[f^*_{\hat{p}_2,-\hat{q}_2}]) = \hat{p}_2\, \delta_{q_2,\hat{q}_2} \int_0^{+\infty} \alpha_3^{2\sigma+1}\, J_{|q_2|}(p_2\alpha_2)\, J_{|q_2|}\left(\frac{\hat{p}_2}{\alpha_2}\right) \mathrm{d}\alpha_2.
\end{aligned}
$$

Остаётся воспользоваться формулой

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} x^{\rho-1}\, J_\mu(ax)\, J_\nu\left(\frac{b}{x}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{a^{\nu-\rho}\, b^\nu\, \Gamma(\frac{\mu+\rho-\nu}{2})}{2^{2\nu-\rho+1}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\frac{\nu+\mu-\rho}{2}+1)}\, {}_0F_3\left(\nu+1, \frac{\nu-\mu-\rho}{2}+1, \frac{\nu+\mu-\rho}{2}+1;\, \frac{(ab)^2}{16}\right) + \\
&+ \frac{a^\mu\, b^{\mu+\rho}\, \Gamma(\frac{\nu-\mu-\rho}{2})}{2^{2\mu+\rho+1}\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\frac{\nu+\mu+\rho}{2}+1)}\, {}_0F_3\left(\mu+1, \frac{\rho+\mu-\nu}{2}+1, \frac{\nu+\mu+\rho}{2}+1;\, \frac{(ab)^2}{16}\right),
\end{aligned}
$$

которая верна при $a, b > 0$, $-\Re(\mu) - \frac{3}{2} < \Re(\rho) < \Re(\nu) + \frac{3}{2}$ [3, 6.591.8]. После замены $\Gamma(\pm\sigma)$ на дробь $\pm\frac{\pi\ \csc(\pi\sigma)}{\Gamma(\mp\sigma+1)}$ и представления аргумента $\frac{(p_3\hat{p}_3)^2}{16}$ полученной гипергеометрической функции ${}_0F_3$ в виде $\left(\frac{2\sqrt{p_3\hat{p}_3}}{4}\right)^4$ удаётся записать результат с помощью модифицированных гиперфункций Бесселя и, наконец, с помощью модифицированных гиперфункций Бесселя—Клиффорда. $\square$

5. О двух рядах, содержащих модифицированные гиперфункции Бесселя—Клиффорда первого рода

Б. Ясар и М. Озарслан в [29] развили идею об унификации обычных, модифицированных, сферических бесселевых функций и функций Бесселя—Клиффорда, центром которой является использование обобщённого символа Похгаммера [26]

$$(\lambda;\rho)_\nu = \begin{cases} \Gamma_\rho(\lambda+\nu) & (\Re(\rho)>0,\ \lambda,\,\nu\in\mathbb{C}) \\ (\lambda)_\nu & (\rho=0,\ \lambda,\,\nu\in\mathbb{C}), \end{cases}$$

где $(\lambda)_\nu$ — символ Похгаммера и $\Gamma_\rho(x)$ — расширенная гамма-функция, которая определяется формулой [9]

$$\Gamma_\rho(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\exp\left(-t-\frac{\rho}{t}\right)\mathrm{d}t \quad (\Re(\rho)>0).$$

Используя эту унификацию, они вывели при $\Re(\nu)>-1$ интегральное представление [29]

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu [\Gamma(\nu+1)]^2 \int\limits_0^{+\infty} t^\nu \exp(-t)\,{}_0F_3\left(-;\,\nu+1,\,\frac{\nu+1}{2},\,\frac{\nu+2}{2};\,\frac{z^2t^2}{2}\right)\mathrm{d}t,$$

подынтегральная функция в котором может быть выражена через $\mathcal{C}_{\nu,\frac{\nu-1}{2},\frac{\nu}{2}}(zt)$. В этом разделе мы получим формулы для двух рядов, которые содержат $\mathcal{C}_{\nu_1,\nu_2,\nu_3}$ и сходятся к произведению цилиндрических функций.

Рассмотрим матричные элементы c_{p_2,q_2,p_3,q_3} линейного оператора $B_2^\bullet \mapsto B_3^\bullet$, т. е. элементы, удовлетворяющие равенству

$$f^{\bullet *}_{p_2,q_2}(x) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} c_{p_2,q_2,p_3,q_3}\, f^{\bullet **}_{p_3,q_3}(x)\,\mathrm{d}p_3\,\mathrm{d}q_3. \tag{12}$$

Теорема 4. *При* $\Re(\sigma)\in(-1,-\frac{1}{2})$ *и* $p_3,q_3\neq 0$

$$\sum_{q_2\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\mathbf{i}2q_2\operatorname{arctg}\frac{q_3}{p_3}\right)\left[\Theta^{|q_2|-\sigma}\mathcal{C}_{|q_2|,-\sigma,|q_2|-\sigma}(2\Omega) - \Theta^{|q_2|+\sigma}\mathcal{C}_{|q_2|,\sigma,|q_2|+\sigma}(2\Omega)\right] =$$

$$= 8\Omega\sin(\pi\sigma)\exp\left(2\mathbf{i}q_2\operatorname{arctg}\frac{p_3}{q_3}\right)[\mathcal{C}_{\sigma+1}(\Omega)+\mathcal{C}_{-\sigma-1}(\Omega)]\mathcal{K}_{\sigma+1}(\Omega) \tag{13}$$

и

$$\sum_{q_2\in\mathbb{Z}}(-1)^{q_2}\exp\left(-\mathbf{i}2q_2\operatorname{arctg}\frac{q_3}{p_3}\right)\times$$
$$\times\left[\Theta^{|q_2|-\sigma}\mathcal{C}_{|q_2|,-\sigma,|q_2|-\sigma}(2\Omega)-\Theta^{|q_2|+\sigma}\mathcal{C}_{|q_2|,\sigma,|q_2|+\sigma}(2\Omega)\right]=$$
$$=\pi\Omega\,\sin(\pi\sigma)\exp\left(2\mathbf{i}q_2\operatorname{arctg}\frac{p_3}{q_3}\right)[\Omega^{-\sigma-1}\mathcal{C}^2_{-\sigma-1}(\Omega)-\Omega^{\sigma+1}\mathcal{C}^2_{\sigma+1}(\Omega)].\qquad(14)$$

Доказательство. Как и в случае матричных элементов $t^{\bullet**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(g)$, легко показать, что

$$c_{p_2,q_2,p_3,q_3}=\frac{1}{4\pi^2}\mathsf{F}(f^{\bullet*}_{p_2,q_2},f^{**}_{-p_3,-q_3}).$$

Тогда

$$c_{p_2,q_2,p_3,q_3}=\frac{1}{4\pi^2}\mathsf{F}(f^{\bullet*}_{p_2,q_2},f^{**}_{-p_3,-q_3})=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\alpha_2\,J_{|q_2|}(p_2\alpha_2)\,\exp(\mathbf{i}[q_2\beta_2-p_3\alpha_2\sin\beta_2-q_3\alpha_2\cos\beta_2])\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2.\qquad(15)$$

Меняя порядок интегрирования в (15) и используя формулу (7), получаем равенство

$$c_{p_2,q_2,p_3,q_3}=$$
$$=\frac{(-1)^{q_2}}{2\pi}\exp\left(\mathbf{i}q_2\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}p_3-\operatorname{arctg}\frac{p_3}{q_3}\right]\right)\int\limits_0^{+\infty}\alpha_2\,J_{|q_2|}(p_2\alpha_2)\,J_{q_2}(\Omega\alpha_2)\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

которое с учётом отношения симметрии $J_{-q_2}(x)=(-1)^{q_2}J_{q_2}(x)$ и свойства ортогональности для функций J_n принимает вид

$$c_{p_2,q_2,p_3,q_3}=\frac{(-\operatorname{sign}\,q_2)^{q_2}}{2\pi\Omega}\exp\left(\mathbf{i}q_2\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\,p_3-\operatorname{arctg}\frac{p_3}{q_3}\right]\right)\delta(\Omega-p_2).$$

Обозначим через c_{p_3,q_3,p_2,q_2} матричные элементы линейного оператора, обратного оператору $B^\bullet_2\mapsto B^\bullet_3$. В общем случае для произвольных базисов B и B' в $\mathfrak{D}^\bullet$ матричные элементы матриц перехода $B\mapsto B'$ и $B'\mapsto B$ отличаются друг от друга (с точностью до мультипликативной константы) тем, что σ меняется на $\sigma^\bullet$. Однако легко видеть, что в случае $B=B^\bullet_2$ и $B'=B^\bullet_3$ интеграл

$$c_{p_3,q_3,p_2,q_2}=\frac{1}{4\pi^2}\mathsf{F}(f^{\bullet**}_{p_3,q_3},f^{*}_{p_2,q_2})$$

не зависит от σ, следовательно, имеем $c_{p_3,q_3,p_2,q_2}=c_{p_2,q_2,p_3,q_3}$.

Представим операнд в $T^\bullet(g)[f^{\bullet**}_{p_3,q_3}]$ в виде линейной комбинации функций, составляющих базис $B^\bullet_2$:

$$T^\bullet(g)[f^{\bullet**}_{p_3,q_3}]=\sum_{q_2\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^{+\infty}c_{p_2,q_2,p_3,q_3}\,T^\bullet(g)[f^{\bullet*}_{p_2,q_2}]\,\mathrm{d}p_2.$$

Сделав то же самое с операндом функции $T^\bullet(g)[f^{\bullet *}_{p_2,q_2}]$ по формуле (12), получим

$$T^\bullet(g)[f^{\bullet **}_{p_3,q_3}] = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{q_2,\hat{q}_2\in\mathbb{Z}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} c_{p_2,q_2,p_3,q_3}\, t^{\bullet *}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g)\, c_{\hat{p}_2,\hat{q}_2,\hat{p}_3,\hat{q}_3} \mathrm{d}p_2\, \mathrm{d}\hat{p}_2 \right) \mathrm{d}\hat{p}_3\, \mathrm{d}\hat{q}_3.$$

Сравнивая коэффициенты в этом разложении и (1), выводим равенство

$$t^{\bullet **}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(g) = \frac{1}{4\pi^2\Omega^2} \sum_{q_2,\hat{q}_2\in\mathbb{Z}} \exp\left(-2\mathbf{i}q_2 \operatorname{arctg}\frac{q_3}{p_3}\right) t^{\bullet *}_{\Omega,q_2,\Omega,\hat{q}_2}(g), \tag{16}$$

в которое подставляем (11). Чтобы получить (13) и (14), подставляем соответственно (2) и (3) в (16). □

С учётом отношения симметрии $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ равенство (13) можно рассматривать как представление функции

$$\mathcal{C}_{\sigma+1}(\Omega)\mathcal{K}_{\sigma+1}(\Omega) + \mathcal{C}_{-\sigma-1}(\Omega)\mathcal{K}_{-\sigma-1}(\Omega) \tag{17}$$

в виде ряда. Известная формула (см., например, [14, 7.14.2.71])

$$I_\nu(x)K_\mu(x) + I_\nu(x)K_\mu(x) = 2\int\limits_0^{+\infty} J_{\nu+\mu}(2x \operatorname{sh} t)\, \operatorname{ch}[(\mu-\nu)t]\, \mathrm{d}t, \tag{18}$$

переписанная с использованием гиперфункций Бесселя—Клиффорда, является интегральным представление функции (17).

Литература

[1] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1991.

[2] Виленкин Н. Я., Шлейникова М. А. Интегральные соотношения для функций Уиттекера и представления трёхмерной группы Лоренца // Матем. сб. — 1970. — Т. 81, № 2. — P. 185—191.

[3] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматлит, 1963.

[4] Ключанцев М. И. Сингулярные дифференциальные операторы с $r-1$ параметрами и функции Бесселя векторного индекса // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 3. — P. 47—62.

[5] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.

[6] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. — М.: Наука, 1981.

[7] Abramowitz M. Coulomb wave functions expressed in terms of Bessel—Clifford functions // J. Math. Phys. — 1954. — Vol. 33. — P. 111—116.

[8] Chaggara H., Ben Romdhane N. On the zeros of the hyper-Bessel function // Integral Transform. Spec. Funct. — 2015. — Vol. 26, no. 2. — P. 96—101.

[9] Chaudhry M. A., Zubair S. M. Extended incomplete gamma functions with applications // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — Vol. 274, no. 2. — P. 725—745.

[10] Choi J., Shilin I. A. A family of series and integrals involving Whittaker, Bessel functions, and their products derivable from the representation of the group $\mathrm{SO}(2,1)$ // Commun. Korean Math. Soc. — 2017. — Vol. 32, no. 4. — P. 999—1008.

[11] Clifford W. K. On Bessel's functions // Mathematical Papers. — London: Oxford Univ. Press, 1882. — P. 346—349.

[12] Dattoli G., Maino G, Chicco C., Lorenzutta S., Torre A. A unified point of view on the theory of generalized Bessel functions // Comput. Math. Appl. — 1995. — Vol. 30, no. 7. — P. 113—125. (1995), 113–125.

[13] Delerue P. Sur le calcul symbolique à n variables et les fonctions hyperbesseliennes // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. — 1953. — Vol. 67, no. 3. — P. 229—274.

[14] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. Vol. II. — New York: McGraw-Hill, 1953.

[15] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Tables of Integral Transforms. Vol. I. — New York: McGraw-Hill, 1954.

[16] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Tables of Integral Transforms. Vol. II. — New York: McGraw-Hill, 1954.

[17] Gorenflo R., Kilbas A., Mainardi F., Rogosin S. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. — Berlin: Springer, 2014.

[18] Hayek N., Pérez-Acosta F. Asymptotic expressions of the Dirac delta function in terms of the Bessel–Clifford functions // Pure Appl. Math. Sci. — 1993. — Vol. 37. — P. 53—56.

[19] Kiryakova V. Transmutation method for solving hyper-Bessel differential equations based on the Poisson–Dimovsky transformation // Frac. Calc. Appl. Anal. — 2008. — Vol. 11, no. 3. — P. 299—316.

[20] Kiryakova V. The special functions of fractional calculus as generalized fractional calculus operators of some basic functions // Comput. Math. Appl. — 2010. — Vol. 59, no. 3. — P. 1128—1141.

[21] Klauder J. R., Penson K. A., Sixdeniers J.-M. Constructing coherent states through solutions of Stieltjes and Hausdorff moment problems // Phys. Rev. A. — 2001. — Vol. 64. — 013817.

[22] Paneva-Konovska J. A family of hyper-Bessel functions and convergent series in them // Frac. Calc. Appl. Anal. — 2014. — Vol. 17, no. 4. — P. 1001—1015.

[23] Rainville E. D. Special Functions. — New York: Macmillan, 1960.

[24] Shilin I. A., Choi J. Certain connections between the spherical and hyperbolic bases on the cone and formulas for related special functions // Integral Transform. Spec. Funct. — 2014. — Vol. 25, no. 5. — P. 374—383.

[25] Shilin I. A., Choi J. Certain relations between Bessel and Whittaker functions related to some diagonal and block-diagonal 3×3-matrices // J. Nonlinear Sci. Appl. — 2017. — Vol. 10, no. 2. — P. 560—574.

[26] Srivastava H. M., Getinkaya A., Kiymaz O. A certain generalized Pochhammer symbol and its applications to hypergeometric functions // Appl. Math. Comput. — 2014. — Vol. 226, no. 1. — P. 484—491.

[27] Srivastava H. M., Manocha H. L. A Treatise on Generating Functions. — New York: Halsted Press, 1984.

[28] Witte N. S. Exact solution for the reflection and diffraction of atomic de Broglie waves by a travelling evanescent laser wave // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Vol. 31. — 807.

[29] Yasar B. Y., Özarslan M. A. Unified Bessel, modified Bessel, spherical Bessel and Bessel–Clifford functions // J. Ineq. Spec. Func. — 2016. — Vol. 7, no. 4. — P. 77—117.