Кольца на векторных абелевых группах

Е. И. КОМПАНЦЕВА
Московский педагогический государственный университет,
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
e-mail: kompantseva@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на группе, полупростое кольцо, векторная группа.

Аннотация

Умножением на абелевой группе G называют гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$; абелева группа с заданным на ней умножением называется кольцом на этой группе. Если на абелевой группе существует хотя бы одно полупростое ассоциативное кольцо, то она называется полупростой. Проблема изучения полупростых групп была сформулирована Р. А. Бьюмонтом и Д. А. Лоувером, далее эта проблема была сведена к случаю редуцированных абелевых групп. В настоящей работе описаны полупростые группы в классе редуцированных абелевых векторных групп неизмеримой мощности. Показано, что любое умножение на прямом произведении $\prod\limits_{i\in I} A_i$ редуцированных абелевых групп без кручения ранга 1, где множество I неизмеримо, определяется его ограничением на сумму $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, причём данное утверждение неверно, если множество I измеримо или хотя бы одна из групп A_i $(i\in I)$ не является редуцированной.

Abstract

E. I. Kompantseva, Rings on vector Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 243—258.

A multiplication on an Abelian group G is a homomorphism $\mu\colon G\otimes G\to G$. An Abelian group G with a multiplication on it is called a ring on the group G. R. A. Beaumont and D. A. Lawver have formulated the problem of studying semisimple groups. An Abelian group is said to be semisimple if there exists a semisimple associative ring on it. Semisimple groups are described in the class of vector Abelian nonmeasurable groups. It is also shown that if a set I is nonmeasurable, $G=\prod\limits_{i\in I} A_i$ is a reduced vector Abelian group, and μ is a multiplication on G, then μ is determined by its restriction on the sum $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$; this statement is incorrect if the set I is measurable or the group G is not reduced.

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$; это умножение также обозначается знаком $\times$, т. е. $\mu(g_1\otimes g_2)=g_1\times g_2$ для всех

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 243—258.

$g_1, g_2 \in G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением $\times$ является кольцом (не обязательно ассоциативным), аддитивная группа которого совпадает с G; это кольцо называется кольцом на группе G и обозначается $(G, \times)$.

Настоящая работа посвящена изучению колец на векторных абелевых группах. Векторной группой называют прямое произведение $\prod\limits_{i \in I} A_i$ абелевых групп без кручения ранга 1. Прямые произведения и прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 и кольца на них изучались в работах многих алгебраистов (см., например, [1, 4, 7, 12, 13]). В данной статье доказано, что любое умножение на редуцированной векторной группе $G = \prod\limits_{i \in I} A_i$ неизмеримой мощности определяется его ограничением на сумму $S = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ (теорема 1). В частности, если $(G, \times)$ — кольцо на такой группе G и $S \times S = 0$, то $G \times G = 0$ (следствие 2). Показано, что последний результат нельзя улучшить в том смысле, что если векторная группа G не является редуцированной или имеет измеримую мощность, то из условия $S \times S = 0$ уже не следует, что $G \times G = 0$ (примеры 3, 4).

Далее в работе продолжено исследование полупростых абелевых групп, начатое в [9, 10]. Абелева группа называется полупростой, если на ней существует хотя бы одно полупростое кольцо. Получено описание полупростых групп в классе редуцированных векторных групп неизмеримой мощности (теорема 12). Проблема описания полупростых групп была сформулирована Р. А. Бьюмонтом и Д. А. Лоувером в [2], её решению посвящены работы [3, 6] и др. В [10] проблема изучения полупростых абелевых групп сведена к случаю редуцированных групп.

В статье рассматриваются только абелевы группы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает «абелева группа». Пусть $G = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — векторная группа. Элемент $g \in G$ будем записывать в виде $g = (g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in A_i$, а также в виде $g = (g_1, g_2, \ldots)$, если I совпадает с множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел; при этом элемент $g = (g_i)_{i \in I}$ часто будем обозначать g_k, если $g_i = 0$ при всех $i \in I \backslash \{k\}$. Кроме того, будем использовать следующие обозначения: $t(A)$, $t(g)$ — типы однородной группы A и элемента g соответственно; $\chi(g)$ — характеристика элемента g; π_i — проекция группы G на подгруппу A_i; если $G = A \oplus B$, то π_A — проекция группы G на подгруппу A. Будем рассматривать следующие множества:

$$I_0 = \{i \in I \mid t(A_i) \text{ — идемпотентный тип с бесконечным числом нулей}\},$$
$$I_{\mathrm{nid}} = \{i \in I \mid t(A_i) \text{ — неидемпотентный тип}\};$$

если $J \subseteq I$, то $J(k) = \{i \in J \mid t(A_i) \geqslant t(A_k)\}$ для $k \in I$. Как обычно, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа (поле) рациональных чисел; если $a, b \in \mathbb{Z}$, то запись $a \mid b$ ($a \nmid b$) означает, что a делит b (a не делит b). Если $(G, \times)$ — ассоциативное кольцо на группе G, то $J(G, \times)$ — радикал Джекобсона этого кольца. За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [5,8,11]. Все теоретико-множественные утверждения доказываются в предположении ZFC [11].

В работе рассматриваются векторные группы $G = \prod_{i\in I} A_i$, где множество I неизмеримо (в этом случае и сама группа G имеет неизмеримую мощность [11]). Напомним, что множество I называется измеримым, если оно допускает счётно аддитивную меру η, принимающую значения 0 и 1, такую что $\eta(I) = 1$, $\eta(\{x\}) = 0$ для любого $x \in I$. Отметим, что до сих пор неизвестно, противоречит ли аксиомам теории множеств гипотеза о существовании измеримых чисел.

Теорема 1. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod_{i\in I} A_i$ — редуцированная векторная группа и $(G,\times)$ — кольцо на G. Тогда для любого $k \in I$ существует конечное подмножество F_k множества I, такое что*

$$\pi_k\biggl(G \times \prod_{s\in I\setminus F_k} A_s\biggr) = \pi_k\biggl(\prod_{s\in I\setminus F_k} A_s \times G\biggr) = 0.$$

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = \prod_{i\in I} R_i e_i$, где $e_i \in A_i$, R_i — подгруппы аддитивной группы рациональных чисел, содержащие 1. Для $k, s \in I$ обозначим

$$\begin{aligned}
&L_k(s) = \{i \in I \mid \pi_k(e_i \times e_s) \neq 0\},\\
&M_k(s) = \{i \in I \mid \pi_k(e_s \times e_i) \neq 0\},\\
&L_k = \bigcup_{s\in I} L_k(s) = \{i \in I \mid (\exists\, s \in I)\ \pi_k(e_i \times e_s) \neq 0\},\\
&M_k = \bigcup_{s\in I} M_k(s) = \{i \in I \mid (\exists\, s \in I)\ \pi_k(e_s \times e_i) \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Покажем, что множества L_k и M_k конечны при всех $k \in I$. Пусть $k, s \in I$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi_{k,s}\colon G \to R_k e_k, \quad x \mapsto \pi_k(x \times e_s). \tag{1}$$

Так как $R_k e_k$ — узкая группа, то $\varphi(e_i) = 0$, т. е. $\pi_k(e_i \times e_s) = 0$ для почти всех $i \in I$ [5]. Следовательно, множество $L_k(s)$ конечно. Аналогично $M_k(s)$ конечно.

Отметим, что если L_k — конечное множество, то $M_k = \bigcup_{i\in L_k} M_k(i)$ тоже конечно, и наоборот. Допустим, L_k и M_k бесконечны. Определим последовательности $i_1, i_2, \ldots \in L_k$ и $j_1, j_2, \ldots \in M_k$ следующим образом: i_1 — произвольный элемент L_k, j_1 — произвольный элемент $M_k(i_1)$. Пусть $i_1, \ldots, i_n$ и $j_1, \ldots, j_n$ определены. Так как множество $M_k = \bigcup_{i\in L_k} M_k(i)$ бесконечно, а $M_k(i)$ — конечные множества при всех $i \in I$, то $M_k(i) \not\subseteq M_k(i_1) \cup \ldots \cup M_k(i_n)$ для бесконечного числа $i \in L_k$. Среди таких i найдётся элемент i_{n+1}, не принадлежащий конечному множеству $L_k(j_1) \cup \ldots \cup L_k(j_n)$. Так как

$M_k(i_{n+1}) \nsubseteq M_k(i_1) \cup \ldots \cup M_k(i_n)$, то в качестве j_{n+1} возьмём произвольный элемент из $M_k(i_{n+1}) \setminus \big(M_k(i_1) \cup \ldots \cup M_k(i_n)\big)$.

Покажем, что $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_n}) \neq 0$ и $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_t}) = 0$ при всех $t \neq n$. Так как $j_n \in M_k(i_n)$, то $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_n}) \neq 0$. Если $t > n$, то $j_t \in \in M_k(i_t) \setminus \big(M_k(i_1) \cup \ldots \cup M_k(i_{t-1})\big)$. Следовательно, $j_t \notin M_k(i_n)$, поэтому $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_t}) = 0$. Если $t < n$, то $i_n \notin L_k(j_t)$, так как $i_n \notin L_k(j_1) \cup \ldots \cup L_k(j_{n-1})$. Следовательно, $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_t}) = 0$. По [5, теорема 94.4] имеем $\pi_k\Big(\Big(\prod\limits_{t \neq n} R_{i_t} e_{i_t}\Big) \times e_{j_n}\Big) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого $g \in G$ определим гомоморфизм

$$\psi_{k,g} \colon G \to R_k e_k, \quad x \mapsto \pi_k(g \times x). \tag{2}$$

Рассмотрим элемент

$$a = (e_{i_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} R_{i_n} e_{i_n} \subseteq G.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\psi_{k,a}(e_{j_n}) = \pi_k(a \times e_{j_n}) = \pi_k(e_{i_n} \times e_{j_n}) + \pi_k\big((a - e_{i_n}) \times e_{j_n}\big) = \pi_k(e_{i_n} \times e_{j_n}) \neq 0,$$

так как $a - e_{i_n} \in \prod\limits_{t \neq n} R_{i_t} e_{i_t}$. Это противоречит теореме 94.4 в [5]. Следовательно, множества L_k и M_k конечны. Положим $F_k = L_k \cup M_k$ и покажем, что

$$\pi_k\Bigg(G \times \prod_{s \in I \setminus F_k} A_s\Bigg) = 0.$$

Пусть $s \in I \setminus F_k$. Тогда $\varphi_{k,s}(e_i) = \pi_k(e_i \times e_s) = 0$ для всех $i \in I$, так как $s \notin M_k$. Следовательно,

$$\varphi_{k,s}\Bigg(\bigoplus_{i \in I} R_i e_i\Bigg) = 0,$$

поэтому

$$\varphi_{k,s}(G) = \varphi_{k,s}\Bigg(\prod_{i \in I} R_i e_i\Bigg) = 0.$$

Значит,

$$\pi_k(g \times e_s) = 0 \text{ при любых } g \in G \text{ и } s \in I \setminus F_k. \tag{3}$$

Зафиксируем теперь $g \in G$ и рассмотрим гомоморфизм $\psi_{k,g}$, определённый в (2). Из (3) имеем

$$\psi_{k,g}\Bigg(\bigoplus_{s \in I \setminus F_k} R_s e_s\Bigg) = 0,$$

поэтому

$$\psi_{k,g}\Bigg(\prod_{s \in I \setminus F_k} R_s e_s\Bigg) = 0,$$

т. е.

$$\pi_k\biggl(g \times \prod_{s\in I\setminus F_k} R_s e_s\biggr) = 0.$$

В силу произвольности элемента $g \in G$ получаем, что

$$\pi_k\biggl(G \times \prod_{s\in I\setminus F_k} R_s e_s\biggr) = 0.$$

Аналогично

$$\pi_k\biggl(\prod_{i\in I\setminus F_k} R_s e_s \times G\biggr) = 0. \qquad \square$$

Теорема 1 даёт возможность строить умножения на редуцированных векторных группах неизмеримой мощности. Чтобы определить умножение на такой группе G, надо фиксировать разложение $G = \prod\limits_{i\in I} R_i e_i$, где R_i $(i \in I)$ — подгруппы аддитивной группы рациональных чисел содержащие 1, и задать множество рациональных чисел $\{\tau_{ij}^{(k)},\ i, j, k \in I\}$ такое, что при любом $k \in I$ выполняются следующие условия:

1) $\tau_{ij}^{(k)} \in R_k$ для всех $i, j \in I$,
2) $\tau_{ij}^{(k)} = 0$ для почти всех $i, j \in I$,
3) $\chi(\tau_{ij}^{(k)} e_k) \geqslant \chi(e_i)\chi(e_j)$ для всех $i, j \in I$.

Если числа $\tau_{ij}^{(k)}$ $(i, j \in I)$ удовлетворяют условиям 1)—3), то для каждого $k \in I$ и любых $a = (a_i e_i)_{i\in I}$, $b = (b_i e_i)_{i\in I} \in G$ определены конечные суммы $\sum\limits_{i,j\in I} a_i b_j \tau_{ij}^{(k)} e_k \in R_k e_k$. Следовательно, можно определить умножение $\times$ на G, положив

$$a \times b = \biggl(\sum_{i,j\in I} a_i b_j \tau_{ij}^{(k)} e_k\biggr)_{k\in I} \in \prod_{k\in I} R_k e_k.$$

Из теоремы 1 следует, что таким образом можно получить любое умножение на группе G.

Следствие 2. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ — векторная группа, $S = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$. Если в кольце $(G, \times)$ выполняется $S \times S = 0$, то $(G, \times)$ — кольцо с нулевым умножением.*

Отметим, что утверждение следствия 2 — наилучший из возможных результатов в том смысле, что если векторная группа $G = \prod\limits_{i\in I} A_i$ не является редуцированной или множество I измеримо, то на G существует такое кольцо $(G, \times)$, что $S \times S = 0$, но $G \times G \neq 0$, где $S = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$.

Пример 3. Пусть $G = \mathbb{Q} \oplus A$, где $A = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $A_i \cong Q_p$ при всех $i \in \mathbb{N}$ (Q_p — группа рациональных дробей со знаменателями, взаимно простыми с простым числом p). Обозначим $\bar{A} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i / \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Тогда $\bar{A}$ содержит делимую подгруппу $\widetilde{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}} A_i / \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ без кручения, где

$$\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}} A_i = \left\{ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \;\middle|\; \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, i_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, i > i_0\ p^k \mid a_i \right\}.$$

Значит, $\bar{A} = \mathbb{Q} \oplus B$, где B — некоторая группа. Запишем группы G и $\bar{A}$ в виде $G = \mathbb{Q}e \oplus A$, $\bar{A} = \mathbb{Q}e_1 \oplus B$. Определим гомоморфизм $\alpha\colon \bar{A} \otimes \bar{A} \to G$, положив $\alpha\big((r_1e_1 + b_1) \otimes (r_2e_1 + b_2)\big) = r_1r_2e$ для любых $r_1e_1 + b_1$, $r_2e_1 + b_2 \in \bar{A}$ ($r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $b_1, b_2 \in B$).

Определим теперь операцию $\times$ на G следующим образом:

$$(s_1e + a_1) \times (s_2e + a_2) = \alpha(\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2)$$

для любых $s_1e + a_1$, $s_2e + a_2 \in G$ ($s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$, $a_1, a_2 \in A$, $\bar{a}_k = a_k + \Big(\bigoplus\limits_{i\in I} A_i\Big)$, $k = 1, 2$). Непосредственной проверкой можно убедиться, что эта операция является умножением на G. Кроме того, умножение $\times$ ассоциативно, так как произведение любых трёх элементов равно 0.

Если $x = s_1e + a_1$, $y = s_2e + a_2 \in \mathbb{Q}e \oplus \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i = S$ ($s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$, $a_1, a_2 \in \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$), то $x \times y = \alpha(\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2) = 0$. Однако если a — прообраз элемента e_1 при эпиморфизме $A \to \bar{A} = \mathbb{Q}e_1 \oplus B$, то $a \times a = \alpha(\bar{a} \otimes \bar{a}) = \alpha(e_1 \otimes e_1) = e \neq 0$.

Покажем теперь, что условие неизмеримости мощности группы G в следствии 2 существенно.

Пример 4. Пусть I — измеримое множество, $G = \prod\limits_{i\in I} A_i$, где $A_i \cong \mathbb{Z}e_i$ при всех $i \in I$. Зафиксируем элемент $i_0 \in I$ и запишем группу G в виде $G = \mathbb{Z}e_{i_0} \oplus \prod\limits_{i\in I'} A_i$, где $I' = I \setminus \{i_0\}$. По определению измеримого множества на I существует двузначная счётно аддитивная мера.

Для любого $g = (n_ie_i)_{i\in I} \in G$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим множество $X_n(g) = \{i \in I \mid n_i = n\}$. Для каждого $g \in G$ множества $X_n(g)$ ($n \in \mathbb{Z}$) попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с I. Следовательно, ровно одно из них, пусть это $X_m(g)$, имеет меру 1. Определим отображение $\alpha\colon G \to \mathbb{Z}$, положив $\alpha(g) = m$. Тогда α — гомоморфизм [5] и $\alpha\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} A_i\Big) = 0$.

Определим операцию $\times$ на G следующим образом:

$$g_1 \times g_2 = \alpha(g_1)\alpha(g_2)e_{i_0}$$

для любых $g_1, g_2 \in G$. Нетрудно заметить, что $\times$ — умножение на G, при этом $S \times S = 0$, где $S = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$. Однако если $g = (e_i)_{i\in I}$, то $\alpha(g) = 1$, и значит, $g \times g = \alpha(g)\alpha(g)e_{i_0} = e_{i_0} \neq 0$.

Лемма 5. *Пусть* $G = \prod_{k\in\mathbb{N}} A_k$ *и при всех* $k \geqslant 2$ *группа* A_k *имеет идемпотентный тип* $t(A_k)$ *с бесконечным числом нулей, такой что* $t(A_k) \geqslant t(A_1)$. *Тогда группа* G *полупроста.*

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = \prod_{k\in\mathbb{N}} R_k e_k$, где $e_k \in A_k$ ($k \in \mathbb{N}$) и при каждом $k \geqslant 2$ характеристика $\chi(e_k)$ состоит только из нулей и символов ∞, R_k — подкольцо с единицей поля рациональных чисел, причём аддитивная группа этого кольца содержит подгруппу R_1.

Пусть $k \geqslant 2$. Тогда по условию $t(e_k) \geqslant t(e_1)$, и следовательно, существует такое натуральное число m_k, что $\chi(m_k e_k) \geqslant \chi(e_1)$. При этом $\chi(m_k e_k) \geqslant \chi(e_1) \cdot \chi(e_k)$ и $\chi(m_k^2 e_k) = \chi(m_k e_k) \cdot \chi(m_k e_k) \geqslant \chi(e_1) \cdot \chi(e_1)$. Так как $t(e_k)$ содержит бесконечное число нулей, то существует простое число p_k, такое что

$$p_k \not| e_k,\ p_k \not| e_1 \text{ и } p_k \not| m_k. \tag{4}$$

Таким образом получим последовательность простых чисел

$$p_2, p_3, \ldots . \tag{5}$$

При этом для каждого $k \geqslant 2$ чисел p_k, удовлетворяющих условию (4), существует бесконечно много. Поэтому последовательность (5) можно выбрать так, чтобы в ней все числа были различны.

Определим теперь бинарную операцию $\times$ на G, положив

$$\begin{aligned}
&e_1 \times e_1 = (0, m_2^2 e_2, \ldots, m_k^2 e_k, \ldots);\\
&e_1 \times (0, a_2 e_2, \ldots, a_k e_k, \ldots) = (0, a_2 e_2, \ldots, a_k e_k, \ldots) \times e_1 =\\
&\quad = (0, (a_2 m_2 p_2) e_2, \ldots, (a_k m_k p_k) e_k, \ldots);\\
&(0, a_2 e_2, \ldots, a_k e_k, \ldots) \times (0, b_2 e_2, \ldots, b_k e_k, \ldots) =\\
&\quad = (0, (a_2 b_2 p_2^2) e_2, \ldots, (a_k b_k p_k^2) e_k, \ldots).
\end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что операция $\times$ является ассоциативным умножением на G.

Очевидно, $A = \prod_{k=2}^{\infty} R_k e_k$ — идеал кольца $(G, \times)$. Этот идеал — прямое произведение колец $(R_k e_k, \times)$, где $e_k \times e_k = p_k^2 e_k$ ($k \geqslant 2$), которые являются полупростыми [2]. Следовательно, и идеал A полупрост.

Покажем, что кольцо $(G, \times)$ полупросто. Пусть $a = (a_1 e_1, a_2 e_2, \ldots) \in J(G, \times)$ ($a_k \in R_k$). Без потери общности можно считать, что $a_1 \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим элемент $c = (e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots) \in G$. Тогда

$$\begin{aligned}
&a \times c = (a_1 e_1, \ldots, a_k e_k, \ldots) \times (e_1, \ldots, e_k, \ldots) =\\
&\quad = a_1 e_1 \times e_1 + a_1 e_1 \times (0, e_2, \ldots, e_k, \ldots) +\\
&\quad + (0, a_2 e_2, \ldots, a_k e_k, \ldots) \times e_1 + (0, a_2 e_2, \ldots, a_k e_k, \ldots) \times (0, e_2, \ldots, e_k, \ldots) =\\
&\quad = (0, a_1 m_2^2 e_2, \ldots, a_1 m_k^2 e_k, \ldots) + (0, a_1 m_2 p_2 e_2, \ldots, a_1 m_k p_k e_k, \ldots) +\\
&\quad + (0, a_2 m_2 p_2 e_2, \ldots, a_k m_k p_k e_k, \ldots) + (0, a_2 p_2^2 e_2, \ldots, a_k p_k^2 e_k, \ldots) =
\end{aligned}$$

$$= (0, (a_1m_2^2 + a_1m_2p_2 + a_2m_2p_2 + a_2p_2^2)e_2, \ldots,$$
$$(a_1m_k^2 + a_1m_kp_k + a_km_kp_k + a_kp_k^2)e_k, \ldots).$$

Так как $a \times c \in J(G, \times) \cap A = J(A, \times) = 0$ [8], то

$$a_1m_k^2 + a_1m_kp_k + a_km_kp_k + a_kp_k^2 = 0$$

для любого $k \geqslant 2$. Пусть $k \geqslant 2$. Поскольку $p_k \nmid e_k$, то существует натуральное число s_k, такое что

$$p_k \nmid s_k \text{ и } s_ka_k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Значит, $p_k \mid s_ka_1m_k^2$, так как $s_ka_1m_k^2 + s_ka_1m_kp_k + s_ka_km_kp_k + s_ka_kp_k^2 = 0$. Так как $p_k \nmid s_k$, $p_k \nmid m_k$ в силу (4) и (6), то $p_k \mid a_1$.

Значит, $a_1 \in \bigcap\limits_{k \geqslant 2} p_k\mathbb{Z} = 0$, и следовательно,

$$a = (0, a_2e_2, \ldots, a_ke_k, \ldots) \in J(G, \times) \cap A = J(A, \times) = 0.$$

Таким образом, $J(G, \times) = 0$, и значит, группа G полупроста. □

Лемма 6. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — редуцированная векторная группа. Если среди групп A_i $(i \in I)$ есть группа идемпотентного типа с конечным числом нулей, то группа G не является полупростой.*

Доказательство. Если среди групп A_i $(i \in I)$ есть группа идемпотентного типа с конечным числом нулей, то среди таких групп существует группа A_n, для которой $t_n = t(A_n)$ — идемпотентный тип с конечным числом нулей, максимальный в множестве $\{t(A_i) \mid i \in I\}$.

Пусть $G_1 = \prod\limits_{t(A_i) = t_n} A_i$. Тогда группа G_1 сепарабельна [1]. В [10] показано, что радикал Джекобсона любого ассоциативного кольца на G_1 содержит подгруппу $\bigcap\limits_p pG_1 \neq 0$. Согласно теореме 1 группа G_1 является идеалом в любом кольце на группе G, значит, в любом ассоциативном кольце на G есть идеал с ненулевым радикалом Джекобсона. Следовательно, группа G не является полупростой. □

Лемма 7. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — векторная группа, и пусть все группы A_i имеют неидемпотентный тип. Тогда любое ассоциативное кольцо на G радикально.*

Доказательство. Пусть $(G, \times)$ — ассоциативное кольцо на G и $k \in I$. Обозначим

$$G_k = \{g \in G \mid (\forall\, a, b \in G)\ \pi_k(a \times g) = \pi_k(g \times a) = \pi_k(a \times g \times b) = 0\}.$$

Очевидно, что G_k — идеал кольца $(G, \times)$. Пусть

$$F_k = \{i \in I \mid \exists\, j \in I\ \pi_k(A_i \times A_j) \neq 0 \text{ или } \pi_k(A_j \times A_i) \neq 0\},$$
$$C_k = \bigoplus_{i \in F_k} A_i, \quad B_k = \prod_{i \in I \setminus F_k} A_i, \quad N_k = C_k \cap G_k.$$

Тогда F_k — конечное множество по теореме 1 и $B_k \subseteq G_k$, $G = C_k \oplus B_k$ и $G_k = N_k \oplus B_k$. Определим умножение $\times_k$ на C_k, положив $a \times_k b = \pi_{C_k}(a \times b)$ для всех $a, b \in C_k$. Кольцо $(C_k, \times_k)$, вообще говоря, может быть неассоциативным, при этом N_k — идеал этого кольца и $(G/G_k, \times) \cong (C_k/N_k, \times_k)$ при изоморфизме $g + G_k \mapsto \pi_{C_k}(g) + N_k$. Из доказательства леммы 6.10 в [10] следует, что существует $n_k \in \mathbb{N}$, такое что для любых $g_1, \ldots, g_{n_k} \in C_k$ произведение $g_1 \times_k g_2 \times_k \cdots \times_k g_{n_k}$ в кольце $(C_k, \times_k)$ при некоторой расстановке скобок равно нулю. Значит, это же выполняется в ассоциативном кольце $(G/G_k, \times) \cong (C_k/N_k, \times_k)$, другими словами, кольцо $(G/G_k, \times)$ нильпотентно. Следовательно,

$$(\exists\, n_k \in \mathbb{N})\ (\forall\, g \in G)\ g^{n_k} \in G_k$$

(здесь g^{n_k} — степень элемента g в кольце $(G, \times)$), поэтому

$$(\forall\, n > n_k)\ (\forall\, g \in G)\ \pi_k(g^n) = 0. \tag{7}$$

Значит, для любого элемента $g \in G$ определён элемент $g' = -g - g^2 - g^3 - \ldots$, т. е. $g' = (g_k)_{k \in I}$, где $g_k = \pi_k(-g - g^2 - \ldots - g^{n_k})$. Покажем, что g' — квазиобратный к элементу g в кольце $(G, \times)$. Согласно (7)

$$(\exists\, m_k \geqslant n_k)\ (\forall\, n > m_k)\ (\forall\, g \in G)\ \pi_{C_k}(g^n) = 0.$$

Поэтому $-g^{m_k+1} - g^{m_k+2} - \ldots \in B_k$, откуда получаем, что

$$\begin{aligned}
&\pi_k(g \times g') = \\
&\quad = \pi_k\big(g \times (-g - g^2 - \ldots - g^{m_k}) + g \times (-g^{m_k+1} - g^{m_k+2} - \ldots)\big) = \\
&\quad = \pi_k\big(g \times (-g - g^2 - \ldots - g^{m_k})\big) = \pi_k(-g^2 - g^3 - \ldots - g^{m_k}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\pi_k(g + g' - g \times g') = \pi_k(g) + \pi_k(-g - g^2 - \ldots - g^{m_k}) - \pi_k(-g^2 - g^3 - \ldots - g^{m_k}) = 0.$$

Так как индекс $k \in I$ произволен, элемент g' является квазиобратным к g. Значит, кольцо $(G, \times)$ радикально. □

Подгруппа группы G называется абсолютным идеалом этой группы, если она является идеалом в любом кольце на G.

Лемма 8. *Пусть $G = A \oplus B$, где B — абсолютный идеал без кручения группы G, имеющий конечный ранг. Если группа A не является полупростой, то и группа G не является полупростой.*

Доказательство. Пусть $(G, \times)$ — ассоциативное кольцо на G. Если в этом кольце идеал B не является полупростым, то и кольцо $(G, \times)$ не полупросто.

Пусть B — полупростой идеал кольца $(G, \times)$. Кольцо $(B, \times)$ вкладывается в качестве подкольца в кольцо $(\tilde{B}, \times)$ на делимой оболочке $\tilde{B}$ группы B, которое можно рассматривать как конечномерную алгебру над полем $\mathbb{Q}$. По основной теореме Веддербёрна о конечномерных сепарабельных алгебрах алгебру $\tilde{B}$ можно представить в виде $\tilde{B} = P \oplus N$, где P — полупростая подалгебра (не обязательно идеал), являющаяся прямой суммой полных матричных колец,

N — радикал алгебры $\tilde{B}$, обязательно нильпотентный. Если $N \neq 0$, то $N \cap B$ — ненулевый ниль-идеал полупростого кольца $(B, \times)$. Следовательно, $N = 0$, и значит, $\tilde{B} = P$, т. е. $(\tilde{B}, \times)$ — кольцо с единицей e.

Введём бинарную операцию $\times_A$ на группе A, положив $a_1 \times_A a_2 = \pi_A(a_1 \times a_2)$ для любых $a_1, a_2 \in A$. Тогда $\times_A$ — ассоциативное умножение на A [10, теорема 7.1]. Поскольку группа A не является полупростой, то $J(A, \times_A) \neq 0$.

Естественным образом кольцо $(G, \times)$ вкладывается в кольцо $(E, \times)$, где $E = A \oplus \tilde{B}$. По [10, теорема 7.2]

$$T = \{a - a \times e \mid a \in J(A, \times_A)\} = J(E, \times);$$

очевидно, $T \neq 0$. Пусть m — такое натуральное число, что $me \in G$. Тогда $mT = \{a - a \times me \mid a \in J(A, \times_A)\} \subseteq G$. Нетрудно видеть, что mT — ненулевой квазирегулярный идеал кольца $(G, \times)$. Следовательно, группа G не полупроста. □

Отметим, что условие конечности ранга абсолютного идеала B в лемме 8 существенно. Пусть, например, $G = A \oplus B$, где A — группа без кручения ранга 1 неидемпотентного типа, $B = \prod_{i \in \mathbb{N}} B_i$ — векторная группа, в которой $t(B_i)$ — идемпотентный тип с бесконечным числом нулей и $t(B_i) \geqslant t(A)$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда B — абсолютный идеал без кручения группы G, а группа A не является полупростой, однако по лемме 5 группа G полупроста.

Лемма 9. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod_{i \in I} A_i$ — редуцированная векторная группа. Пусть среди групп A_i $(i \in I)$ есть группа неидемпотентного типа и лишь конечное число групп имеют идемпотентный тип с бесконечным числом нулей. Тогда группа G не является полупростой.*

Доказательство. Если среди групп A_i $(i \in I)$ есть группа идемпотентного типа с конечным числом нулей, то по лемме 6 группа G не является полупростой. Пусть теперь среди групп A_i $(i \in I)$ нет групп с указанными типами. Среди групп идемпотентного типа есть группа (пусть для определённости это A_{i_0}), тип которой максимален в множестве идемпотентных типов $\{t(A_i) \mid i \in I_0\}$. Допустим, $t(A_{i_0})$ не является максимальным в множестве $\{t(A_i) \mid i \in I\}$. Тогда существует индекс $i_1 \in I$, такой что $t(A_{i_1}) > t(A_{i_0})$. Рассмотрим множество $K = \{i \in I \mid t(A_i) \geqslant t(A_{i_1})\}$. Тогда $K \neq \varnothing$ и $t(A_j)$ — неидемпотентный тип при всех $j \in K$. Пусть $C = \prod_{i \in K} A_i$ и $(G, \times)$ — ассоциативное кольцо на G. Тогда C — идеал этого кольца. Действительно, пусть $b = (b_i)_{i \in I} \in C$, $g = (g_i)_{i \in I} \in G$ и $\pi_k(b \times g) \neq 0$ $(k \in I)$. Тогда

$$\pi_k(b \times g) = \pi_k\Bigg(\sum_{i,j \in F_k} (b_i \times g_j)\Bigg) = \sum_{i,j \in F_k} \pi_k(b_i \times g_j)$$

по теореме 1 (F_k — конечное подмножество множества I). Поскольку

$$t\big(\pi_k(b_i \times g_j)\big) \geqslant t(b_i \times g_j) \geqslant t(b_i) \geqslant t(A_{i_1})$$

при любых $i, j \in F_k$, то $b \times g \in C$. По лемме 7 идеал C не является полупростым, следовательно, и группа G не полупроста.

Пусть теперь $t(A_{i_0})$ является максимальным в $\{t(A_i) \mid i \in I\}$. Положим $T = \{i \in I \mid t(A_i) = t(A_{i_0})\}$. Тогда T — конечное множество, так как множество групп идемпотентного типа конечно. Обозначим $B = \prod\limits_{i \in T} A_i$, $A = \prod\limits_{i \in I \setminus T} A_i$. Тогда $G = A \oplus B$. Нетрудно убедиться, что B — абсолютный идеал группы G. В самом деле, если $(G, \times)$ — кольцо на G, $b \in B$, $g \in G$, то

$$t\big(\pi_k(b \times g)\big) \geqslant t(b \times g) \geqslant t(b) = t(A_{i_0}),$$

откуда следует, что $b \times g \in B$, так как тип $t(A_{i_0})$ максимален в $\{t(A_i) \mid i \in I\}$. Аналогично $g \times b \in B$.

Пусть среди групп A_i $(i \in I)$ ровно n групп имеют идемпотентный тип. Индукцией по n покажем, что группа G не является полупростой. Если $n = 1$, то A_{i_0} — единственная группа идемпотентного типа среди групп A_i $(i \in I)$, т. е. при $i \neq i_0$ тип группы A_i неидемпотентен. По лемме 7 группа $A = \prod\limits_{i \neq i_0} A_i$ не является полупростой, а по лемме 8 полупростой не является и группа $G = A \oplus B$. Предположим, что группа G не является полупростой, если число групп A_i идемпотентного типа в её представлении меньше n. Пусть теперь мощность множества I_0 равна n. Тогда по предположению индукции группа $A = \prod\limits_{i \in I \setminus T} A_i$ не является полупростой. Следовательно, по лемме 8 полупростой не является группа G. □

Далее нам потребуются следующие понятия и обозначения. Пусть $G = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — векторная группа, I — неизмеримое множество, $(G, \times)$ — кольцо на G. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Будем говорить, что индекс $i \in I$ n-предшествует индексу $k \in I$ (или k n-следует за i) в кольце $(G, \times)$, если существуют последовательности индексов $i = i_1, i_2, \ldots, i_n = k$ и $j_1, \ldots, j_n$ из I, такие что $\pi_{i_{s+1}}(A_{i_s} \times A_{j_s}) \neq 0$ или $\pi_{i_{s+1}}(A_{j_s} \times A_{i_s}) \neq 0$ при всех $s = \overline{1, n-1}$. Будем говорить, что индекс $i \in I$ предшествует индексу $k \in I$ (или k следует за i) в кольце $(G, \times)$, если k n-следует за i при некотором $n \geqslant 2$. Заметим, что отношение следования на множестве I транзитивно. Кроме того, если i следует за k, то $t(A_i) \geqslant t(A_k)$.

Для всех $k \in I$, $n \geqslant 2$ обозначим

$$U_k^{(n)} = \{i \in I \mid i \text{ } n\text{-предшествует } k\},$$

$$U_k = \bigcup_{n=2}^{\infty} U_k^{(n)} = \{i \in I \mid i \text{ предшествует } k\},$$

$$V_k^{(n)} = \{i \in I \mid i \text{ } n\text{-следует за } k\},$$

$$V_k = \bigcup_{n=2}^{\infty} V_k^{(n)} = \{i \in I \mid i \text{ следует за } k\}.$$

Лемма 10. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod_{i \in I} A_i$ — редуцированная векторная группа, $(G, \times)$ — кольцо на G. Тогда множество U_k не более чем счётно при любом $k \in I$.*

Доказательство. Обозначим

$$F_t = \{i \in I \mid \exists\, j \in I\ \pi_t(A_i \times A_j) \neq 0 \text{ или } \pi_t(A_j \times A_i) \neq 0\}.$$

Тогда множество F_t конечно при всех $t \in I$.

Пусть $k \in I$. Индукцией по n покажем, что $U_k^{(n)}$ конечно при любом $n \geqslant 2$. Пусть $i \in U_k^{(2)}$. Тогда i 2-предшествует элементу k, т. е. существует $j \in I$, такой что $\pi_k(A_i \times A_j) \neq 0$ или $\pi_k(A_j \times A_i) \neq 0$. Значит, $i \in F_k$, поэтому $U_k^{(2)} \subseteq F_k$, и следовательно, $U_k^{(2)}$ конечно.

Пусть $U_k^{(n)}$ конечно, и пусть $i \in U_k^{(n+1)}$. Тогда i $(n+1)$-предшествует элементу k, т. е. существуют последовательности $i = i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1} = k$ и $j_1, \ldots, j_{n+1}$ элементов из I, такие что $\pi_{i_{s+1}}(A_{i_s} \times A_{j_s}) \neq 0$ или $\pi_{i_{s+1}}(A_{j_s} \times A_{i_s}) \neq 0$ при любом $s = \overline{1, n}$. В частности, $\pi_{i_2}(A_i \times A_{j_1}) \neq 0$ или $\pi_{i_2}(A_{j_1} \times A_i) \neq 0$, поэтому $i \in F_{i_2}$. Так как i_2 n-предшествует элементу k, то i_2 принадлежит множеству $U_k^{(n)}$, которое по предположению индукции является конечным. Следовательно, $i \in \bigcup_{t \in U_k^{(n)}} F_t$, поэтому $U_k^{(n+1)}$ содержится в конечном множестве $\bigcup_{t \in U_k^{(n)}} F_t$. Таким образом, $U_k^{(n)}$ конечно при всех $n \geqslant 2$, и значит, $U_k = \bigcup_{n=2}^{\infty} U_k^{(n)}$ не более чем счётно. □

Лемма 11. *Пусть $M \subseteq \mathbb{N}$ и I_k $(k \in M)$ — бесконечные подмножества множества I. Тогда существуют счётные попарно не пересекающиеся множества J_k $(k \in M)$, такие что $J_k \subseteq I_k$ при любом $k \in M$.*

Доказательство. Так как декартово произведение

$$M \times \mathbb{N} = \{(k, i) \mid k \in M,\ i \in \mathbb{N}\}$$

счётно, то оно служит множеством значений последовательности $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с попарно различными членами. Без потери общности можно считать, что $1 \in M$ и $\varphi_1 = (1, 1)$. Поскольку каждое из множеств I_k бесконечно, то можно определить последовательность $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов из $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ следующим образом. Пусть α_1 — произвольный элемент из I_1, α_n $(n > 1)$ — элемент из $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$, удовлетворяющий условиям:

1) $\alpha_n \in I_k$, если $\varphi_n = (k, i)$ при некотором $i \in \mathbb{N}$;
2) $\alpha_n \neq \alpha_s$ при всех $s < n$.

В силу свойства 2) все элементы последовательности $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ различны. Положим теперь

$$J_k = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\ \varphi_n = (k, i) \text{ при некотором } i \in \mathbb{N}\}.$$

Нетрудно убедиться, что множества J_k счётны и попарно не пересекаются. При этом $J_k \subseteq I_k$ при всех $k \in M$ в силу 1). $\square$

Теорема 12. *Пусть I — неизмеримое множество. Редуцированная векторная группа $G = \prod_{i \in I} A_i$ полупроста тогда и только тогда, когда выполняется каждое из следующих условий*:

1) *среди групп A_i $(i \in I)$ нет групп идемпотентного типа с конечным числом нулей*;
2) *существует система $\{J_k \mid k \in I_{\mathrm{nid}}\}$ бесконечных попарно не пересекающихся множеств $J_k \subseteq I_0(k)$.*

Доказательство. Пусть группа G полупроста. В силу леммы 6 выполняется условие 1). Предположим, что $I_{\mathrm{nid}} \neq \varnothing$, и докажем, что выполняется условие 2). По условию на группе G существует полупростое ассоциативное кольцо $(G, \times)$. Для каждого $k \in I_{\mathrm{nid}}$ обозначим $V'_k = V_k \cup \{k\}$, $G_k = \prod_{i \in V'_k} A_i$. Тогда G_k — идеал кольца $(G, \times)$, содержащий A_k. Действительно, пусть $a = (a_i)_{i \in V'_k} \in G_k$, $g = (g_i)_{i \in I} \in G$ и $\pi_s(a \times g) \neq 0$ $(s \in I)$. Так как по теореме 1

$$\pi_s(a \times g) = \sum_{i,j \in F_s} \pi_s(a_i \times g_j),$$

где F_s — конечное подмножество множества I, то существуют $i_0 \in V'_k$ и $j_0 \in I$, такие что $\pi_s(A_{i_0} \times A_{j_0}) \neq 0$. Значит, s следует за i_0. Так как $i_0 \in V'_k$, то i_0 следует за k (или совпадает с k). В силу транзитивности отношения следования s следует за k, поэтому $s \in V'_k$. Таким образом,

$$a \times g \in \prod_{s \in V'_k} A_s = G_k.$$

Аналогично $g \times a \in G_k$.

Так как кольцо $(G, \times)$ полупросто, то полупросты и идеалы G_k $(k \in I_{\mathrm{nid}})$. Поэтому в силу леммы 9 в семействе $\{A_i \mid i \in V'_k\}$ бесконечное число групп имеют идемпотентный тип (с бесконечным числом нулей). В каждом из бесконечных множеств $V_k \cap I_0 \subseteq I_0(k)$ $(k \in I_{\mathrm{nid}})$ выберем счётное подмножество S_k.

В каждом непустом подмножестве $M \subseteq I_{\mathrm{nid}}$ фиксируем один элемент $x_1 = x_1(M) \in M$ и определим множества $C_n = C_n(M)$ и $D_n = D_n(M)$ $(n \in N)$ следующим образом:

$$C_1 = \{x_1\}, \quad D_1 = S_{x_1},$$
$$C_{n+1} = \left(\bigcup_{k \in D_n} U_k \right) \cap M, \quad D_{n+1} = \bigcup_{k \in C_{n+1}} S_k.$$

Положим

$$C(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n, \quad D(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n,$$

кроме того, $C(\varnothing) = D(\varnothing) = \varnothing$. Нетрудно заметить, что множество $C(M)$ не более чем счётно при любом $M \subseteq I_{\mathrm{nid}}$ в силу леммы 10. Если $M \neq \varnothing$, то $D(M)$ — счётное подмножество множества I_0.

Пусть τ_1, τ — порядковые числа, мощность которых больше мощности множества I_{nid}, причём $\tau_1 < \tau$ [11, гл. VIII, § 2, теорема 6]. Для каждого порядкового $\alpha < \tau$ определим множества T_α, X_α, Y_α, положив

$$T_1 = I_{\mathrm{nid}}, \quad X_1 = C(I_{\mathrm{nid}}), \quad Y_1 = D(I_{\mathrm{nid}}),$$
$$T_\alpha = I_{\mathrm{nid}} \setminus \Bigl(\bigcup_{\sigma<\alpha} X_\sigma\Bigr), \quad X_\alpha = C(T_\alpha), \quad Y_\alpha = D(T_\alpha).$$

Заметим, что условие $T_\alpha = \varnothing$ равносильно каждому из условий $X_\alpha = \varnothing$ и $Y_\alpha = \varnothing$.

Пусть $W(\tau)$ — множество порядковых чисел, меньших чем τ. Тогда мощность $W(\tau)$ равна мощности τ [11, гл. VII, § 2, теорема 4]. Так как $\bigcup\limits_{\alpha<\tau} X_\alpha \subseteq I_{\mathrm{nid}}$, то $T_\alpha = \varnothing$ по крайней мере при всех $\alpha \geqslant \tau_1$. Следовательно, существует множество

$$W = \{\alpha \in W(\tau) \mid X_\alpha \neq \varnothing\} = \{\alpha \in W(\tau) \mid T_\alpha \neq \varnothing\}.$$

Если $\alpha \in W$ и $\beta < \alpha$, то $\beta \in W$, так как

$$T_\beta = I_{\mathrm{nid}} \setminus \Bigl(\bigcup_{\sigma<\beta} X_\sigma\Bigr) = \\ = \Bigl(I_{\mathrm{nid}} \setminus \Bigl(\bigcup_{\sigma<\alpha} X_\sigma\Bigr)\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{\beta\leqslant\sigma<\alpha} X_\sigma\Bigr) = T_\alpha \cup \Bigl(\bigcup_{\beta\leqslant\sigma<\alpha} X_\sigma\Bigr) \neq \varnothing.$$

Значит, $W = W(\zeta) = \{\alpha \in W(\tau) \mid \alpha < \zeta\}$ при некотором $\zeta < \tau$ [11, гл. VII, § 2, следствие 9]. Тогда

$$T_\zeta = I_{\mathrm{nid}} \setminus \Bigl(\bigcup_{\alpha<\zeta} X_\alpha\Bigr) = \varnothing,$$

так как в противном случае $X_\zeta \neq \varnothing$. Следовательно,

$$I_{\mathrm{nid}} = \bigcup_{\alpha<\zeta} X_\alpha.$$

Очевидно, непустые множества X_α $(\alpha < \zeta)$ не более чем счётны и попарно не пересекаются, а каждое из множеств Y_α $(\alpha < \zeta)$ счётно.

Покажем, что множества Y_α $(\alpha < \zeta)$ попарно не пересекаются. Пусть $\alpha, \beta < \zeta$ и для определённости $\beta > \alpha$ [11, гл. VII, § 2, теорема 1]. Допустим, $y = Y_\alpha \cap Y_\beta$. Так как

$$X_\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n(T_\beta) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Bigl(\Bigl(\bigcup_{i\in D_{n-1}(T_\beta)} U_i\Bigr) \cap T_\beta\Bigr) = \Bigl(\bigcup_{i\in Y_\beta} U_i\Bigr) \cap T_\beta,$$

то $U_y \cap T_\beta \subseteq X_\beta$. Аналогично $U_y \cap T_\alpha \subseteq X_\alpha$.

Следовательно, $U_y \cap T_\beta \subseteq U_y \cap T_\alpha \subseteq X_\alpha$. Поскольку $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$, то

$$U_y \cap X_\beta = \varnothing. \tag{8}$$

Так как

$$y \in Y_\beta = \bigcup_{n \in N} D_n(T_\beta) = \bigcup_{n \in N} \bigcup_{k \in C_n(T_\beta)} S_k = \bigcup_{k \in X_\beta} S_k,$$

то $y \in S_x$ при некотором $x \in X_\beta$. В этом случае $x \in U_y \cap X_\beta$, что противоречит (8). Таким образом, $Y_\alpha \cap Y_\beta = \varnothing$.

Пусть $\alpha < \zeta$. Применяя лемму 11 к множествам S_k ($k \in X_\alpha$), получаем, что существует семейство $P_\alpha = \{J_k \mid k \in X_\alpha\}$ счётных попарно не пересекающихся множеств $J_k \subseteq S_k \subseteq V_k \cap I_0 \subseteq I_0(k)$. Множества $Y_\alpha = \bigcup\limits_{k \in X_\alpha} S_k$ ($\alpha < \zeta$) попарно не пересекаются, значит, если $\alpha \neq \beta$, то $S_k \cap S_i = \varnothing$ при $k \in X_\alpha$, $i \in X_\beta$. Отсюда следует, что $J_k \cap J_i = \varnothing$ при $J_k \in P_\alpha$, $J_i \in P_\beta$. Поскольку $I_{\mathrm{nid}} = \bigcup\limits_{\alpha<\zeta} X_\alpha$, то $\bigcup\limits_{\alpha<\zeta} P_\alpha = \{J_k \mid k \in I_{\mathrm{nid}}\}$ — семейство счётных попарно не пересекающихся множеств.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условиям 1) и 2). Без потери общности можно считать, что множества J_k ($k \in I_{\mathrm{nid}}$) счётны. Для каждого $k \in I_{\mathrm{nid}}$ обозначим

$$B_k = A_k \oplus \prod_{i \in J_k} A_i.$$

Тогда группа G имеет вид

$$G = \prod_{k \in I_{\mathrm{nid}}} B_k \oplus \prod_{i \in K} A_i,$$

где $K \subseteq I_0$. При всех $i \in K$ группа A_i является полупростой (см., например, [2]), по лемме 5 полупроста также каждая из групп B_k. Следовательно, определяя на G кольцо, являющееся прямым произведением полупростых колец, получаем, что группа G полупроста. □

Следствие 13. *Пусть I — не более чем счётное множество. Редуцированная векторная группа $G = \prod\limits_{i \in I} A_i$ полупроста тогда и только тогда, когда выполняется каждое из следующих условий:*

1) *среди групп A_i ($i \in I$) нет групп идемпотентного типа с конечным числом нулей;*
2) *для любой группы A_k неидемпотентного типа множество $I_0(k)$ бесконечно.*

Доказательство. Пусть задано не более чем счётное семейство $\{I_0(k) \mid k \in I_{\mathrm{nid}}\}$ счётных множеств. Тогда по лемме 11 существует семейство $\{J_k \mid k \in I_{\mathrm{nid}}\}$ попарно не пересекающихся счётных множеств $J_k \subseteq I_0(k)$. Следовательно, при не более чем счётном множестве I условие 2) нашего утверждения равносильно условию 2) теоремы 12. □

В заключение отметим, что если $G = \prod_{i \in I} A_i$ — векторная группа, I — неизмеримое множество и m_t — мощность множества $\{i \in I \mid t(A_i) = t\}$, где $t \in \Im$, $\Im$ — множество всех типов, то кардиналы m_t $(t \in \Im)$ являются инвариантами группы G. Поэтому формулировки теоремы 12 и следствия 13 не зависят от разложения группы G в прямое произведение групп без кручения ранга 1.

Литература

[1] Мишина А. П. Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Матем. сб. — 1962. — Т. 57. — С. 375—383.

[2] Beamont R. A., Lawver D. A. Strongly semisimple Abelian groups // Publ. J. Math. — 1974. — Vol. 53, no. 2. — P. 327—336.

[3] Eclof P. C., Mez H. C. Additive groups of existentially closed rings // Abelian Groups and Modules: Proc. of the Udine Conference. — New York: Springer, 1984. — P. 243—252.

[4] Fink T. A note on direct decompositions of large powers of the group of integers // Commun. Algebra. — 1998. — Vol. 26. — P. 3553—3562.

[5] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vols. 1, 2. — London: Academic Press, 1973.

[6] Gardner B. J. Radicals of Abelian groups and associative rings // Acta Math. Hung. — 1973. — Vol. 24. — P. 259—268.

[7] Gardner B. J., Jackett D. R. Rings on certain classes of torsion free Abelian groups // Comment. Math. Univ. Carol. — 1976. — Vol. 17. — P. 493—506.

[8] Jacobson N. Structure of Rings. — Providence: Amer. Math. Soc., 1956.

[9] Kompantseva E. I. Semisimple rings on completely decomposable Abelian groups // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 154, no. 3. — P. 324—332.

[10] Kompantseva E. I. Torsion free rings // J. Math. Sci. — 2010. — V. 171, no. 2. — P. 213—247.

[11] Kuratowski K., Mostowski A. Set Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1976.

[12] Los J. On the complete direct sum of countable Abelian groups // Publ. Math. Debrecen. — 1954. — Vol. 3. — P. 269—272.

[13] Woronowicz M. A note on additive groups of some specific associative rings // Ann. Math. Siles. — 2016. — Vol. 30. — P. 219—229.