Алгебраические алгебры Ли ограниченной степени

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: artgolub@hotmail.com

УДК 512.554.36+512.554.7

Ключевые слова: алгебраическая алгебра Ли, алгебра Ли с алгебраическим присоединённым представлением, энгелева алгебра Ли, йорданова алгебра алгебры Ли, первичный радикал, радикал Кострикина, слабо разрешимый радикал.

Аннотация

В работе обсуждаются вопросы совпадения основных ниль-радикалов на классах алгебраических алгебр Ли и доказывается локальная конечномерность алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением ограниченной степени над полями достаточно большой положительной характеристики.

Abstract

A. Yu. Golubkov, Algebraic Lie algebras of bounded degree, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 209—242.

The paper discusses the questions of coincidence of the basic nil-radicals on classes of algebraic Lie algebras and proves the local finite-dimensionality of Lie algebras with an algebraic adjoint representation of bounded degree over fields of sufficiently large positive characteristic.

1. Введение

Представленная работа дополняет результаты А. И. Кострикина и Е. И. Зельманова, полученные в ходе решения ослабленной проблемы Бернсайда для групп однократных простых показателей и проблемы Куроша для алгебр Ли (см. [13,16]). Её главной целью является доказательство локальной конечномерности алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением ограниченной степени над полями достаточно большой положительной характеристики.

Предварительные сведения

В дальнейшем все модули над ассоциативными кольцами с единицей считаются левыми и унитарными, причём левые модули над коммутативными кольцами наделяются при необходимости структурами правых модулей над ними с одинаковым левым и правым действием. Основное кольцо F, над которым

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 209—242.
© 2019 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

определено большинство рассматриваемых алгебр, является произвольным ассоциативным коммутативным кольцом с единицей. Под классом алгебр понимается класс алгебр над одним кольцом, содержащий нулевую алгебру и изоморфные копии каждой из своих алгебр.

Для любых алгебры R над кольцом F и её подмножества A подалгебру, идеал и F-подмодуль R, порождённые элементами A, мы будем обозначать через $\langle A\rangle$, $(A)_R$ и FA соответственно. Алгебра умножений алгебры R будет обозначаться через $M(R)$. Напомним, что $M(R)$ определяется как подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(R)$ F-модуля R, порождённая операторами левого и правого умножения l_x и r_x на элементы $x \in R$, $l_x\colon y \mapsto xy$ и $r_x\colon y \mapsto yx$ для всех $y \in R$. Кроме того, мы будем пользоваться следующими обозначениями: $[x_1, \ldots, x_k] = l_{x_1} \cdots l_{x_{k-1}} x_k$ для любых $x_i \in R$, $k \geqslant 1$, где $[x_1] = x_1$.

Операции умножения алгебр Ли и линейных йордановых алгебр (над кольцами с $1/2$) будут обозначаться через $[\,,\,]$ и $\cdot$, оператор левого умножения l_x на любой их элемент x — через ad_x и m_x.

Алгебру Ли и йорданову алгебру ассоциативной алгебры R над кольцом F, которые получаются из R заменой её операции умножения на операции $[\,,\,]$ и $\cdot$, $[x, y] = xy - yx$ и $x \cdot y = 1/2(xy + yx)$ (при условии $1/2 \in F$) для всех $x, y \in R$, принято обозначать через $R^{(-)}$ и $R^{(+)}$. Если алгебра Ли (линейная йорданова алгебра) над кольцом F вложима в алгебру $R^{(-)}$ ($R^{(+)}$) и элементы её образа при этом вложении порождают алгебру R, R называется её *ассоциативной обёртывающей*. В частности, алгебра умножений (*присоединённая ассоциативная алгебра*) $\mathrm{Ad}(L)$ любой алгебры Ли L является одной из ассоциативных обёртывающих алгебры Ли её внутренних дифференцирований (*присоединённой алгебры Ли*) $\mathrm{ad}(L) = \{\mathrm{ad}_x \mid x \in L\}$, $\mathrm{Ad}(L) = \langle \mathrm{ad}(L)\rangle$. Линейные йордановы алгебры, обладающие ассоциативными обёртывающими, называются *специальными*.

Алгебры, аддитивные группы которых не имеют k-кручения для некоторого $k > 1$, мы будем называть кратко *алгебрами без k-кручения*.

Перечислим необходимые нам варианты понятия алгебраического элемента из работ [4,10], ограничившись по возможности лиевским случаем. Алгебры над кольцом F, конечно порождённые как F-модули, принято называть конечными над F (конечномерными над F, если F является полем). Конечная алгебра R над кольцом F называется *конечной* (*в смысле Ширшова*) *над идеалом* I кольца F, если её фактор-алгебра R/IR по идеалу

$$IR = \{h_1 r_1 + \ldots + h_k r_k \mid k \geqslant 1,\ h_i \in I,\ r_i \in R\}$$

разрешима (нильпотентна). Элемент r алгебры R над кольцом F называется *целым* (*в смысле Ширшова*) *над идеалом* I кольца F, если порождённая им подалгебра $\langle r\rangle$ конечна (в смысле Ширшова) над I. Целые (в смысле Ширшова) элементы над $I = F$ называются просто *целыми*, а над $I = \{0\}$ — *ниль-элементами*. Для элемента r с ассоциативными степенями оба условия целостности над идеалом I равносильны тому, что $f(r) = 0$ для некоторого многочлена

$$f(t) = t^n + f_{n-1} t^{n-1} + \ldots + f_1 t \in F[t],$$

$\deg f = n \geqslant 1$, $f_i \in I$, где $f_i = 0$ при $n = 1$. Такой элемент r называется также *целым над I степени не выше n*.

Элемент x алгебры Ли L над кольцом F называется *алгебраическим над идеалом I* кольца F (*слабо энгелевым* или *ниль-элементом* при $I = \{0\}$), если для любого элемента $y \in L$ существует такой многочлен

$$_{y,x}f(t) = t^{n_{y,x}} + {}_{y,x}f_{n_{y,x}-1}t^{n_{y,x}-1} + \ldots + {}_{y,x}f_1 t \in F[t],$$

$\deg {}_{y,x}f = n_{y,x} \geqslant 1$, $_{y,x}f_i \in I$ ($_{y,x}f_i = 0$ при $n_{y,x} = 1$), что $_{y,x}f(\mathrm{ad}_x)y = 0$. Если многочлены $_{y,x}f$, $y \in L$, можно выбрать так, что их степени $n_{y,x}$, $y \in L$, не превышают некоторого $n \geqslant 1$, x называется *алгебраическим над идеалом I элементом ограниченной степени* (*не выше n*) и *энгелевым* (*n-энгелевым*) *элементом* при $I = \{0\}$. Если они могут быть заменены одним многочленом

$$_{x}f(t) = t^{n_x} + {}_{x}f_{n_x-1}t^{n_x-1} + \ldots + {}_{x}f_1 t \in F[t],$$

$\deg {}_{x}f = n_x$, $_{x}f_i \in I$, $_{x}f(\mathrm{ad}_x) = 0$, x называется *сильно алгебраическим над идеалом I элементом* (*степени не выше n_x*).

В общем случае мы будем называть элемент x алгебры R над кольцом F *сильно алгебраическим над идеалом I* кольца F, если операторы левого и правого умножения l_x и r_x на x порождают конечную в смысле Ширшова над I подалгебру $\langle l_x, r_x\rangle$ алгебры умножений $M(R)$ алгебры R, и *алгебраическим над I степени не выше n*, $n \geqslant 1$, если подалгебра $\langle l_x, r_x\rangle$ имеет индекс нильпотентности не выше n по модулю своего идеала $I\langle l_x, r_x\rangle$ и порождается как F-модуль произведениями l_x и r_x длины меньше n.

Алгебры над кольцом F, состоящие из целых (в смысле Ширшова) над его идеалом I элементов, называются *целыми* (*в смысле Ширшова*) *над I*. Сходным образом вводятся понятия *алгебраической над идеалом I алгебры Ли* (*ограниченной степени, степени не выше n*, $n \geqslant 1$) при $I \neq \{0\}$ и *ниль-алгебры Ли* (*энгелевой, n-энгелевой алгебры Ли*) при $I = \{0\}$, *сильно алгебраической алгебры над идеалом I* (*степени не выше n*) и для алгебр с ассоциативными степенями — *целой над I алгебры степени не выше n*. При $I \neq \{0\}$ сильно алгебраические над I алгебры Ли (степени не выше n) называются *алгебрами Ли с алгебраическим над I присоединённым представлением* (*степени не выше n*).

Используя любое из приведённых здесь условий алгебраичности без указания идеала I кольца F, мы будем предполагать, что речь идёт об $I = F$.

Всюду далее $F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle$ — свободная алгебра в рассматриваемом многообразии алгебр $\mathfrak{H}$ над кольцом F со счётным множеством свободных порождающих $X = \{x_i\}_{i \geqslant 1}$. Для многообразий всех алгебр, ассоциативных алгебр, алгебр Ли и линейных йордановых алгебр мы будем обозначать её через $F\langle X\rangle$, $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, $F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$ и $F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$ соответственно. Свободную алгебру Ли $F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$ мы будем отождествлять с подалгеброй алгебры Ли $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle^{(-)}$ свободной ассоциативной алгебры $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, которую порождают элементы множества X (см. [1, с. 73]). Будет использоваться и подалгебра $F_{\mathrm{SJor}}\langle X\rangle$ йордановой алгебры $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle^{(+)}$

алгебры $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$ над кольцом F с $1/2$, порождённая элементами X (свободная специальная йорданова алгебра над кольцом F с множеством свободных порождающих X с поправкой на то, что специальные йордановы алгебры не образуют многообразия). Говоря об образах и прообразах элементов при действии гомоморфизмов вида $F\langle X\rangle \to F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle$ и $F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle \to F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle^{(\pm)}$, мы будем предполагать, что данные гомоморфизмы продолжают соответствие $x_i \mapsto x_i$, $x_i \in X$.

Напомним, что элемент $f \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$ называется *собственным*, если идеал кольца F, который порождают коэффициенты его несократимой записи, равен F, и *допустимым*, если среди одночленов наибольшей степени в его несократимой записи есть одночлен с коэффициентом 1. Элементы алгебры $F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$, имеющие собственные и допустимые образы в алгебре $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$ при действии эпиморфизма $F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle \to F_{\mathrm{SJor}}\langle X\rangle$, и элементы алгебры $F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$, которые являются собственными и допустимыми элементами $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, мы будем называть *собственными* и *существенными* соответственно. Для многообразий ассоциативных алгебр, алгебр Ли и линейных йордановых алгебр над кольцом F (с $1/2$ в йордановом случае) можно ввести следующее общее понятие PI-алгебры: алгебра из такого многообразия $\mathfrak{H}$ называется *PI-алгеброй*, если она удовлетворяет некоторому собственному тождеству $f = 0$, $f \in F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle$ (см. также замечания 1.1, 1.2). Аналогичное понятие PI-алгебры может быть введено для любого многообразия $\mathfrak{H}$, состоящего из бинарно лиевых алгебр над кольцом F и содержащего все алгебры Ли над F. При этом собственные и существенные элементы алгебры $F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle$ определяются как её элементы с собственными и существенными образами в алгебре $F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$.

Мы будем называть следствие $g = 0$ тождества $f = 0$, $f, g \in F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle$, *аддитивным*, если для любых алгебры $R \in \mathfrak{H}$ и подгруппы A её аддитивной группы при выполнении $f = 0$ на элементах A на них также выполняется $g = 0$.

Любое собственное ассоциативное тождество $f = 0$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, $n \geqslant 1$, обладает аддитивным полилинейным следствием с коэффициентами ± 1 в несократимой записи. Действительно, если в несократимую запись $f = f_1u_1 + \ldots + f_ku_k$ элемента f входят одночлены $f_iu_i(x_1, \ldots, x_n) \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$ с коэффициентами $f_i \in F$, $u_i \neq u_j$ при $i \neq j$, то такое следствие $g = 0$ определяет полная линеаризация g однородного элемента

$$\mathrm{st}_k(u_1x_{n+1}, \ldots, u_kx_{n+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^\sigma u_{\sigma(1)}x_{n+1}u_{\sigma(2)}x_{n+1} \cdots u_{\sigma(k)}x_{n+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} h_i \,\mathrm{st}_k(u_1x_{n+1}, \ldots, u_{i-1}x_{n+1}, fx_{n+1}, u_{i+1}x_{n+1}, \ldots, u_kx_{n+1}),$$

где $h_i \in F$, $f_1h_1 + \ldots + f_kh_k = 1$, $\mathfrak{S}_k$ — симметрическая группа степени k и $(-1)^\sigma$ — знак перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ (см. [19; 10, теорема 7 на с. 27]).

Замечание 1.1. Любое собственное йорданово тождество $f = 0$, $f \in F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$, имеет существенное следствие (см. также [10, лемма 10, с. 138]).

Доказательство. Собственное ассоциативное тождество $\bar{f} = 0$, определяемое образом $\bar{f}$ элемента $f \in F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$ в алгебре $F_{\mathrm{SJor}}\langle X\rangle$, обладает аддитивным следствием $g = 0$ для некоторого полилинейного элемента $g(x_1, \ldots, x_n) \in \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, $n \geqslant 1$, с коэффициентами ± 1 в несократимой записи. Положим

$$h(x_1, x_2) = g(x_1 x_2 x_1, x_1 x_2^2 x_1, \ldots, x_1 x_2^n x_1)$$

и $w = hh^*$, где $*$ — инволюция алгебры $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, действие которой определяется правилом

$$(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m})^* = x_{i_m} \cdots x_{i_2} x_{i_1} \quad (i_1, \ldots, i_m \geqslant 1,\ m \geqslant 1).$$

Коэффициенты несократимой записи однородного $*$-симметричного элемента $w = w^*$ также равны ± 1. Элемент w входит в алгебру $F_{\mathrm{SJor}}\langle X\rangle$ (см. [10, теорема 3, с. 76]) и совпадает с образом $\bar{u}$ в ней некоторого элемента $u(x_1, x_2) \in F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$, в записи которого участвуют только порождающие x_1 и x_2, $w = \bar{u}$. Вместе с тем по построению и теореме Ширшова о специальности двупорождённых йордановых алгебр (см. [10, с. 90]) каждая линейная йорданова алгебра над кольцом F, на которой выполняется тождество $f = 0$, удовлетворяет существенному тождеству $u = 0$. □

Замечание 1.2. Любое собственное лиевское тождество $f = 0$, $f \in F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$, имеет существенное следствие.

Доказательство. Собственное ассоциативное тождество $f = 0$, которое определяет элемент $f \in F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle \subset F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle^{(-)}$, имеет аддитивное полилинейное следствие $h = 0$,

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} h_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle,$$

где $m \geqslant 1$, $h_\sigma \in \{0, \pm 1\}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, $h_e = 1$. Так как

$$\mathrm{ad}_{v(x_1, \ldots, x_s)} = v(\mathrm{ad}_{x_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{x_s})$$

для всех $v(x_1, \ldots, x_s) \in F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$, тождества

$$f(\mathrm{ad}_{x_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{x_n}) x_{n+1} = 0, \quad h(\mathrm{ad}_{x_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{x_m}) x_{m+1} = 0$$

являются следствиями лиевского тождества $f = 0$. Остаётся заметить, что второе из них является существенным, поскольку элемент $h(\mathrm{ad}_{x_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{x_m}) x_{m+1}$ можно записать в алгебре $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$ в виде

$$\begin{aligned} h(\mathrm{ad}_{x_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{x_m}) x_{m+1} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} h_\sigma [x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(m)}, x_{m+1}] = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} h_\sigma \Bigg(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} x_{m+1} + (-1)^m x_{m+1} x_{\sigma(m)} \cdots x_{\sigma(1)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leqslant m} x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_j)} x_{m+1} x_{\sigma(i'_{m-j})} \cdots x_{\sigma(i'_1)} \Bigg), \end{aligned}$$

где $i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{m-j}$, $\{i'_1, \ldots, i'_{m-j}\} = \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_j\}$. □

Следствие 1.3. *Если многообразие $\mathfrak{H}$ состоит из бинарно лиевых алгебр над кольцом F и содержит все алгебры Ли над F, то каждое собственное тождество $f = 0$, $f \in F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle$, имеет существенное следствие.*

Доказательство. Собственное лиевское тождество $\bar f = 0$, которое определяет образ $\bar f$ элемента $f \in F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle$ в алгебре $F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$, имеет следствие $h(\mathrm{ad}_{x_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{x_m})x_{m+1} = 0$ из доказательства замечания 1.2. Положим

$$v(x_1, x_2) = (-1)^{m(m+1)/2} h(\mathrm{ad}_{x_1}, \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_{x_2} x_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}^{m-1}_{x_2} x_1})\, \mathrm{ad}^m_{x_2} x_1$$

и выберем прообраз $w(x_1, x_2) \in F_{\mathfrak{H}}\langle X\rangle$ элемента $v(x_1, x_2) \in F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle$, в записи которого участвуют только порождающие x_1 и x_2, $\bar w = v$. Тогда следствие $w = 0$ тождества $f = 0$ является существенным, поскольку с учётом равенства

$$\mathrm{ad}^k_{x_2} x_1 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} x_2^i x_1 x_2^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} v_{i,k} \quad (k \geqslant 0)$$

однородный элемент v представи́м в алгебре $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$ в виде

$$v(x_1, x_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} h_\sigma [\mathrm{ad}^{\sigma(1)-1}_{x_2} x_1, \ldots, \mathrm{ad}^{\sigma(m)-1}_{x_2} x_1, \mathrm{ad}^m_{x_2} x_1] =$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} h_\sigma \sum_{\substack{k_i = 0, \ldots, \sigma(i)-1,\\ i = 1, \ldots, m}} \sum_{k=0,\ldots,m} c_{k_1,\ldots,k_m,k} v_{k_1,\ldots,k_m,k}(x_1, x_2),$$

где

$$c_{k_1,\ldots,k_m,k} = (-1)^{k_1+\ldots+k_m+k} \binom{\sigma(1)-1}{k_1} \cdots \binom{\sigma(m)-1}{k_m} \binom{m}{k},$$

$$v_{k_1,\ldots,k_m,k}(x_1, x_2) =$$
$$= v_{k_1,\sigma(1)-1} \cdots v_{k_m,\sigma(m)-1} v_{k,m} + (-1)^m v_{k,m-k} v_{k_m,\sigma(m)-1} \cdots v_{k_1,\sigma(1)-1} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leqslant m} v_{k_{i_1},\sigma(i_1)-1} \cdots v_{k_{i_j},\sigma(i_j)-1} v_{k,m} v_{k_{i'_{m-j}},\sigma(i'_{m-j})-1} \cdots v_{k_{i'_1},\sigma(i'_1)-1},$$

$i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{m-j}$, $\{i'_1, \ldots, i'_{m-j}\} = \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_j\}$, и его несократимая запись содержит одночлен $v_{0,0} v_{0,1} \cdots v_{0,m} = x_1(x_1x_2)(x_1x_2^2)\cdots(x_1x_2^m)$. □

Замечание 1.4. Любой элемент

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma [x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1}] \in F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle,$$

где $n \geqslant 1$, $\{f_\sigma\}$ — элементы кольца F с $1/2$, порождающие его как идеал, является собственным.

Доказательство. Следует лишь заметить, что образ $\bar f$ элемента $f \in F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$ в алгебре $F_{\mathrm{SJor}}\langle X\rangle$ является собственным элементом алгебры $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, поскольку

$$\overline{f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma \overline{[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1}]} =$$

$$= 1/2^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma \big(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} x_{n+1} + x_{n+1} x_{\sigma(n)} \cdots x_{\sigma(1)}\big) +$$

$$+ 1/2^n \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_l)} x_{n+1} x_{\sigma(i'_{n-l})} \cdots x_{\sigma(i'_1)},$$

$i'_1 < \ldots < i'_{n-l}$, $\{i'_1, \ldots, i'_{n-l}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_{n-l}\}$ (см. замечание 1.2). □

Используя доказательство следствия 1.3 с необходимыми изменениями в йордановом случае, можно сделать следующее замечание.

Замечание 1.5. При любом $n \geqslant 1$ алгебраические алгебры Ли степени не выше n над кольцом F и целые йордановы алгебры степени не выше n над кольцом F с $1/2$ удовлетворяют существенным тождествам $g_n = 0$ и $h_n = 0$,

$$g_n(x_1, x_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma \big[\mathrm{ad}_{x_1}^{\sigma(1)} x_2, \ldots, \mathrm{ad}_{x_1}^{\sigma(n)} x_2\big] \in F_{\mathrm{Lie}}\langle X \rangle,$$

$$h_n(x_1, x_2) = 2^{n-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma \big[m_{x_1}^{\sigma(1)} x_2, \ldots, m_{x_1}^{\sigma(n)} x_2\big] \in F_{\mathrm{Jor}}\langle X \rangle$$

(см. также [10, лемма 6, с. 126]).

Выполнение на алгебре умножений $M(R)$ алгебры R над кольцом F тождества $f = 0$, $f(x_1, \ldots, f_n) \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X \rangle$, равносильно выполнению на R тождеств $f(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = 0$, $\psi_i \in M(F\langle X \rangle)$, $x \in F\langle X \rangle$, в которых, в случае если R входит в многообразие алгебр $\mathfrak{H}$ над F, алгебру $F\langle X \rangle$ можно заменить алгеброй $F_{\mathfrak{H}}\langle X \rangle$. Отсюда сразу следует замечание 1.6.

Замечание 1.6. Если алгебра умножений $M(R)$ алгебры R над кольцом F является PI-алгеброй, то алгебры умножений алгебр над F, которые удовлетворяют всем тождествам R, являются PI-алгебрами.

В частности, алгебра умножений алгебры, удовлетворяющей всем целочисленным тождествам некоторой конечной алгебры, является PI-кольцом (см. [8, с. 326; 34, предложение 1.3.1, с. 14]).

Важную роль в дальнейшем будут играть также условия специальности алгебр Ли. Алгебра Ли L над кольцом F называется *специальной*, если она вкладывается в алгебру Ли $R^{(-)}$ некоторой ассоциативной PI-алгебры R над F, и *обобщённо специальной*, если её присоединённая ассоциативная алгебра $\mathrm{Ad}(L)$ является PI-алгеброй. Специальные алгебры Ли обобщённо специальны. При этом в отличие от обобщённой специальности специальность алгебры Ли может не наследоваться её гомоморфными образами (см. [1, с. 252—254]). Для алгебры Ли с нулевым центром специальность равносильна обобщённой специальности. Отметим и то, что обобщённо специальные алгебры Ли являются PI-алгебрами.

Во всех утверждениях работы о радикалах алгебр речь будет идти об алгебрах из замкнутых относительно взятия идеалов и гомоморфных классов и определённых на этих классах радикалах в смысле Куроша—Амицура. Опишем кратко используемые нами радикалы в смысле Куроша—Амицура и те не вполне радикальные отображения, которые также принято называть радикалами.

Алгебры над кольцом F, в которых произведения любых двух ненулевых идеалов не равны нулю (ненулевые идеалы имеют ненулевые квадраты), называются *первичными* (*полупервичными*). Идеалы алгебр, фактор-алгебры по которым являются первичными, называются *первичными идеалами*. *Первичный радикал* $\mathrm{Rad}(R)$ алгебры R над кольцом F определяется как пересечение всех первичных идеалов R (элементов её *первичного спектра* $\mathrm{Spec}(R)$),

$$\mathrm{Rad}(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} P,$$

и равен наименьшему из её идеалов, фактор-алгебры по которым полупервичны (см. [5, теорема 2.1; 10, предложение 4 и теорема 6, с. 192, 193]). *Первичный радикал* Rad, ставящий в соответствие алгебрам над кольцом F их первичные радикалы, не является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе всех алгебр над F, но при этом определяет такой радикал на отдельных его подклассах (обобщённо специальных алгебр Ли, альтернативных алгебр и ряде других (см. далее предложение 2.15 и теорему 3.12)).

Элемент x алгебры Ли L над кольцом F называется *оболочкой сэндвича толщины не ниже* m, $m \geqslant 1$, если $\mathrm{ad}_x^2 = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1} \cdots \mathrm{ad}_{y_k} \mathrm{ad}_x = 0$ для всех $y_1, \ldots, y_k \in L$, $k = 1, \ldots, m$. Оболочки сэндвичей толщины не ниже 2 называются *оболочками толстых сэндвичей*, остальные — *оболочками тонких сэндвичей*. В алгебрах Ли без 2-кручения оболочками сэндвичей являются 2-энгелевы элементы и только они (см. [16, с. 27]). Алгебры Ли, не имеющие ненулевых оболочек сэндвичей, называются *невырожденными*. Наименьший из идеалов алгебры Ли L, фактор-алгебры по которым невырожденны, называется её *радикалом Кострикина* и обозначается через $K(L)$. В настоящий момент мы не можем обосновано утверждать, что *радикал Кострикина* K, ставящий в соответствие алгебрам Ли над кольцом F их радикалы Кострикина, является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе алгебр Ли над любым F. Тем не менее это верно для классов алгебр Ли над полями нулевой характеристики и алгебраических алгебр Ли степени не выше n над кольцами с $1/n!$ при всех $n \geqslant 1$ (см. [6, теорема 2.10; 13, лемма 4 и предложение 2]).

Понятие невырожденной алгебры и радикал Маккриммона Mc определяются для линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$ аналогично понятию невырожденной алгебры Ли и радикалу Кострикина K с точностью до замены оболочек сэндвичей на абсолютные делители нуля. Элемент x линейной йордановой алгебры J над кольцом F называется *абсолютным делителем нуля*, если $U_x = 0$, где $U_x = 2m_x^2 - m_{x^2}$ — оператор квадратичного умножения на x. Известно, что, в отличие от радикала Кострикина K, радикал Маккриммона Mc является радикалом в смысле Куроша-Амицура на классе линейных йордановых алгебр над любым кольцом F с $1/2$ (см. [10, теорема 1, с. 352]).

Невырожденные первичные алгебры Ли и линейные йордановы алгебры называются также *сильно первичными*. В ассоциативных алгебрах это условие отвечает обычному условию первичности, отличному от используемого в них условия сильной первичности. Критерии первичности с отсутствием ненулевых 2-энгелевых элементов алгебр Ли и сильной первичности линейных йордановых алгебр получены в [30] и [2].

Мы будем использовать также конструкцию нижнего радикала $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$, определяемого на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{X}$. Напомним, что $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ — радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$ с классом $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$-радикальных алгебр, равным пересечению всех содержащих класс $\mathfrak{X}$ радикальных подклассов $\mathfrak{M}$. В нашем случае роль $\mathfrak{M}$ выполняет класс всех алгебр над кольцом F, роль $\mathfrak{X}$ — классы алгебр с нулевым умножением $\mathfrak{A}$, локально нильпотентных, локально разрешимых, локально конечных и локально конечных и разрешимых алгебр $L\mathfrak{N}$, $L\mathfrak{S}$, $L\mathfrak{F}$ и $L(\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F}) = L\mathfrak{S}\cap L\mathfrak{F}$ над F, а также их радикальные расширения $A\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}, L\mathfrak{N}, L\mathfrak{S}, L\mathfrak{F}, L(\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F})$, где $A\mathfrak{X}$ — класс алгебр над F, обладающих нормальными рядами подалгебр с факторами из класса $\mathfrak{X}$.

По аналогии с теорией групп *нижний ниль-радикал* $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$ и радикал $\mathcal{T}_{A\mathfrak{A}}$ мы будем обозначать через RN и RN*. В алгебрах Ли особую значимость радикалам RN и RN* придаёт теорема Бэра—Кемхадзе и их связь с радикалами Бэра и Грюнберга.

В случае если ограничение радикала $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X} = L\mathfrak{N}, L\mathfrak{S}, L\mathfrak{F}, L(\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F})$, на замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов класс алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F удовлетворяет условию $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(R) \in \mathfrak{X}$ для любой алгебры $R \in \mathfrak{M}$ (т. е. класс $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{X}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$), мы будем говорить, что на $\mathfrak{M}$ определён локально нильпотентный, локально разрешимый, локально конечный или локально конечный и разрешимый радикал соответственно. Под таким радикалом понимается, естественно, само ограничение радикала $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ на класс $\mathfrak{M}$, которое в данной ситуации и только в ней будет обозначаться через LN, LS, LF, LSF, $\mathfrak{X} = L\mathfrak{N}, L\mathfrak{S}, L\mathfrak{F}, L(\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F})$. Точнее, в нашем обсуждении это относится к классам PK-алгебраических алгебр Ли, радикалу LF и равным на них радикалам LS и LSF, классам ниль-алгебр Ли и равным на них радикалам LN, LS, LSF и LF, классам обобщённо специальных алгебр Ли и радикалу LS (см. [3, 4, 11, 23]).

Систему многочленов разрешимости составляют элементы $\{g_i\}_{i\geqslant 0}$ алгебры $F\langle X\rangle$, определённые по индуктивному правилу: $g_0(x_1) = x_1$ и далее

$$g_{i+1}(x_1,\ldots,x_{2^{i+1}}) = g_i(x_1,\ldots,x_{2^i})g_i(x_{2^i+1},\ldots,x_{2^{i+1}}) \quad (i\geqslant 0).$$

Алгебра R над кольцом F называется *слабо разрешимой*, если для каждого её конечного подмножества A найдётся такое $k = k(A)\geqslant 0$, что $g_k(a_1,\ldots,a_{2^k}) = 0$ при любых $a_i\in A$. Класс слабо разрешимых алгебр $\mathfrak{W}$ над кольцом F является радикальным подклассом класса всех алгебр над F, равен своему расширению $A\mathfrak{W}$ (см. [5, теоремы 2.8, 3.8; 22]) и содержит расширение $A(L\mathfrak{S})$ класса локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{S}$ над F. Нижний радикал $T = \mathcal{T}_{\mathfrak{W}}$, определяемый на классе всех алгебр над кольцом F его подклассом $\mathfrak{W}$, называется *слабо разрешимым радикалом*.

Ещё один необходимый нам радикал — верхний ниль-радикал $\mathcal{N}$ на классе алгебр с ассоциативными степенями над кольцом F (нижний радикал, определяемый на этом классе подклассом ниль-алгебр).

Радикал в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{M}$ называется *идеально наследственным*, если $\mathcal{T}(I) = I \cap \mathcal{T}(R)$ для любых алгебры $R \in \mathfrak{M}$ и её идеала I, *специальным*, если $\mathcal{T}$-полупростые алгебры являются подпрямыми произведениями первичных $\mathcal{T}$-полупростых алгебр, и *кручением*, если $\mathcal{T}$ является специальным и идеально наследственным. Для нас особенно значимы специальность радикалов LN, LF и LSF на замкнутых относительно взятия идеалов, конечно порождённых образов и гомоморфных образов классах алгебр их определения, а также то, что радикал Кострикина является кручением на классах алгебр Ли над полями нулевой характеристики (см. [5, теорема 3.4; 11, теорема 7; 13, следствие 1 из предложения 2; 32, теорема 3.10]).

Завершая вводный раздел, отметим, что в любой алгебре R

$$\mathrm{Rad}(R) \subseteq \mathrm{RN}(R) \subseteq \mathrm{RN}^*(R) \subseteq \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{R})}(R) \subseteq \mathcal{T}_{A(L(\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F}))}(R) \subseteq \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{S})}(R) \subseteq T(R),$$
$$\mathrm{RN}(R) \subseteq \mathcal{T}_{L\mathfrak{R}}(R) \subseteq \mathcal{T}_{L(\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F})}(R) \subseteq \mathcal{T}_{L\mathfrak{S}}(R)$$

и $T(R) \subseteq \mathcal{N}(R)$, если R является алгеброй с ассоциативными степенями. Кроме того, $\mathrm{Rad}(L) \subseteq K(L)$ для любой алгебры Ли L и

$$\mathrm{RN}(L) \subseteq K(L) \subseteq \mathcal{T}_{L\mathfrak{R}}(L) = \mathcal{T}_{L(\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F})}(L),$$

если основное кольцо — поле нулевой характеристики (см. [7; 9, теорема 7, с. 87]). Во всякой обобщённо специальной алгебре Ли L

$$\mathrm{Rad}(L) = \mathrm{RN}(L) = \mathrm{RN}^*(L) = \mathrm{LS}(L) = T(L)$$

(см. [3]) и дополнительно $\mathrm{Rad}(L) = K(L)$, в случае если L определена над полем нулевой характеристики (алгеброй над таким полем). Подобные равенства выполняются также в альтернативных и линейных йордановых PI-алгебрах.

2. Радикалы алгебраических алгебр Ли ограниченной степени

Одним из основных инструментов данной работы является конструкция йордановой алгебры алгебры Ли из [28], которая естественным образом дополняет широко используемый в алгебрах Ли аппарат йордановых пар. Следуя [28], мы будем называть 3-энгелевы элементы алгебр Ли *йордановыми элементами*.

Пусть L — алгебра Ли над кольцом F с $1/6$, a — её йорданов элемент, $L^{(a)}$ — алгебра, полученная из L заменой операции умножения на операцию $\cdot_a$, $x \cdot_a y = 1/2[x,a,y]$ для всех $x, y \in L$. Тогда F-подмодуль $\mathrm{Ker}_L\, a = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_a^2 = \{x \in L \mid [a,a,x] = 0\}$ алгебры $L^{(a)}$ является её идеалом, фактор-алгебра по которому $L_a = L^{(a)}/\operatorname{Ker}_L a$ является линейной йордановой алгеброй (см. [28, теорема 2.4]). Алгебра L_a называется *йордановой алгеброй алгебры Ли* L *по элементу* a. Обозначим через ϕ_a канонический эпиморфизм алгебры $L^{(a)}$ на алгебру L_a, $\phi_a\colon x \mapsto \bar{x} = x + \operatorname{Ker}_L a$, $x \in L$. Поскольку

$$\bar{x}^n = \phi_a\big((1/2\operatorname{ad}_{[x,a]})^{n-1}x\big) = 1/2^{n-1}\overline{\operatorname{ad}_{[x,a]}^{n-1} x} \quad (x \in L,\ n \geqslant 1),$$

для всякого элемента $x \in L$, такого что

$$\operatorname{ad}_{[x,a]}^{n} x + f_{n-1}\operatorname{ad}_{[x,a]}^{n-1} x + \ldots + f_1 \operatorname{ad}_{[x,a]} x = 0$$

при некоторых $n \geqslant 1$, $f_i \in F$ ($f_i = 0$ при $n = 1$),

$$\phi_a\big(1/2^n(\operatorname{ad}_{[x,a]}^{n} x + f_{n-1}\operatorname{ad}_{[x,a]}^{n-1} x + \ldots + f_1 \operatorname{ad}_{[x,a]} a)\big) = \bar{x}^{n+1} + g_n\bar{x}^n + \ldots + g_2\bar{x}^2 = 0,$$

где $g_i = f_{i-1}/2^{n-i+1}$, $i = 2, \ldots, n$. Это позволяет сразу сформулировать следующее замечание.

Замечание 2.1. Пусть L_a — йорданова алгебра алгебры Ли L над кольцом F с $1/6$ по её йорданову элементу a, I — идеал кольца F и x — такой элемент алгебры L, что элемент $[x,a]$ является алгебраическим над I. Тогда образ $\bar{x}$ элемента x в йордановой алгебре L_a является её целым над идеалом I элементом. Следовательно, если алгебра Ли L является алгебраической над идеалом I (ниль-алгеброй при $I = \{0\}$), её йорданова алгебра L_a является целой над I (ниль-алгеброй).

Замечание 2.2. Йордановы алгебры PI-алгебры Ли L над кольцом F с $1/6$ по её йордановым элементам являются PI-алгебрами.

Доказательство. Согласно замечанию 1.2 алгебра Ли L удовлетворяет по меньшей мере одному существенному тождеству $h = 0$,

$$h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h_\sigma [x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1}] \in F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle,$$

для некоторых $n \geqslant 1$, $\{h_\sigma\} \subseteq \{0, \pm 1\}$, $h_e = 1$. Поэтому для любых йорданова элемента a алгебры Ли L, её элементов $y_1, \ldots, y_{n+1}$ и их образов $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n+1}$ в йордановой алгебре L_a по элементу a

$$1/2^n h([y_1,a], \ldots, [y_n,a], y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h_\sigma/2^n \big[[y_{\sigma(1)},a], \ldots, [y_{\sigma(n)},a], y_{n+1}\big] = 0,$$

$$\overline{1/2^n h([y_1,a], \ldots, [y_n,a], y_{n+1})} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h_\sigma [\bar{y}_{\sigma(1)}, \ldots, \bar{y}_{\sigma(n)}, \bar{y}_{n+1}] = 0.$$

Следовательно, йорданова алгебра L_a удовлетворяет собственному тождеству $g = 0$,

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h_\sigma [x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1}] \in F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$$

(см. замечание 1.4). □

Замечания 2.1 и 2.2 дополняют также пункты 3 и 4 предложения 4.2 из работы [29].

Замечание 2.3. Пусть L_a — йорданова алгебра алгебры Ли L над кольцом F с $1/6$ по её йорданову элементу a. Тогда образ $\overline{T(L)}$ в йордановой алгебре L_a слабо разрешимого радикала $T(L)$ алгебры Ли L является ниль-идеалом алгебры L_a, $\overline{T(L)} \subseteq \mathcal{N}(L_a)$.

Доказательство. Отметим для начала, что образ $\bar{I} = \phi_a(I)$ любого идеала I алгебры Ли L в её йордановой алгебре L_a является идеалом алгебры L_a. Следует показать, что каждый элемент $y \in T(L)$ имеет нильпотентный образ $\bar{y}$ в алгебре L_a. Положим $y_0 = y$, $y_{k+1} = [y_k, a, y_k]$, $S = \{y, [a, y], [a, a, y]\}$ и $S_k = g_k(S) = \{g_k(s_1, \ldots, s_{2^k}) \mid s_i \in S\}$ для всех $k \geqslant 0$, где g_k — k-й многочлен разрешимости. Используя индукцию по k с очевидным основанием для $k = 0, 1$, несложно установить равенство $\bar{y}^{2^k} = 1/2^{2^k-1}\overline{y_k}$ и включение элемента y_k в подгруппу $\mathbb{Z}S_k$ аддитивной группы алгебры L, порождённой элементами множества S_k, при любом $k \geqslant 0$. Достаточно заметить, что выполнение таких равенства и включения для некоторого $k \geqslant 0$ гарантирует равенство

$$\bar{y}^{2^{k+1}} = \bar{y}^{2^k} \cdot_a \bar{y}^{2^k} = (1/2^{2^k-1}\overline{y_k})^2 = 1/2^{2(2^k-1)+1}\overline{[y_k, a, y_k]} = 1/2^{2^{k+1}-1}\bar{y}_{k+1}$$

и включение

$$y_{k+1} \in [\mathbb{Z}S_k, a, \mathbb{Z}S_k] = \mathbb{Z}[S_k, a, S_k] = \sum_{s, s' \in S_k} \mathbb{Z}[s', a, s] \subseteq \mathbb{Z}[S_k, S_k] = \mathbb{Z}S_{k+1},$$

так как $[a, S] \subseteq S \cup \{0\}$ и вследствие полилинейности многочленов разрешимости

$$[a, s] = \sum_{l=1}^{2^k} g_k(s_1, \ldots, s_{l-1}, [a, s_l], s_{l+1}, \ldots, s_{2^k}) \in \mathbb{Z}S_k \quad (s = g_k(s_1, \ldots, s_{2^k}) \in S_k).$$

Поэтому, подобрав для конечного подмножества S слабо разрешимого радикала $T(L)$ номер $q \geqslant 0$, при котором $S_q = \{0\}$, мы получаем, что $\bar{y}^{2^q} = 1/2^{2^q-1}\bar{y}_q = 0$. $\square$

Замечание 2.4. Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутый относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов класс алгебр Ли над кольцом F, на котором радикал Кострикина K является идеально наследственным, L — невырожденная алгебра Ли без 2-кручения из класса $\mathfrak{M}$ и I — её идеал. Тогда централизатор $C_L(I) = \bigl\{x \in L \mid [x, I] = \{0\}\bigr\}$ идеала I содержит все такие элементы $y \in L$, что $\mathrm{ad}_y^2 I = \{0\}$. Поэтому, в случае если алгебра Ли L сильно первична, $\mathrm{ad}_z^2 I \neq \{0\}$ для любых её ненулевых идеала I и элемента z (см. [13, следствие 2 предложения 2]).

Доказательство. Так как элемент y, $\mathrm{ad}_y^2 I = \{0\}$, входит в радикал Кострикина $K(J)$ порождённой им и элементами идеала I подалгебры $J = Fy + I$, в данной ситуации

$$[y, I] \subseteq [K(J), I] \subseteq I \cap K(J) = K(I) = I \cap K(L) = \{0\}, \quad y \in C_L(I). \qquad \square$$

Следствие 2.5. *Если класс $\mathfrak{M}$ из замечания 2.4 определён над кольцом F с $1/6$, то ненулевые идеалы сильно первичных алгебр Ли из $\mathfrak{M}$ имеют ненулевые образы в их йордановых алгебрах по ненулевым йордановым элементам (при их наличии).*

Используя замечание 2.2, следствие 2.5, сильную первичность (невырожденность) йордановых алгебр сильно первичных (невырожденных) алгебр Ли по их йордановым элементам (см. [28, предложение 2.15; 30, теорема 2.2]) и совпадение на классах линейных йордановых PI-алгебр над кольцами с $1/2$ радикала Маккриммона Mc и верхнего ниль-радикала $\mathcal{N}$ (см. [12, теорема 4]), мы получаем следствие 2.6.

Следствие 2.6. *В условиях следствия 2.5 сильно первичные PI-алгебры Ли из класса $\mathfrak{M}$, имеющие ненулевые йордановы элементы, являются T-полупростыми.*

Следствие 2.7. *Если в условиях следствия 2.5 радикал Кострикина K является кручением на классе $\mathfrak{M}$, то слабо разрешимый радикал $T(L)$ любой алгебры Ли L из $\mathfrak{M}$, ненулевые сильно первичные фактор-алгебры которой содержат ненулевые йордановы элементы и являются PI-алгебрами, входит в её радикал Кострикина $K(L)$.*

Говоря в дальнейшем о какой-либо алгебре R над областью целостности F, которая является F-модулем без кручения, и её скалярном расширении ${}_{\mathbb{F}}R = \mathbb{F} \otimes_F R$ над полем $\mathbb{F}$, $F \subseteq \mathbb{F}$, мы будем отождествлять алгебру R с изоморфной ей F-подалгеброй $1 \otimes R$ алгебры ${}_{\mathbb{F}}R$ над $\mathbb{F}$ и рассматривать ${}_{\mathbb{F}}R$ как $\mathbb{F}$-пространство, порождённое элементами R, ${}_{\mathbb{F}}R = \mathbb{F}R$, с операцией умножения, продолженной с R по линейности.

Используемое ниже понятие PK-алгебраической алгебры из [4] принимает в лиевском случае свою исходную форму из [23]: алгебра Ли L называется *PK-алгебраической*, если для любых её элементов x и y подалгебра $\langle \mathrm{ad}_x^k y \mid k \geqslant 0\rangle$, которую порождают все элементы $\mathrm{ad}_x^k y$, $k \geqslant 0$, является конечно порождённой.

Замечание 2.8. Пусть R — алгебра над кольцом F, порождённая элементами своего подкольца A. Тогда пересечения кольца A с первичными идеалами алгебры R являются его первичными идеалами и первичный радикал A равен его пересечению с первичным радикалом R, $\mathrm{Rad}(A) = A \cap \mathrm{Rad}(R)$.

Доказательство. По условию алгебра $R = \langle A\rangle$ совпадает со своим F-подмодулем FA, порождённым элементами кольца A. Поскольку в любой идеал алгебры R, содержащий произведение IJ идеалов I и J кольца A, входит произведение $F(IJ) = (FI)(FJ)$ её идеалов FI и FJ, порождённых элементами I и J, $\{A \cap P \mid P \in \mathrm{Spec}(R)\} \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ и, как следствие, $\mathrm{Rad}(A) \subseteq A \cap \mathrm{Rad}(R)$. Включение $A \cap \mathrm{Rad}(R) \subseteq \mathrm{Rad}(A)$, а вместе с ним и равенство $\mathrm{Rad}(A) = A \cap \mathrm{Rad}(R)$, следует из совпадения первичного радикала алгебры с её первичным радикалом как кольца и поэлементного описания первичного радикала (см. [5, теорема 2.1; 6, замечание 1.1; 10, теорема 6, с. 193]). □

Теорема 2.9. *Пусть L — алгебра Ли над полем нулевой характеристики $\mathbb{F}$, такая что для некоторого расширения $\mathbb{F}'$ поля $\mathbb{F}$ ненулевые сильно первичные фактор-алгебры её скалярного расширения $L' = {}_{\mathbb{F}'}L$ над полем $\mathbb{F}'$ (при их наличии) содержат ненулевые сильно алгебраические над $\mathbb{F}'$ элементы и являются PI-алгебрами. Тогда алгебра Ли L имеет равные радикал Кострикина $K(L)$ и слабо разрешимый радикал $T(L)$, и потому*

$$K(L) = \mathcal{T}_{L\mathfrak{R}}(L) = \mathcal{T}_{L\mathfrak{S}}(L) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{R})}(L) = \mathcal{T}_{A(L\mathfrak{S})}(L) = T(L).$$

Если алгебра Ли L является PK-алгебраической, то также $K(L) = \mathrm{LSF}(L) = \mathrm{LS}(L)$.

Доказательство. Выберем одно из алгебраически замкнутых расширений $\mathbb{F}''$ поля $\mathbb{F}'$ и рассмотрим скалярное расширение $L'' = {}_{\mathbb{F}''}L'$ алгебры Ли L' над полем $\mathbb{F}''$. Используя совпадение слабо разрешимых радикалов и радикалов Кострикина алгебр Ли с их слабо разрешимыми радикалами и радикалами Кострикина как колец, наследственность на подалгебры слабо разрешимого радикала над любыми кольцами и радикала Кострикина над полями нулевой характеристики (см. [6, замечание 1.1; 13, предложение 2; 32, предложения 3.6, 3.8 и следствие 3.9]), а также невырожденность образов $\mathbb{F}$-подалгебры L и $\mathbb{F}'$-подалгебры $L' = \mathbb{F}'L$ алгебры Ли $L'' = \mathbb{F}''L' = \mathbb{F}''L$ в её невырожденных фактор-алгебрах и полилинейность многочленов разрешимости, можно получить равенства

$$K(L) = L \cap K(L') = L \cap K(L''), \quad T(L) = L \cap T(L') = L \cap T(L'')$$

и свести доказательство к обоснованию равенства $K(L'') = T(L'')$.

Ввиду условий, наложенных на алгебру Ли L', сильной первичности её образов в сильно первичных фактор-алгебрах алгебры Ли L'' (см. замечание 2.8; [30, теорема 1.6]) и существования у нетривиальных тождеств нетривиальных полилинейных следствий (см. [10, с. 28]; замечание 1.2) ненулевые сильно первичные фактор-алгебры алгебры L'' (если они имеются) содержат ненулевые сильно алгебраические элементы и являются PI-алгебрами. Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{F}''$ гарантирует также наличие в них ненулевых йордановых элементов (см. [29, следствие 2.3]). Так как радикал Кострикина является кручением на классах алгебр Ли над полями нулевой характеристики (см. [13, следствие 1 предложения 2; 32, теорема 3.10]), отсюда следует, что $K(L'') \supseteq T(L'')$ и $K(L'') = T(L'')$ (см. следствие 2.7, [7] и замечания о включениях радикалов, сделанные ранее). Применение в случае PK-алгебраической алгебры Ли L результатов работ [17, 23] (см. также [4, 11]) завершает доказательство. □

Замечание 2.10. Пусть $n \geqslant 1$ и L — ниль-алгебра Ли над кольцом F с $1/n!$, такая что она является PI-алгеброй и её ненулевые фактор-алгебры содержат ненулевые n-энгелевы элементы. Тогда алгебра Ли L совпадает со своим радикалом Кострикина $K(L)$, $L = K(L)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что невырожденная алгебра Ли L с такими свойствами может быть только нулевой. Действительно, в противном случае $n \geqslant 3$ и в ненулевой алгебре Ли L имеются ненулевые йордановы элементы (см. [16, лемма 2.1.1, с. 40; 31, следствие 2.4]), причём её йордановы алгебры по ним отличны от нуля и одновременно $\mathcal{N}$-радикальны и $\mathcal{N}$-полупросты (см. замечания 2.1, 2.2, [12, теорема 4; 28, предложение 2.15; 30, теорема 2.2])?! □

Следствие 2.11. *Не существует невырожденных ниль-алгебр Ли над полями нулевой характеристики, которые являются PI-алгебрами и при этом обладают ненулевыми энгелевыми элементами. Если ниль-алгебра Ли L над полем нулевой характеристики $\mathbb{F}$ является PI-алгеброй и её ненулевые фактор-алгебры содержат ненулевые энгелевы элементы, то она локально нильпотентна и равна своему радикалу Кострикина $K(L)$, $L = K(L) = \mathrm{LN}(L)$ (см. также* [13, предложение 1; 29, предложение 6.5]).

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из замечания 2.10, а второе — из первого, теоремы 2.9 и совпадения на классах ниль-алгебр Ли над любыми кольцами локально нильпотентного, локально разрешимого и локально конечного радикалов LN, LS и LF (см. [4, следствие 1.8 и последующее обсуждение; 23]). □

С учётом лемм 8 и 9 из [13] отсюда несложно вывести следствие.

Следствие 2.12. *Если ниль-алгебра Ли L над полем нулевой характеристики $\mathbb{F}$ является PI-алгеброй, то радикал Кострикина $K(L)$ алгебры L равен наименьшему из её идеалов, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых энгелевых элементов, и её радикалу $\mathcal{T}_{\mathrm{Eng}}(L)$, где $\mathcal{T}_{\mathrm{Eng}}$ — нижний радикал, определяемый на классе алгебр Ли над полем $\mathbb{F}$ классом энгелевых алгебр Ли над $\mathbb{F}$.*

Напомним, что подалгебра $S(L)$ алгебры Ли L, порождённая всеми её оболочками сэндвичей, называется *сэндвичевой подалгеброй*.

Замечание 2.13. Пусть $n \geqslant 1$ и L — ниль-алгебра Ли над кольцом F с $1/(2n-2)!$, которая порождается своими n-энгелевыми элементами. Тогда радикал Кострикина $K(L)$ алгебры Ли L входит в её локально нильпотентный радикал $\mathrm{LN}(L)$ и в случае, если L является PI-алгеброй, $L = K(L) = \mathrm{LN}(L)$.

Доказательство. Каждому n-энгелеву элементу x такой алгебры Ли L отвечает её автоморфизм $\exp(\mathrm{ad}_x)$,

$$\exp(\mathrm{ad}_x)\colon y \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mathrm{ad}_x^i\, y}{i!} \quad (y \in L),$$

и вследствие обратимости в кольце F определителя Вандермонда

$$V(0,1,\ldots,n-1) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1} (j-i) = \prod_{k=1}^{n-1} k!$$

любой элемент $y \in L$ порождает равные ad_x-инвариантный и $\exp(\mathrm{ad}_x)$-инвариантный F-подмодули, т. е.

$$\sum_{k\geqslant 0} F \operatorname{ad}_x^k y = \sum_{k=0}^{n-1} F \operatorname{ad}_x^k y = \sum_{k=0}^{n-1} F \exp(\operatorname{ad}_x)^k y = \sum_{k\geqslant 0} F \exp(\operatorname{ad}_x)^k y,$$

где $\exp(\operatorname{ad}_x)^m = \exp(m \operatorname{ad}_x) = \exp(\operatorname{ad}_{mx})$, $m \in \mathbb{Z}$. Поскольку алгебра Ли L порождается своими n-энгелевыми элементами, отсюда следует, что F-подмодули L, инвариантные относительно действия её автоморфизмов, являются идеалами и, в частности, идеалом является её сэндвичева подалгебра $S(L)$. Ввиду верности данного вывода для всех фактор-алгебр алгебры Ли L и локальной нильпотентности сэндвичевых алгебр (см. [14]) LN-полупростые фактор-алгебры L невырожденны, $K(L) \subseteq \mathrm{LN}(L)$ и в ситуации, когда L является PI-алгеброй, $L = K(L) = \mathrm{LN}(L)$ (см. замечание 2.10). □

Центральный результат монографии А. И. Кострикина [16] (теорема 1.7.3, с. 35) может быть сформулирован в следующем виде.

Предложение 2.14. *Пусть $n \geqslant 1$ и L — n-энгелева алгебра Ли над кольцом F с $1/n!$. Тогда алгебра Ли L совпадает со своим первичным радикалом $\mathrm{Rad}(L)$ и, как следствие, радикалом Кострикина $K(L)$ и локально нильпотентным радикалом $\mathrm{LN}(L)$,*

$$L = \mathrm{Rad}(L) = K(L) = \mathrm{LN}(L).$$

Для перехода в предложении 2.14 от поля в исходной версии к кольцу F достаточно рассмотреть ненулевую первичную n-энгелеву алгебру Ли L над F как алгебру над фактор-кольцом $F/\operatorname{Ann}_F L$ по её аннулятору $\operatorname{Ann}_F L = \{f \in F \mid fL = \{0\}\}$ и прийти к противоречию при помощи равенств

$$L = L \cap \mathrm{Rad}({}_{\mathbb{F}}L) = \mathrm{Rad}(L) = \{0\},$$

где ${}_{\mathbb{F}}L = \mathrm{Rad}({}_{\mathbb{F}}L)$ — скалярное расширение L над любым полем $\mathbb{F}$, содержащим область целостности $F/\operatorname{Ann}_F L$. Сходным образом на базе доказательства теоремы 1.7.4 из [16] на с. 125, 126 с использованием специальности локально нильпотентного радикала LN (см. [11, теорема 7; 5, теорема 3.4]) может быть получено короткое доказательство локальной нильпотентности n-энгелевых алгебр Ли над кольцами с $1/n!$.

Отметим и то, что n-энгелевы алгебры Ли в формулировке предложении 2.14 можно заменить на алгебры Ли, которые удовлетворяют тождествам вида $g(\operatorname{ad}_{x_1})x_2 = 0$, где

$$g(t) = t^n + g_{n-1}t^{n-1} + \ldots + g_1 t \in F[t]$$

(см. [10, теорема 7, с. 27]).

На основе построений [16] в [6] было выведен следующий результат.

Предложение 2.15. *Пусть $n \geqslant 1$ и L — алгебраическая алгебра Ли степени не выше n над кольцом F с $1/k(n)!$, где $k(1) = 1$, $k(2) = 2$, $k(3) = k(4) = 7$ и $k(n) = n + 2$ при $n \geqslant 5$. Тогда первичный радикал $\mathrm{Rad}(L)$ алгебры Ли L равен её радикалу Кострикина $K(L)$ и нижнему ниль-радикалу $\mathrm{RN}(L)$, $\mathrm{Rad}(L) = \mathrm{RN}(L) = K(L)$ (см.* [6, теорема 2.14]).

Ниже после ряда вспомогательных замечаний мы приведём другое доказательство этого результата, основанное на редукции к сэндвичевым алгебрам.

Следствие 2.16. *Пусть $n \geqslant 1$ и L — алгебраическая ниль-алгебра Ли степени не выше n над кольцом F с $1/n!$. Тогда $L = \mathrm{Rad}(L) = K(L) = \mathrm{LN}(L)$.*

Доказательство. Предположим для начала, что алгебра Ли L не имеет кручения как $F/\operatorname{Ann}_F L$-модуль (см. выше), т. е. $fx \neq 0$ для всех $0 \neq x \in L$ и $f \in F \setminus \operatorname{Ann}_F L$. Тогда для любых $x, y \in L$ можно подобрать $m \geqslant 1$ и ${}_{y,x}f_i \in F$, $i = 1, \ldots, n-1$, такие что

$$\operatorname{ad}_x^m y = 0 \neq \operatorname{ad}_x^{m-1} y, \quad \operatorname{ad}_x^n y + {}_{y,x}f_{n-1} \operatorname{ad}_x^{n-1} y + \ldots + {}_{y,x}f_1 \operatorname{ad}_x y = 0.$$

Допустив наличие индекса i, такого что ${}_{y,x}f_i \notin \operatorname{Ann}_F L$, мы могли бы выбрать первый индекс k с этим свойством и получили бы, что

$$\operatorname{ad}_x^{m-k-1}(\operatorname{ad}_x^n y + {}_{y,x}f_{n-1} \operatorname{ad}_x^{n-1} y + \ldots + {}_{y,x}f_1 \operatorname{ad}_x y) = {}_{y,x}f_k \operatorname{ad}_x^{m-1} y = 0,$$
$${}_{y,x}f_k \in \operatorname{Ann}_F L?!$$

Поэтому ${}_{y,x}f_i \in \operatorname{Ann}_F L$, $i = 1, \ldots, n-1$, и $\operatorname{ad}_x^n y = 0$. Таким образом, в данной ситуации алгебра Ли L является n-энгелевой. В общем случае из предложения 2.14 и сделанного наблюдения следует, что алгебра Ли L не имеет ненулевых первичных фактор-алгебр, а значит, $L = \mathrm{Rad}(L) = K(L) = \mathrm{LN}(L)$. □

Предложение 2.17. *Пусть $n \geqslant 1$ и R — ассоциативная алгебра над кольцом F с $1/n!$. Тогда произведение $r_1 \cdots r_n$ любых n элементов $r_1, \ldots, r_n$ алгебры R можно записать в виде*

$$r_1 \cdots r_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} q_{ij} y_{ij}^i$$

для некоторых $m_i \geqslant 1$, обратимых в кольце F рациональных кратных $\{q_{ij}\}$ его единицы 1 и элементов $\{y_{ij}\}$ подалгебры $\langle r_1, \ldots, r_n \rangle$ алгебры Ли $R^{(-)}$, порождённой $r_1, \ldots, r_n$ (см. [15; 16, доказательство предложения 1.4.6, с. 23; 25, лемма 2.2, с. 347]).

Следствие 2.18. *Пусть $n \geqslant 1$ и L — подалгебра алгебры Ли $R^{(-)}$ ассоциативной алгебры R над кольцом F с $1/n!$, такая что её элементы являются целыми элементами R степени не выше n. Тогда произведение $x_1 \cdots x_m$ в алгебре R любых $m \geqslant 1$ элементов $x_1, \ldots, x_m$ алгебры Ли L можно представить в виде*

$$x_1 \cdots x_m = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij} y_{ij}^i$$

для некоторых $m_i \geqslant 1$, элементов $\{h_{ij}\}$ кольца F и $\{y_{ij}\}$ подалгебры $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ алгебры L, порождённой $x_1, \ldots, x_m$ ($L = \{0\}$ при $n = 1$).

Следствие 2.19. *Пусть $n \geqslant 3$ и L — алгебраическая алгебра Ли степени не выше n над кольцом F с $1/n!$. Тогда идеал $(S(L)^n)_L$ алгебры Ли L, порождённый элементами n-й степени $S(L)^n$ её сэндвичевой подалгебры $S(L)$, входит в $S(L)$, $(S(L)^n)_L \subseteq S(L)$.*

Доказательство. Поскольку, как известно, произведение элемента алгебры Ли и её оболочки сэндвича является йордановым элементом, из инвариантности подалгебры $S(L)$ алгебры Ли L относительно действия её автоморфизмов следует, что

$$\big[S(L), [S(L), L]\big],\ [S(L)^2, L] \subseteq S(L)$$

(см. доказательство замечания 2.13). При помощи индукции отсюда несложно вывести включения

$$\big[\underbrace{S(L), [\ldots [S(L)}_{k}, L]\ldots]\big],\ [S(L)^k, L] \subseteq S(L)^{k-1} \quad (k \geqslant 2), \tag{1}$$

$$\mathrm{ad}(L)^m S(L)^{l+m} = [\underbrace{L, [\ldots [L}_{m}, S(L)^{l+m}]\ldots]] \subseteq S(L)^l \quad (l, m \geqslant 1), \tag{2}$$

в левых частях которых стоят подмодули F-модуля L, состоящие из конечных сумм произведений элементов указанных множеств. Поэтому согласно предложению 2.17

$$(S(L)^n)_L = S(L)^n + \sum_{l\geqslant 1} \mathrm{ad}(L)^l S(L)^n = \\ = S(L)^n + \sum_{l=1}^{n-1} \mathrm{ad}(L)^l S(L)^n \subseteq \sum_{l=1}^{n} S(L)^l \subseteq S(L). \quad \square$$

Предложение 2.15 получено в [6] путём замены в доказательстве основной теоремы [16] предложения 3.2.2 и его следствия 3.2.3, с. 70 и 74, на следующую их версию.

Предложение 2.20. *Если алгебраическая алгебра Ли L степени не выше некоторого $n \geqslant 1$ над кольцом F имеет нулевой центр, не имеет $n!$-кручения, $5!$-кручения при $n = 3, 4$ и кручения как $(F/\operatorname{Ann}_F L)$-модуль и обладает такими ненулевыми оболочками сэндвичей c_1 и c_2, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $[c_1, c_2] \neq 0$ *и* $[c_1, v, u, c_1, u, u, c_1, c_2] = 0$ *для всех* $u, v \in L$,
2) $[c_1, c_2] = 0$, $[c_2, c_1, a] \neq 0$ *при некотором* $a \in L$ *и*

$$\mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_u \mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_u^2 \mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_{c_2} = 0$$

для всех $u, v \in L$,

3) $[c_1, a, a, a, c_1] \neq 0$ *при некотором* $a \in L$ *и*

$$\mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_u \mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_u^2 \mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_w^2 \mathrm{ad}_{c_1} = 0$$

для всех $u, v, w \in L$,

4) $\operatorname{ad}_{[c_1,u,u,u,c_1]}\operatorname{ad}_{[c_1,v,v,v,c_1]}=0$ *для всех* $u,v\in L$,

то алгебра L *содержит ненулевую оболочку толстого сэндвича.*

Доказательство предложения 2.15. Без ограничения общности мы можем считать алгебру Ли L первичной и вложенной при помощи мономорфизма $\operatorname{ad}\colon x\mapsto\operatorname{ad}_x$, $x\in L$, в алгебру Ли $\operatorname{Ad}(L)^{(-)}$ её присоединённой ассоциативной алгебры $\operatorname{Ad}(L)$, а $n\geqslant 2$. Чтобы установить невырожденность алгебры Ли L, достаточно вывести из предположения о наличии в L ненулевых оболочек сэндвичей существование в ней ненулевых оболочек сэндвичей толщины не ниже $n-1$, которые порождают её ненулевые абелевы идеалы (см. предложение 2.17). При этом на самом деле следует лишь показать, что при $n\geqslant 3$ алгебра Ли L, имеющая ненулевые оболочки сэндвичей, содержит ненулевые оболочки толстых сэндвичей. Переход к оболочкам сэндвичей толщины не ниже $n-1$ сводится к применению теоремы 2.4.6 из [16] на с. 57.

Допустим, что алгебра Ли L имеет ненильпотентную сэндвичеву подалгебру $S(L)$. Тогда ввиду локальной нильпотентности алгебры Ли $S(L)$ (см. [14; 16, теорема 5.3.1, с. 126]) и следствий 2.16, 2.19 алгебра Ли L содержит ненулевой идеал $I=(S(L)^n)_L$, который равен своему первичному радикалу и, значит, обладает ненулевым абелевым идеалом J. Для любых элементов $x\in J$ и $y\in L$

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}^2_{[x,x,y]}&=\bigl[\operatorname{ad}_x,[\operatorname{ad}_x,\operatorname{ad}_y]\bigr]^2=(\operatorname{ad}_x^2\operatorname{ad}_y-2\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x+\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x^2)^2=\\&=-2\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x(\operatorname{ad}_x^2\operatorname{ad}_y-2\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x+\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x^2)=-2\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x^2=0,\end{aligned}$$

так как $\operatorname{ad}_x^3L=\operatorname{ad}_x^2I=\operatorname{ad}_xJ=\{0\}$ и $\operatorname{ad}_x^2\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x=\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x^2=0$ (см. [16, лемма 1.5.6 на с. 28]). Поэтому найдётся ненулевая оболочка сэндвича x алгебры Ли L, $x\in J$, и мы можем доказать существование в L ненулевых оболочек толстых сэндвичей, применив рассуждения из окончания доказательства основной теоремы [16], с. 114—117, к $I_c=I$ и $c_0=x$.

Пусть теперь подалгебра $S(L)$ нильпотентна, $S(L)^{k-1}\neq S(L)^k=\{0\}$ для некоторого $k>1$. При $k>3$, выбрав в алгебре Ли L любую ненулевую оболочку сэндвича $z\in S(L)^3$, мы получаем из (1), (2), что

$$\operatorname{ad}_z\operatorname{ad}^2_{y_1}\operatorname{ad}_z\ldots\operatorname{ad}_z\operatorname{ad}^2_{y_k}\operatorname{ad}_z=\operatorname{ad}_{[y_1,y_1,z]}\cdots\operatorname{ad}_{[y_k,y_k,z]}\operatorname{ad}_z=0\quad(y_1,\ldots,y_k\in L).$$

Согласно предложению 3.1.1 из [16] на с. 60 последнее гарантирует наличие в алгебре Ли L ненулевых оболочек толстых сэндвичей. После описанной редукции к случаю $k\geqslant 3$ доказательство существования в алгебре Ли L ненулевых оболочек толстых сэндвичей может быть выполнено аналогично [16, гл. 4] с заменой ссылок на предложение 3.2.2 и его следствие 3.2.3 на предложение 2.20 и существенным сокращением вывода ключевого предложения 4.1.1 к одной лемме 4.1.3 (см. [16, с. 93, 94]).

Сказанное стоит немного прокомментировать. Для начала напомним, что в алгебре Ли без 2-кручения для любых оболочки сэндвича a и элемента b элемент $[a,b,b,b,a]$ является оболочкой сэндвича, поскольку

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}_{[a,b,b,b,a]} = [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b^3 \mathrm{ad}_a - 3\,\mathrm{ad}_b^2 \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b + 3\,\mathrm{ad}_b \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^2 - \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^3] = \\
&\quad = 2\,\mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^3 \mathrm{ad}_a - 3\,\mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^2 \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b - 3\,\mathrm{ad}_b \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^2 \mathrm{ad}_a, \\
&2\,\mathrm{ad}_{[a,b,b,b,a]}^2 = 18\,\mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^2 \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^2 \mathrm{ad}_a = \\
&\quad = 3\,\mathrm{ad}_a(\mathrm{ad}_{[b,b,b,b,a]} - \mathrm{ad}_b^4 \mathrm{ad}_a - \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^4 + 4\,\mathrm{ad}_b^3 \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b + 4\,\mathrm{ad}_b \mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b^3)\,\mathrm{ad}_a = 0
\end{aligned}$$

(см. [16, лемма 2.4.2, с. 51]). При отсутствии у этой алгебры Ли 6-кручения отсюда следует включение в её сэндвичеву подалгебру элементов $[a, b_1, b_2, b_3, a]$ для любых её элементов b_1, b_2, b_3 (линеаризация по b с учётом $[a, d_1, d_2, a] = 0$ при всех d_1, d_2).

Как и в [16], мы можем предполагать, что в алгебре Ли L нет ненулевых оболочек толстых сэндвичей. Сэндвичева подалгебра $S(L)$ алгебры Ли L имеет ненулевой центр $C = C\big(S(L)\big)$, содержащий вместе с её $(k-1)$-й степенью $S(L)^{k-1}$ ненулевые оболочки сэндвичей L. При этом $[c, x, y] = [x, c, y] \in C$ для всех $c \in C$, $x \in S(L)$ и $y \in L$, так как ввиду (1), (2)

$$\mathrm{ad}_c \mathrm{ad}_{x_1} \mathrm{ad}_{x_2} = \mathrm{ad}_{x_1} \mathrm{ad}_c \mathrm{ad}_{x_2} = \mathrm{ad}_{x_1} \mathrm{ad}_{x_2} \mathrm{ad}_c = 0 \quad (c \in C,\ x_1, x_2 \in S(L)).$$

Если допустить, что $\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_c = 0$ для любых оболочек сэндвичей x и c алгебры Ли L, где $c \in C$, то $\big[[c, y, y, y, c], S(L)\big] = \{0\}$, $[c, y, y, y, c] \in C$ при всех $y \in L$ и, значит,

$$\mathrm{ad}_{[c,u,u,u,c]} \mathrm{ad}_{[c,v,v,v,c]} = 0 \quad (u, v \in L).$$

В таком случае по условию 4) предложения 2.20 алгебра Ли L обладает ненулевыми оболочками толстых сэндвичей. Поэтому алгебра Ли L содержит оболочки сэндвичей c_1 и c_2, $c_2 \in C$, для которых $\mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_{c_2} \neq 0$. Кроме того, в силу сделанного выше замечания $\mathrm{ad}_{c_2} \mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_{c_1} = 0$ для всех $y \in L$. При $k = 2$ элементы c_1 и c_2 в этом равенстве можно поменять местами ($C = S(L)$). При $k = 3$, применяя при необходимости вторую часть доказательства леммы 4.1.3 из [16] к паре (c_1, c_2) с использованием предложения 2.20, мы можем заменить её парой $(c_1, c_2) \in S(L) \times C$ ((c_1, c_2'') в обозначениях леммы 4.1.3), такой что

$$\mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_{c_2} \neq \mathrm{ad}_{c_1} \mathrm{ad}_{c_2} \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_{c_i} = 0 \quad (y \in L,\ i = 1, 2).$$

Переход от данной пары оболочек сэндвичей (c_1, c_2) толщины не ниже 2 к паре оболочек сэндвичей алгебры Ли L произвольной толщины выполняется при помощи предложения 4.2.2 из [16] на с. 109, причём, заметим, первый элемент полученной пары будет входить в центр C подалгебры $S(L)$. После этого сведение к противоречию предположения об отсутствии в алгебре Ли L ненулевых оболочек толстых сэндвичей можно осуществить аналогично окончанию доказательства основной теоремы [16, с. 112—117] для пары её оболочек сэндвичей (c_1, c_2) толщины не ниже $r = n - 1$ и ненулевой оболочки сэндвича $c = 2[c_2, c_1, a] \in C$. □

Поскольку на классах алгебр Ли над кольцом F, которые удовлетворяют условиям предложения 2.15, радикал Кострикина K является кручением (см. [6, следствие 2.15]), замечание 1.5 и следствие 2.7 позволяют получить следствие 2.21.

Следствие 2.21. *Если алгебра Ли L над кольцом F удовлетворяет вместе с F при некотором $n \geqslant 1$ условиям предложения 2.15 и её ненулевые первичные фактор-алгебры* (*при их наличии*) *содержат ненулевые йордановы элементы, то в ней выполняются все равенства теоремы* 2.9, *а также равенства* $\mathrm{Rad}(L) = \mathrm{RN}(L) = \mathrm{RN}^*(L) = K(L)$.

Заметим, что алгебра Ли L совпадает со всеми своими радикалами, участвующими в равенствах следствия 2.21, не только при $n = 1$, когда она является абелевой, но и при $n = 2$. В последнем случае требование наличия в ненулевых первичных фактор-алгебрах алгебры Ли L ненулевых йордановых элементов противоречит их невырожденности и тем самым исключает их существование (см. доказательство следствия 2.16 для $n = 2$ и $m = 3$). Применяя теорему 2.9, замечание 1.5 и следствие 2.21, мы получаем также следствие 2.22.

Следствие 2.22. *Равенства следствия* 2.21 *выполняются во всякой алгебраической алгебре Ли ограниченной степени над полем нулевой характеристики, такой что её ненулевые первичные фактор-алгебры* (*при их наличии*) *содержат ненулевые сильно алгебраические элементы.*

3. Специальные алгебры Ли и невырожденные PI-алгебры Ли с алгебраическим присоединённым представлением

Данную часть работы мы целиком посвятим обсуждению взаимосвязи между условиями специальности, локальной конечномерности и выполнения нетривиального тождества для невырожденных алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением над полями. Из соображений экономии времени мы не будем останавливаться на описании используемых здесь конструкций центрального замыкания и центроида Мартиндейла полупервичной алгебры из монографии [24], которые эквивалентны конструкциям центрального замыкания и расширенного центроида полупервичной алгебры из работ [26, 27] (см. также [35]), и стандартных понятий ультрафильтра над множеством и ультрапроизведения алгебр (см. [20]). Начнём со следующей версии предложения 5.1 из работы [29], которую можно вывести из его доказательства.

Предложение 3.1. *Сильно первичная PI-алгебра Ли L над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики $\mathbb{F}$ является простой и конечномерной, если и только если она содержит ненулевые йордановы элементы и все её йордановы алгебры по ним являются целыми* (*алгебраическими*).

При этом мы пользуемся также наличием в конечномерных простых алгебрах Ли над полем $\mathbb{F}$ ненулевых йордановых элементов, которыми являются, например, ненулевые элементы их корневых подпространств, отвечающих корням наибольшей высоты.

С учётом замечания 1.6 и сделанных ранее замечаний о включениях радикалов и специальности локально конечного радикала LF (см. [5, теорема 3.4; 11, теорема 7]) центральные результаты работ [13, 29] можно сформулировать следующим образом.

Предложение 3.2. *Пусть L — алгебра Ли с алгебраическим присоединённым представлением над полем нулевой характеристики $\mathbb{F}$, сильно первичные фактор-алгебры которой являются PI-алгебрами. Тогда*

1) *алгебра Ли L локально конечномерна* (см. [13, теорема 1]);
2) *ненулевые сильно первичные фактор-алгебры алгебры L (при их наличии) просты и конечномерны над своими центроидами, которые являются алгебраическими расширениями поля $\mathbb{F}$* (см. [29, теорема 1.1]);
3) *фактор-алгебра $L/K(L)$ алгебры L по её радикалу Кострикина $K(L)$ является PI-алгеброй, если и только если она специальна* (см. [29, замечание 6.4]).

Напомним, что центроид Мартиндейла $\mathrm{CM}(R)$ ненулевой первичной алгебры R над кольцом F является полем, а её центральное замыкание $P(R) = \mathrm{CM}(R)R$ — первичной алгеброй над полем $\mathrm{CM}(R)$,

$$\mathrm{CM}(R) = \mathrm{End}_{M(R)'}\big(P(R)\big) = \mathrm{End}_{M(P(R))'}\big(P(R)\big) = Z\big(M\big(P(R)\big)'\big),$$

где $M(R)'$ и $M\big(P(R)\big)'$ — алгебры умножений алгебр R и $P(R)$ с добавленными к ним при необходимости тожественными изоморфизмами Id_R и $\mathrm{Id}_{P(R)}$, $Z\big(M\big(P(R)\big)'\big)$ — центр алгебры $M\big(P(R)\big)'$. Кроме того, центральное замыкание $P(R)$ и центроид Мартиндейла $\mathrm{CM}(R)$ простой алгебры R равны R и её центроиду $\mathrm{End}_{M(R)'}(R)$ (см. [24, предложение 3.2, лемма 3.3, с. 44, 45]).

Для любой ассоциативной алгебры R, такой что её фактор-алгебра $R/\operatorname{Rad}(R)$ по первичному радикалу $\operatorname{Rad}(R)$ является PI-алгеброй, определим *p.i.-степень* $\mathrm{p.i.deg}\,R$, полагая $\mathrm{p.i.deg}\,R = 0$, если $R = \operatorname{Rad}(R)$, и $\mathrm{p.i.deg}\,R = n/2$, где n — наименьшая степень стандартного тождества, которому удовлетворяет алгебра $R/\operatorname{Rad}(R)$, иначе.

Отметим, что в п. 2) предложения 3.2 каждая ненулевая сильно первичная фактор-алгебра L/P алгебры Ли L проста и как алгебра над своим центроидом $\mathrm{End}_{\mathrm{Ad}(L/P)}(L/P)$ (простота конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики равносильна её первичности), и как алгебра над полем $\mathbb{F}$. Согласно теореме плотности (см. [8, § II.2; 18, с. 92]) присоединённая ассоциативная алгебра $\mathrm{Ad}(L/P)$ алгебры Ли L/P совпадает с алгеброй эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathrm{Ad}(L/P)}(L/P)$-пространства L/P,

$$\mathrm{Ad}(L/P) = \mathrm{Ad}(L/P)' = \mathrm{End}_{\mathrm{End}_{\mathrm{Ad}(L/P)}(L/P)}(L/P) \cong M_n\big(\mathrm{End}_{\mathrm{Ad}(L/P)}(L/P)\big),$$

где $n = \dim_{\mathrm{End}_{\mathrm{Ad}(L/P)}}(L/P) = \mathrm{p.i.deg}\,\mathrm{Ad}(L/P)$.

Ненулевая полупервичная алгебра Ли M над кольцом F является специальной, если и только если размерности центральных замыканий её ненулевых первичных фактор-алгебр над их центроидами Мартиндейла не превосходят некоторого числа $d(M)$. Для специальной алгебры Ли M существование такого $d(M)$ установлено в [3] (при помощи [24, теорема 4.1, с. 47]); показано, что $d(M) \leqslant (\mathrm{p.i.deg}\, R)^2$, где R — любая ассоциативная обёртывающая PI-алгебра алгебры M. С другой стороны, если алгебра Ли M является подпрямым произведением своих ненулевых первичных фактор-алгебр $M_a = M/P_a$, $a \in A$, $\dim_{\mathrm{CM}(M_a)} P(M_a) \leqslant d(M)$, то её присоединённая ассоциативная алгебра $\mathrm{Ad}(M)$ представима в виде подпрямого произведения алгебр $\mathrm{Ad}(M_a)$, $a \in M$, так так каждый естественный эпиморфизм $M \to M_a$, $a \in A$, индуцирует эпиморфизм $\mathrm{Ad}(M) \to \mathrm{Ad}(M_a)$ с ядром $C(M, P_a) = \{\psi \in \mathrm{Ad}(M) \mid \psi(M) \subseteq P_a\}$. С учётом вложений $\mathrm{ad}\colon M_a \to \mathrm{Ad}(M_a)^{(-)}$ и $\mathrm{Ad}(M_a) \to \mathrm{Ad}\big(P(M_a)\big)$, $a \in A$, отсюда следует выполнение на алгебрах M и $\mathrm{Ad}(M)$ всех полилинейных тождеств матричных алгебр $M_{d(M)}(F)^{(-)}$ и $M_{d(M)}(F)$, а в случае если F — алгебра над бесконечным полем, также всех тождеств данных алгебр. Вместе с тем мы получаем, что

$$\mathrm{p.i.deg}\,\mathrm{Ad}(M) \leqslant \max_{a\in A} \dim_{\mathrm{CM}(M_a)} P(M_a) \leqslant \big(\mathrm{p.i.deg}\,\mathrm{Ad}(M)\big)^2.$$

Используя данные наблюдения и специальность радикала Кострикина K на классах алгебр Ли над полями нулевой характеристики (см. выше), мы можем сделать следующее замечание.

Замечание 3.3. В случае если в п. 3) предложения 3.2 фактор-алгебра $L/K(L)$ алгебры Ли L является PI-алгеброй и $L \neq K(L)$, максимальная размерность ненулевой сильно первичной фактор-алгебры алгебры L над её центроидом совпадает с p.i.-степенью $\mathrm{p.i.deg}\,\mathrm{Ad}\big(L/K(L)\big)$ алгебры $\mathrm{Ad}\big(L/K(L)\big)$.

Опираясь на лемму 1 работы [11] (см. [10, лемма 7, с. 131]), мы докажем следующую лемму.

Лемма 3.4. *Пусть R — конечная алгебра над кольцом F, которое является целым над своим подкольцом H, содержащим его единицу. Тогда алгебра R над кольцом H является локально конечной и сильно алгебраической.*

Доказательство. Зафиксируем любые конечную систему порождающих $\{e_1, \ldots, e_n\}$ F-модуля $R = Fe_1 + \ldots + Fe_n$, конечно порождённую H-подалгебру $A = {}_H\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ алгебры R и выражения

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} f_{ijk} e_k, \quad a_l = \sum_{k=1}^{n} g_{lk} e_k \quad (i, j = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, m)$$

для подходящих $f_{ijk}, g_{lk} \in F$. Положим

$$G = \{f_{ijk},\, g_{lk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, m\}.$$

По условию каждый элемент $f \in F$ аннулируется некоторым многочленом

$${}_f h(t) = t^{m_f} + {}_f h_{m_f - 1} t^{m_f - 1} + \ldots + {}_f h_1 t \in H[t],$$

$m_f = \deg {}_f h \geqslant 1$ ($m_f = 1$ при $f = 0$), ${}_f h(f) = 0$. Обозначим через H' подкольцо кольца H, порождённое коэффициентами многочленов ${}_g h$, $g \in G$, и через F' —

H'-подалгебру кольца F, которую порождают его единица 1 ($1 \in H' \subseteq H \subseteq F$) и элементы набора G. Согласно теореме Гильберта о базисе кольцо H' нётерово. Кроме того, по построению алгебра F' порождается как H'-модуль конечной системой элементов

$$G' = \left\{ \prod_{g \in G} g^{k_g} \;\middle|\; 0 \leqslant k_g \leqslant m_g - 1,\ g \in G \right\},$$

F'-подалгебра $R' = {}_{F'}\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ алгебры R, которую порождают элементы $e_1, \ldots, e_n$, равна порождённому ими F'-подмодулю и содержит F'-подалгебру $A' = {}_{F'}\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, порождённую элементами $a_1, \ldots, a_m$,

$$R' = F'e_1 + \ldots + F'e_n \supseteq A'.$$

Отсюда следует, что алгебра R' конечна над нётеровым кольцом H' и является нётеровым H'-модулем,

$$R' = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n,\ g' \in G'} H'g'e_i.$$

Поэтому H'-подалгебра $A'' = {}_{H'}\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ алгебры R', которую порождают элементы $a_1, \ldots, a_m$, конечна над кольцом H' и H-подалгебра $A = HA''$ конечна над кольцом H. Поскольку это верно для каждой конечно порождённой H-подалгебры A алгебры R, R локально конечна над кольцом H.

Таким образом, конечные и, более того, локально конечные алгебры над кольцом F локально конечны над кольцом H. Для $F = H$ данный вывод соответствует хорошо известному утверждению о локальной конечности конечных алгебр. Остаётся заметить, что конечные алгебры над кольцом F являются сильно алгебраическими над кольцами F и H и имеют локально конечные над ними алгебры умножений, поскольку алгебры эндоморфизмов конечно порождённых F-модулей локально конечны над F и H (см. [34, предложение 1.3.1, с. 14]). □

Заметим также, что для колец F и H в условиях леммы 3.4 и любой алгебры над F целостность её элемента над F равносильна его целостности над H. Основу следующего наблюдения составляет идея доказательства леммы 5.2 из [29].

Лемма 3.5. *Для любой алгебры Ли L над полем $\mathbb{F}$ следующие условия эквивалентны*:

1) *L является локально конечномерной алгеброй с алгебраическим присоединённым представлением*;
2) *каждая конечно порождённая подалгебра алгебры L содержится в некоторой её подалгебре, имеющей конечный базис из сильно алгебраических в L элементов*;
3) *присоединённая ассоциативная алгебра $\mathrm{Ad}(L)$ локально конечномерна.*

Доказательство. Для любой подалгебры M алгебры Ли L обозначим через $\mathrm{Ad}^L(M)$ подалгебру алгебры $\mathrm{Ad}(L)$, порождённую всеми внутренними дифференцированиями ad_x, $x \in M$, $\mathrm{Ad}^L(M) = \langle \mathrm{ad}_x \mid x \in M \rangle$. Каждой системе порождающих Z алгебры Ли M отвечает система порождающих $\{\mathrm{ad}_z \mid z \in Z\}$ алгебры $\mathrm{Ad}^L(M)$. Так как алгебра Ли M совпадает с суммой своих идеалов, порождённых элементами системы Z, $M = \sum\limits_{z \in Z} (z)_M$, где $(z)_M = \mathbb{F}z + \mathrm{Ad}^L(M)z$, $\mathrm{Ad}^L(M)z = \{\phi(z) \mid \phi \in \mathrm{Ad}^L(M)\}$, $z \in Z$, она является также линейной оболочкой элементов Z и их образов при действии элементов любого базиса Y пространства $\mathrm{Ad}^L(M)$, $M = \sum\limits_{z \in Z,\ \psi \in \{\mathrm{Id}_L\} \cup Y} \mathbb{F}\psi(z)$. Поэтому при наличии конечных Z и Y алгебра Ли M является конечномерной, $(3) \Longrightarrow (1)$.

Если теперь Z — упорядоченный базис пространства M, то согласно теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта пространство $\mathrm{Ad}^L(M)$ порождается элементами вида

$$\mathrm{ad}_{z_1}^{k_1} \cdots \mathrm{ad}_{z_m}^{k_m} \quad (z_1, \ldots, z_m \in Z,\ z_1 < z_2 < \ldots < z_m,\ k_1, \ldots, k_m > 0,\ m \geqslant 1)$$

(см. [9, теорема 3, с. 178]). При этом, естественно, можно считать, что для любого сильно алгебраического элемента $z \in Z$ все показатели степеней дифференцирования ad_z в записи указанных элементов меньше наименьшей степени аннулирующего ad_z ненулевого многочлена без свободного члена над полем $\mathbb{F}$. Отсюда следует, что любой подалгебре M алгебры Ли L, имеющей конечный базис из сильно алгебраических в L элементов, соответствует конечномерная подалгебра $\mathrm{Ad}^L(M)$ алгебры $\mathrm{Ad}(L)$. Вместе с тем, поскольку каждая конечно порождённая подалгебра алгебры $\mathrm{Ad}(L)$ входит в её подалгебру $\mathrm{Ad}^L(M)$ для подходящей конечно порождённой подалгебры M алгебры Ли L, мы получаем, что $(2) \Longrightarrow (3)$. Импликация $(1) \Longrightarrow (2)$ очевидна.

Отметим, что локальная конечность алгебры над кольцом F следует из локальной конечности её алгебры умножений в любом случае, если её конечно порождённые подалгебры имеют конечно порождённые алгебры умножений. $\square$

Теорема 3.6. *Ненулевая первичная алгебра Ли L над полем $\mathbb{F}$ является специальной алгеброй с алгебраическим присоединённым представлением в том и только в том случае, если её центроид Мартиндейла $\mathrm{CM}(L)$ алгебраичен над своим подполем $\mathbb{F}$ и её центральное замыкание $P(L)$ конечномерно над полем $\mathrm{CM}(L)$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.4 и замечаниям, сделанным после предложения 3.2, необходимо лишь показать, что ненулевая первичная специальная алгебра Ли L над полем $\mathbb{F}$ с алгебраическим присоединённым представлением имеет алгебраический над $\mathbb{F}$ центроид Мартиндейла $\mathrm{CM}(L)$. Алгебру Ли L можно отождествить с её образом $\mathrm{ad}(L)$ в алгебре Ли $\mathrm{Ad}(L)^{(-)}$ её присоединённой ассоциативной алгебры $\mathrm{Ad}(L)$ при действии вложения $\mathrm{ad}\colon x \mapsto \mathrm{ad}_x$, $x \in L$. Используя лемму Цорна, выделим максимальный идеал M среди всех идеалов алгебры $\mathrm{Ad}(L)$, имеющих нулевое пересечение с алгеброй Ли L, и отождествим L с её образом в алгебре Ли $A^{(-)}$ фактор-алгебры по нему $A = \mathrm{Ad}(L)/M$.

Вследствие специальности алгебры Ли L алгебры $\mathrm{Ad}(L)$ и A являются PI-алгебрами. Поскольку по построению ненулевые идеалы алгебры A пересекаются с её первичной лиевской подалгеброй L по ненулевым идеалам L, алгебра A также является первичной. Поэтому согласно обобщённой теореме Познера алгебра A имеет ненулевой центр $Z(A)$ и её кольцо частных $Q = S^{-1}A$, $S = Z(A) \setminus \{0\}$, является конечномерной центральной простой алгеброй над его полем частных $Z(Q) = S^{-1}Z(A)$ (см. [21, 33]). Отсюда следует выполнение на алгебре Ли L всех тождеств с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ конечномерной алгебры Ли $Q^{(-)}$ над полем $Z(Q)$, а вместе с тем локальная конечномерность L (см. [13, лемма 7]) и алгебр $\mathrm{Ad}(L)$ и A (см. лемму 3.5). Значит, центр $Z(A)$ алгебры A является полем, алгебраичным над полем $\mathbb{F}$ (его образом в $Z(A)$ при вложении $f \mapsto f1$, $f \in \mathbb{F}$, где 1 — единица A), и $A = Q$.

По аналогии с началом доказательства выберем в подалгебре $Z(A)L$ алгебры Ли $A^{(-)}$ над полем $Z(A)$, порождённой элементами её $\mathbb{F}$-подалгебры L, максимальный идеал K среди всех идеалов $Z(A)L$, пересекающихся по нулю с L, и отождествим L с её образом в фактор-алгебре $L' = Z(A)L/K$. При этом алгебра Ли L' над полем $Z(A)$ конечномерна, порождается элементами своей $\mathbb{F}$-подалгебры L, $L' = Z(A)L$, и ввиду первичности L и нетривиальности пересечений с L ненулевых идеалов L' первична. Поэтому алгебра Ли L' содержит единственный минимальный идеал L'', который является единственным минимальным идеалом её центрального замыкания $P(L')$. Последнее следует из того, что простой подмодуль L'' квазиинъективной оболочки $P(L')$ $\mathrm{Ad}(L')'$-модуля L' входит во все её ненулевые подмодули и, как следствие, совпадает с каждым изоморфным ему подмодулем $\phi(L'')$, $0 \neq \phi \in \mathrm{CM}(L')$, $L'' = \mathrm{CM}(L')L''$. Централизатор $\mathrm{End}_{\mathrm{Ad}(L')'}(L'')$ идеала L'' состоит из ограничений на L'' элементов центроида Мартиндейла $\mathrm{CM}(L')$ алгебры Ли L' и изоморфен полю $\mathrm{CM}(L')$ над полем $Z(A)$ (см. [24, предложение 3.1, с. 43]). Следовательно, поле $\mathrm{CM}(L')$ является конечным расширением поля $Z(A)$ (точнее, изоморфного ему подполя $Z(A)\,\mathrm{Id}_{P(L')}$, где $\mathrm{Id}_{P(L')}$ — единица $\mathrm{CM}(L')$),

$$\bigl(\mathrm{CM}(L') : Z(A)\bigr) = \dim_{Z(A)} \mathrm{End}_{\mathrm{Ad}(L')'}(L'') \leqslant \\ \leqslant \dim_{Z(A)} \mathrm{End}_{Z(A)}(L'') = (\dim_{Z(A)} L'')^2.$$

Используя установленную ранее алгебраичность поля $Z(A)$ над полем $\mathbb{F}$, мы получаем также, что поле $\mathrm{CM}(L')$ и поле $\mathrm{CM}(L)$, которое может быть вложено над $\mathbb{F}$ в $\mathrm{CM}(L')$ (см. [24, предложение 4.1, с. 49]), являются алгебраическими расширениями $\mathbb{F}$. □

Приведённые ниже свойства ультрапроизведений алгебр Ли могут быть выведены из общих результатов [20]. Тем не менее для наглядности они снабжены отдельными доказательствами.

Замечание 3.7. Если $\{L_a\}_{a\in I}$ — непустое семейство невырожденных алгебр Ли, в котором каждая алгебра Ли L_a, $a \in I$, определена над некоторым кольцом F_a, то ультрапроизведение L_D алгебр $\{L_a\}_{a\in I}$ по любому ультрафильтру D

над множеством I является невырожденной алгеброй Ли (см. также [12, лемма 3]).

Доказательство. Напомним, что алгебра Ли L_D является фактор-алгеброй алгебры Ли $L = \prod\limits_{a\in I} L_a$ над кольцом $F = \prod\limits_{a\in I} F_a$ по идеалу

$$U_D(L) = \{u \in L \mid I \setminus \mathrm{Supp}(a) = \{a \in I \mid u(a) = 0\} \in D\},$$

$L_D = L/U_D(L)$, которую можно также рассматривать как алгебру над фактор-кольцом $F_D = F/U_D(F)$. Поскольку для любого множества A, $A \subseteq I$, либо $A \in D$, либо $I \setminus A \in D$ (см. [20, теорема 4, с. 196]), элемент $x' = x + U_D(L) \in L_D$, где $x \in L$, отличен от нуля, если и только если $\mathrm{Supp}(x) = \{a \in I \mid x(a) \neq 0\} \in D$. Покажем, что ненулевой элемент $x' \in L_D$ не может быть оболочкой сэндвича. Обозначим через I' множество тех индексов $a \in I$, для которых элемент $x(a) \in L_a$ не является 2-энгелевым. Ввиду невырожденности алгебр Ли $\{L_a\}_{a\in I}$ можно подобрать элементы $y_a \in L_a$, $a \in I'$, если $I' \neq \varnothing$, и $u_b, v_b \in L_b$, $b \in \mathrm{Supp}(x) \setminus I'$, если $I' \neq \mathrm{Supp}(x)$, такие что $[x(a), x(a), y_a] \neq 0$ и $[x(b), u_b, x(b), v_b] \neq 0$. Выделим элементы $y, u, v \in L$, $y(a) = y_a$ при $a \in I'$, $y(a) = 0$ при $a \in I \setminus I'$, $u(b) = u_b$ и $v(b) = v_b$ при $b \in \mathrm{Supp}(x) \setminus I'$, $u(b) = v(b) = 0$ при $b \in I' \cup \big(I \setminus \mathrm{Supp}(x)\big)$. В ультрафильтр D входит хотя бы одно из множеств $\mathrm{Supp}([x, x, y]) = I'$ и $\mathrm{Supp}([x, u, x, v]) = \mathrm{Supp}(x) \setminus I'$, так как в противном случае он содержал бы, помимо множества $\mathrm{Supp}(x)$, множества $I \setminus I'$, $I \setminus (\mathrm{Supp}(x) \setminus I')$, $\big(I \setminus (\mathrm{Supp}(x) \setminus I')\big) \cap \mathrm{Supp}(x) = I'$ и $I' \cap (I \setminus I') = \varnothing$?! Значит, по меньшей мере один из элементов $[x', x', y']$ и $[x', u', x', v']$ алгебры Ли L_D не равен нулю и её элемент x' не является оболочкой сэндвича. □

Замечание 3.8. Если $\{L_a\}_{a\in I}$ — непустое семейство алгебр Ли, в котором каждая алгебра L_a, $a \in I$, определена над некоторым кольцом F_a, то элемент x алгебры Ли $L = \prod\limits_{a\in I} L_a$, такой что элемент $x(a) \in L_a$, $a \in I$, является сильно алгебраическим над идеалом J_a кольца F_a степени не выше некоторого $n \geqslant 1$, является сильно алгебраическим над идеалом $J = \prod\limits_{a\in I} J_a$ кольца $F = \prod\limits_{a\in I} F_a$ степени не выше n.

Доказательство. Поскольку каждое дифференцирование $\mathrm{ad}_{x(a)}$, $a \in I$, аннулируется некоторым многочленом

$${}_a f(t) = t^n + {}_a f_{n-1} t^{n-1} + \ldots + {}_a f_1 t \in F_a[t], \quad {}_a f_i \in J_a,$$

многочлен

$$f(t) = t^n + f_{n-1} t^{n-1} t^{n-1} + \ldots + f_1 t \in F[t]$$

с $f_i \in J$, $f_i(a) = {}_a f_i$, $a \in I$, аннулирует дифференцирование ad_x,

$$\big(f(\mathrm{ad}_x)(y)\big)(a) = {}_a f\big(\mathrm{ad}_{x(a)}\big)\big(y(a)\big) = 0$$

при всех $y \in L$, $a \in I$. □

Замечание 3.9. Присоединённая ассоциативная алгебра $\mathrm{Ad}(L)$ алгебры Ли L с алгебраическим присоединённым представлением степени не выше

$n \geqslant 2$ над кольцом F с $1/n!$ удовлетворяет полилинейному тождеству $g = 0$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, $m \geqslant 1$, если и только если на L выполняются тождества $g_{k_1,\ldots,k_m} = 0$, $1 \leqslant k_1, \ldots, k_m \leqslant n-1$, где

$$g_{k_1,\ldots,k_m}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = g(\mathrm{ad}_{x_1}^{k_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{x_m}^{k_m})(x_{m+1}) \in F_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle \subset F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle^{(-)}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что согласно следствию 2.18 алгебра $\mathrm{Ad}(L)$ порождается как F-модуль степенями внутренних дифференцирований алгебры Ли L с показателями меньше n. □

По аналогии с [16], гл. 6, п. 5.5, с. 181, мы докажем следующую лемму.

Лемма 3.10. *Для каждого $n \geqslant 1$ существует $p(n) \geqslant 1$, такое что все невырожденные алгебры Ли с алгебраическим присоединённым представлением степени не выше n над полями характеристики $p > p(n)$ являются специальными.*

Доказательство. Допустив отсутствие такого $p(n)$ для некоторого $n \geqslant 1$, мы можем выбрать бесконечное семейство неспециальных невырожденных алгебр Ли $\{L_i\}_{i\geqslant 1}$ с алгебраическим присоединённым представлением степени не выше n, в котором каждая алгебра L_i, $i \geqslant 1$, определена над полем $\mathbb{F}_i$ характеристики $p_i > n$, $p_{i+1} > p_i$. Рассмотрим ультрапроизведение L_D алгебр Ли $\{L_i\}_{i\geqslant 1}$ по ультрафильтру Фреше D над множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ как алгебру над ультрапроизведением $\mathbb{F}_D$ полей $\{\mathbb{F}_i\}_{i\geqslant 1}$ по D. Поскольку алгебра Ли L_D над полем нулевой характеристики $\mathbb{F}_D$ невырожденная и имеет алгебраическое присоединённое представление степени не выше n, алгебра L_D является специальной и её присоединённая ассоциативная алгебра $\mathrm{Ad}(L_D)$ удовлетворяет какому-то полилинейному тождеству $g = 0$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, $m \geqslant 1$, с коэффициентами ± 1 (см. предложение 3.2, замечания 3.7, 3.8 и 1.5). Поэтому на алгебре L_D выполняются все тождества $g_{k_1,\ldots,k_m} = 0$,

$$g_{k_1,\ldots,k_m}(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{Z}_{\mathrm{Lie}}\langle X\rangle, \quad 1 \leqslant k_1, \ldots, k_m \leqslant n-1$$

(см. замечание 3.9). Для любых $k_1, \ldots, k_m$, $1 \leqslant k_1, \ldots, k_m \leqslant n-1$, обозначим через $A_{k_1,\ldots,k_m}$ множество таких $i \geqslant 1$, что алгебра Ли L_i не удовлетворяет тождеству $g_{k_1,\ldots,k_m} = 0$, подберём для каждого $i \in A_{k_1,\ldots,k_m}$, если $A_{k_1,\ldots,k_m} \neq \varnothing$, элементы $y_{i1}, \ldots, y_{im+1} \in L_i$, для которых $g_{k_1,\ldots,k_m}(y_{i1}, \ldots, y_{im+1}) \neq 0$, и выделим элементы $y_j \in L = \prod\limits_{i\geqslant 1} L_i$, $y_j(i) = y_{ij}$ при $i \in A_{k_1,\ldots,k_m}$, $y_j(i) = 0$ при $i \in \mathbb{N} \setminus A_{k_1,\ldots,k_m}$, $j = 1, \ldots, m+1$. Тогда

$$g_{k_1,\ldots,k_m}(y_1, \ldots, y_{m+1}) \in U_D(L),$$
$$\mathbb{N} \setminus \mathrm{Supp}\big(g_{k_1,\ldots,k_m}(y_1, \ldots, y_{m+1})\big) = \mathbb{N} \setminus A_{k_1,\ldots,k_m} \in D,$$

и, как следствие,

$$\varnothing \neq B = \bigcap_{1\leqslant k_1,\ldots,k_n\leqslant n-1} (\mathbb{N} \setminus A_{k_1,\ldots,k_m}) = \mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{1\leqslant k_1,\ldots,k_m\leqslant n-1} A_{k_1,\ldots,k_m}\right) \in D.$$

При этом каждая алгебра Ли L_i, $i \in B$, удовлетворяет всем тождествам $g_{k_1,\ldots,k_m} = 0$, $1 \leqslant k_1, \ldots, k_m \leqslant n-1$, а её присоединённая ассоциативная алгебра $\mathrm{Ad}(L_i)$ — тождеству $g = 0$ (см. замечание 3.9). Ввиду невырожденности алгебр Ли L_i, $i \in B$, отсюда следует их специальность, что противоречит исходному предположению.

Отметим также, что тождество $g = 0$ в этом рассуждении можно заменить любым собственным полилинейным тождеством алгебры $\mathrm{Ad}(L_D)$ с коэффициентами из кольца $F = \prod\limits_{i \geqslant 1} \mathbb{F}_i$. □

Используя сходные рассуждения, алгебраическую замкнутость ультрапроизведений алгебраически замкнутых полей и следствие 2.3 из работы [29], можно доказать существование для каждого $n \geqslant 1$ такого $l(n) \geqslant 1$, что любая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > l(n)$, имеющая ненулевые сильно алгебраические элементы степени не выше n, содержит ненулевые йордановы элементы.

Теорема 3.11. *Для каждого $n \geqslant 1$ существует $q(n) \geqslant n$, такое что любая алгебра Ли L с алгебраическим присоединённым представлением степени не выше n над полем $\mathbb{F}$ характеристики $p > q(n)$ является локально конечномерной и при этом*

1) *полупервичные фактор-алгебры алгебры L невырожденны и специальны*;
2) *центральные замыкания ненулевых первичных фактор-алгебр алгебры L (при их наличии) имеют размерности не выше некоторого $d(L)$ над своими центроидами Мартиндейла, которые являются алгебраическими расширениями поля $\mathbb{F}$*;
3) *если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то ненулевые первичные фактор-алгебры алгебры L совпадают со своими центральными замыканиями, имеют равные $\mathbb{F}$ центроиды Мартиндейла и содержат минимальные идеалы (по одному каждая), которые являются конечномерными простыми алгебрами Ли над $\mathbb{F}$*;
4) *в алгебре L выполняются все равенства следствия 2.21.*

Доказательство. Случай абелевых алгебр Ли, $n = 1$, не нуждается в рассмотрении. При $n \geqslant 2$ следует лишь положить $q(n) = \max\{k(n), p(n)\}$, где $k(n)$ и $p(n)$ — параметры из предложения 2.15 и леммы 3.10, и воспользоваться теоремой 3.6, комментариями к предложению 3.2, леммой 3.4 и специальностью локально конечного радикала LF (см. [5, теорема 3.4; 11, теорема 7]).

В пункте 3) любая ненулевая первичная фактор-алгебра L/P алгебры Ли L, $L \neq \mathrm{Rad}(L)$, конечномерна над полем $\mathbb{F}$ и потому содержит единственный минимальный идеал M, который является также наименьшим из её ненулевых идеалов. Для каждого идеала N идеала M цепочка его степеней $\{N^k\}_{k \geqslant 1}$ стабилизируется на некотором конечном шаге $k \geqslant 1$, $N^k = N^\omega = \bigcap\limits_{i \geqslant 1} N^i$. Поскольку подалгебра N^k является идеалом алгебры Ли L/P (см. [25, лемма 3.2, с. 10]), она либо равна её идеалу M и $N^k = N = M$, либо равна нулю и $N \subseteq K(M) = M \cap K(L/P) = \{0\}$ (см. [6, следствие 2.15]). Поэтому идеал M является простой алгеброй Ли.

Пункт 4) можно вывести из локальной конечномерности алгебры Ли L, пункта 1) и совпадения на классах обобщённо специальных алгебр Ли над кольцами первичного радикала Rad, локально разрешимого радикала LS и слабо разрешимого радикала T (см. [3]). $\square$

Так как в теореме 3.11 центральное замыкание $P(L/P)$ любой ненулевой первичной фактор-алгебры L/P алгебры Ли L имеет алгебраическое присоединённое представление степени не выше некоторого $m(L)$, $1 \leqslant m(L) \leqslant d(L)$, при $p > \max\{q(n), k(m(L))\}$ его единственный минимальный идеал M_P является конечномерной простой алгеброй Ли над полем $\mathrm{CM}(L/P)$ (см. доказательство теоремы 3.11). Вместе с тем алгебра Ли M_P проста и над полем $\mathbb{F}$, поскольку каждый её ненулевой $\mathbb{F}$-идеал I содержит ненулевой $\mathrm{CM}(L/P)$-идеал $[M_P, I]$, $\{0\} \neq I^2 \subseteq [M_P, I] \subseteq I$, и, следовательно, равен M_P. Поэтому в данном случае алгебры Ли L/P и $P(L/P)$ вкладываются в алгебру дифференцирований $\mathrm{Der}(M_P)$ локально конечномерной простой алгебры Ли M_P над полем $\mathbb{F}$, конечномерной над полем $\mathrm{CM}(L/P)$ и его конечным расширением $\mathrm{CM}(M_P) = \mathrm{End}_{\mathrm{Ad}(M_P)'}(M_P)$.

Отметим, что величину $d(L)$ в пункте 2) теоремы 3.11 можно оценить сверху квадратом наименьшей из p.i.-степеней полупервичных ассоциативных обёртывающих PI-алгебр алгебры Ли $L/\mathrm{Rad}(L)$. Кроме того, пункты 1)—3) при $q(n) = p(n)$ можно сформулировать для невырожденных и сильно первичных фактор-алгебр алгебры Ли L.

Дополнение

Помимо стандартного понятия абсолютного делителя нуля йордановой алгебры, в ряде случаев удобнее использовать его вариант с дополнительным условием равенства нулю квадрата элемента. Применительно к линейной йордановой алгебре J над кольцом F с $1/2$ абсолютные делители нуля с нулевым квадратом можно определить как элементы J, которые являются абсолютными делителями её расширения $\hat{J} = J + F \cdot 1$ формальным присоединением единицы 1. Квадрат x^2 любого абсолютного делителя нуля x алгебры J является её абсолютным делителем нуля с нулевым квадратом, поскольку $2m_x^2 = m_{x^2}$ и $2m_x^3 + m_{x^3} = 3m_x m_{x^2}$ (см. [10, (25)]) и, как следствие, $x^3 = 0$ и $m_x^3 = m_{x^2}^2 = 0$. Поэтому замена абсолютных делителей нуля на абсолютные делители нуля с нулевым квадратом не меняет определения радикала Маккриммона Mc линейных йордановых алгебр.

Естественным аналогом оболочки сэндвича алгебры Ли толщины не ниже $n \geqslant 1$ для линейных йордановых алгебр является абсолютный делитель нуля порядка не ниже n. Как и в [12], для их определения следует в первую очередь выделить в алгебре умножений $M(F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle)$ свободной йордановой алгебры $F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$ над кольцом F с $1/2$ мультипликативную подполугруппу Π, порождённую всеми операторами

$$U_{x_i,x_j} = m_{x_i}m_{x_j} + m_{x_j}m_{x_i} - m_{x_i\cdot x_j},\ V_{x_i,x_j} = m_{x_i}m_{x_j} - m_{x_j}m_{x_i} + m_{x_i\cdot x_j}\ \ (x_i, x_j \in X).$$

Каждый элемент $W \in \Pi$ можно представить в виде $W = A_1 \cdots A_m$ для некоторых $m \geqslant 1$ и $A_s \in \{U_{x_{i_s},x_{j_s}}, V_{x_{i_s},x_{j_s}}\}$, причём из однородности многообразий линейных йордановых алгебр над кольцами с $1/2$ следует однозначность выбора m и набора индексов $\{i_s, j_s\}$. Обозначим через n_u число индексов s, таких что $A_s = U_{x_{i_s},x_{j_s}}$, и через n_v — число тех s, для которых $A_s = V_{x_{i_s},x_{j_s}}$, $m = n_u + n_v$. Зафиксируем индекс $k \geqslant 1$, $k \neq \{i_s, j_s\}$, и эпиморфизм $\pi\colon F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle \to F_{\mathrm{SJor}}\langle x_1, x_2\rangle$ алгебры $F_{\mathrm{Jor}}\langle X\rangle$ на свободную специальную йорданову алгебру $F_{\mathrm{SJor}}\langle x_1, x_2\rangle$ над кольцом F с двумя свободными порождающими x_1 и x_2, такой что $\pi(x_{i_s}) = \pi(x_{j_s}) = x_1$, $\pi(x_k) = x_2$ и $\pi(x_i) = 0$ при $i \neq k, i_s, j_s$, $s = 1, \ldots, m$. Тогда ввиду того что $V_{x_1,x_1} = m_{{x_1}^2}$ и $[m_{x_1}, m_{{x_1}^2}] = [U_{x_1}, m_{{x_1}^2}] = 0$,

$$\pi(Wx_k) = U^{n_u}_{x_1,x_1} V^{n_v}_{x_1,x_1} x_2 = U^{n_u}_{x_1} m^{n_v}_{{x_1}^2} x_2 = \sum_{p=0}^{n_v} 2^{-n_v} \binom{n_v}{p} {x_1}^{n_u+2p} x_2 {x_1}^{n_u+2(n_v-p)},$$

где выражение в правой части равенства является элементом свободной ассоциативной алгебры $F_{\mathrm{Ass}}\langle x_1, x_2\rangle$, $F_{\mathrm{Ass}}\langle x_1, x_2\rangle^{(+)} \supset F_{\mathrm{SJor}}\langle x_1, x_2\rangle$. Поэтому числа n_u и n_v могут быть определены по несократимой записи элемента $\pi(Wx_k)$ в алгебре $F_{\mathrm{Ass}}\langle x_1, x_2\rangle$, а точнее по входящим в неё элементам $2^{-n_v} x_1^{n_u} x_2 x_1^{m+n_v}$ и $2^{-n_v} x_1^{m+n_v} x_2 x_1^{n_u}$. Следовательно, они не зависят от выбора выражения оператора W через произведение операторов U_{x_i,x_j} и V_{x_i,x_j}, $x_i, x_j \in X$, что позволяет корректно определить ранг $\operatorname{rk} W = 2n_v + n_u$.

Аннулятор подмножества Y линейной йордановой алгебры J определяется как

$$\operatorname{Ann}_J Y = \{x \in J \mid V_{x,y}\hat{J} = \{0\} \text{ для всех } y \in Y\}.$$

Элемент x алгебры J называется *абсолютным делителем нуля порядка не ниже* n, $n \geqslant 1$, если его аннулятор $\operatorname{Ann}_J\{x\}$ содержит все элементы вида $W(z_1, \ldots, z_m)x$, $W(x_1, \ldots, x_m) \in \Pi$, $\operatorname{rk} W = n$, $z_1, \ldots, z_m \in \hat{J}$, т. е.

$$\begin{aligned} &x \cdot (W(z_1, \ldots, z_m)x) = \\ &\qquad = (x \cdot y) \cdot (W(z_1, \ldots, z_m)x) - x \cdot \bigl(y \cdot (W(z_1, \ldots, z_m)x)\bigr) = 0 \quad (y \in J). \end{aligned}$$

Напомним также, что алгебры Ли внутренних дифференцирований $\operatorname{Inder}(J)$ и лиевых умножений $\operatorname{Lie}(J)$ алгебры J формируют конечные суммы операторов $D_{x,y} = [m_x, m_y]$, $x, y \in J$, и операторы $m_z + D$, $z \in J$, $D \in \operatorname{Inder}(J)$, соответственно.

Теорема 3.12. *Пусть $n \geqslant 2$ и J — линейная йорданова алгебра над кольцом F с $1/n!$, такая что для любых $x \in J$ и $\psi \in \operatorname{Lie}(J)$ существует многочлен*

$$_{x,\psi}f(t) = \ t^{n_{x,\psi}} + {}_{x,\psi}f_{n_{x,\psi}-1} t^{n_{x,\psi}-1} + \ldots + {}_{x,\psi}f_1 t \in F[t],$$

$\deg{}_\psi f = n_\psi \leqslant n$, *для которого* $_{x,\psi}f(\psi)x = 0$. *Тогда йорданова алгебра J имеет равные первичный радикал $\operatorname{Rad}(J)$ и верхний ниль-радикал $\mathcal{N}(J)$, $\operatorname{Rad}(J) = \mathcal{N}(J)$.*

Доказательство. Поскольку каждый элемент x йордановой алгебры J аннулируется многочленом ${}_xg(t) = {}_{x,m_x}f(t)t \in F[t]$, $\deg {}_xg \leqslant n+1$, алгебра J является целой степени не выше $n+1$ и, значит, PI-алгеброй (см. замечание 1.5). Поэтому алгебра J локально конечна и имеет равные радикал Маккриммона $\mathrm{Mc}(J)$ и верхний ниль-радикал $\mathcal{N}(J)$, $\mathrm{Mc}(J) = \mathcal{N}(J)$ (см. [12, теоремы 7 и 4]). Допустим, что алгебра J содержит ненулевые абсолютные делители нуля, а значит, и ненулевые абсолютные делители нуля порядка не ниже любого $k \geqslant 1$ (см. [12, теорема 1]). Покажем, что в алгебре J каждый абсолютный делитель нуля a порядка не ниже $2n-1$ порождает идеал $(a)_J$ с нулевым квадратом $(a)_J^2 = \{0\}$. По предложению 2.17 идеал $(a)_J$, состоящий из конечных сумм элементов $m_{z_1}\cdots m_{z_k}a = [z_1,\dots,z_k,a]$, $z_1,\dots,z_k \in \hat{J}$, $k \geqslant 1$, совпадает с множеством F-линейных комбинаций элементов a и $\psi^m(a)$, $\psi \in \mathrm{Lie}(J)$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Поскольку $m_x = V_{x,1} = U_{x,1}$ и $D_{x,y} = 1/2(V_{x,y} - V_{y,x})$, $x, y \in J$, любой элемент $b \in (a)_J$ можно также записать в виде

$$b = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k_i} V_{x_{j1},y_{j1}}\cdots V_{x_{ji},y_{ji}}a$$

для подходящих $k_i \geqslant 1$ и $x_{jl}, y_{jl} \in \hat{J}$. Используя индукцию и соотношение

$$m_{(x\cdot y)\cdot z} + m_x m_z m_y + m_y m_z m_x = m_z m_{x\cdot y} + m_y m_{x\cdot z} + m_x m_{y\cdot z} \quad (x, y, z \in J)$$

(см. [10, (25)]), несложно доказать, что каждый оператор $m_{[z_1,\dots,z_j,a]}$, $z_1,\dots,z_j \in J$, $j \geqslant 2$, является линейной комбинацией с коэффициентами ± 1 произведений операторов m_{z_t}, $m_{z_p\cdot z_q}$, $p \neq q$, и одного из операторов m_a или $m_{z_s\cdot a}$, $1 \leqslant t, s, p, q \leqslant j$. Поэтому квадрат $(a)_J^2$ идеала $(a)_J$ составляют конечные суммы элементов

$$m_{z_1}\cdots m_{z_k}\big((V_{x_1,y_1}\cdots V_{x_{n-1},y_{n-1}}a)\cdot(z\cdot a)\big) \quad (z, z_i, x_j, y_j \in \hat{J},\ k \geqslant 1),$$

и следовательно, по выбору элемента a

$$(V_{x_1,y_1}\cdots V_{x_{n-1},y_{n-1}}a)\cdot(z\cdot a) = (U_{z,1}V_{x_1,y_1}\cdots V_{x_{n-1},y_{n-1}}a)\cdot a = 0 \quad (z, x_i, y_i \in \hat{J}),$$

$(a)_J^2 = \{0\}$. Таким образом, если радикал Маккриммона $\mathrm{Mc}(J)$ алгебры J отличен от нуля, она имеет ненулевые идеалы с нулевым квадратом и ненулевой первичный радикал $\mathrm{Rad}(J)$. Отсюда следует невырожденность полупервичных фактор-алгебр алгебры J и совпадение её радикалов $\mathrm{Rad}(J)$ и $\mathrm{Mc}(J) = \mathcal{N}(J)$, $\mathrm{Rad}(J) = \mathcal{N}(J)$. □

Следствие 3.13. *Пусть $n \geqslant 3$ и L_a — йорданова алгебра алгебраической алгебры Ли L степени не выше n над кольцом F с $1/n!$ по её йорданову элементу a. Тогда первичный радикал $\mathrm{Rad}(J_a)$ йордановой алгебры J_a совпадает с её верхним ниль-радикалом $\mathcal{N}(L_a)$, $\mathrm{Rad}(L_a) = \mathcal{N}(L_a)$. В случае если L является также ниль-алгеброй, $L_a = \mathrm{Rad}(L_a)$.*

Доказательство. Поскольку по определению йордановой алгебры L_a

$$m_{\bar{x}}\bar{y} = 1/2\overline{\mathrm{ad}_{[x,a]}\,y}, \quad D_{\bar{x},\bar{y}}\bar{z} = 1/4\overline{\mathrm{ad}_{[[x,a],[y,a]]}\,z} \quad (x, y, z \in L),$$

для каждого оператора $\psi \in \mathrm{Lie}(L_a)$ найдётся элемент $z_\psi \in L$, такой что $\psi(\bar{x}) = \overline{\mathrm{ad}_{z_\psi} x}$ при всех $x \in L$. Поэтому для любых $\psi \in \mathrm{Lie}(L_a)$ и $x \in L$ можно подобрать многочлен ${}_{x,z_\psi}f(t) \in F[t]$, $\deg {}_{x,z_\psi}f \leqslant n$, без свободного члена со старшим коэффициентом 1, для которого ${}_{x,z_\psi}f(\mathrm{ad}_{z_\psi})x = 0$ и ${}_{x,z_\psi}f(\psi)\bar{x} = \overline{{}_{x,z_\psi}f(\mathrm{ad}_{z_\psi})x} = 0$. Остаётся применить теорему 3.12 и замечание 2.1. □

Исследование выполнено за счёт гранта РФФИ, проект № 17-01-00895.

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Бейдар К. И., Михалёв А. В., Слинько А. М. Критерий первичности невырожденных альтернативных и йордановых алгебр // Тр. ММО. — 1987. — Т. 50. — С. 130—137.

[3] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // УМН. — 1994. — Т. 49, № 1. — С. 233.

[4] Голубков А. Ю. Локальная конечность алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 25—75.

[5] Голубков А. Ю. Конструкции специальных радикалов алгебр// Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 57—133.

[6] Голубков А. Ю. Радикал Кострикина и подобные ему радикалы алгебр Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 2. — С. 157—180.

[7] Гришков А. Н. О локальной нильпотентности идеала алгебры Ли, порождённого элементами 2-го порядка // Сиб. матем. журн. — 1982. — Т. 23, № 1. — С. 181—182.

[8] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[9] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[10] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[11] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 41—73.

[12] Зельманов Е. И. Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. матем. журн. — 1980. — Т. 23, № 6. — С. 100—116.

[13] Зельманов Е. И. Алгебры Ли с алгебраическим присоединённым представлением // Мат. сб. — 1983. — Т. 121 (163), № 4 (8). — С. 545—561.

[14] Зельманов Е. И., Кострикин А. И. Теорема о сэндвичевых алгебрах // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 183. — P. 106—111.

[15] Кострикин А. И. Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1957. — Т. 21. — С. 515—540.

[16] Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986.

[17] Кузьмин Е. Н. Алгебраические множества в алгебрах Мальцева // Алгебра и логика. — 1968. — Т. 7, № 2. — С. 42—47.

[18] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[19] Львов И. В. Теорема Брауна о радикале конечно порождённой PI-алгебры: Препринт № 63. — Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1984.

[20] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

[21] Марков В. Т. О размерности некоммутативных аффинных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — Т. 37. — С. 284—288.

[22] Парфёнов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1971. — Т. 12, № 1. — С. 171—176.

[23] Плоткин Б. И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли // Успехи матем. наук. — 1958. — Т. 13, № 6 (84). — С. 133—138.

[24] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[25] Amayo R. K., Stewart I. N. Infinite Dimensional Lie Algebras. — Leyden: Noordhoof, 1974.

[26] Baxter W. E., Martindale W. S., 3-rd. Central closure of semiprime non-associative rings // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7, no. 11. — P. 1103—1132.

[27] Ericson T. S., Martindale W. S., 3-rd, Osborn J. M. Prime non-associative algebras // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 60, no. 1. — P. 49—63.

[28] Fernández López A., García E., Gómez Lozano M. The Jordan algebras of a Lie algebra // J. Algebra. — 2007. — Vol. 308. — P. 164—177.

[29] Fernández López A., Golubkov A. Yu. Lie algebras with an algebraic adjoint representation revisited // Manuscripta Math. — 2013. — Vol. 140, no. 3-4. — P. 363—376.

[30] García E., Gómez Lozano M. An elemental characterization of strong primeness in Lie algebras // J. Algebra. — 2007. — Vol. 312. — P. 132—141.

[31] García E., Gómez Lozano M. A note on a result of Kostrikin // J. Algebra. — 2009. — Vol. 37. — P. 2405—2409.

[32] García E., Gómez Lozano M. A characterization of the Kostrikin radical of a Lie algebra // J. Algebra. — 2011. — Vol. 346. — P. 266—283.

[33] Rowen L. H. Some results on the center of ring with polynomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — No. 1. — P. 219—223.

[34] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — London: Academic Press, 1980. — (Pure Appl. Math.; Vol. 84).

[35] Wisbauer R. Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Algebras. — Harlow: Longman, 1996. — (Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math.; Vol. 81).