Оценка типовой дифференциальной размерности системы линейных дифференциальных уравнений

М. В. КОНДРАТЬЕВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kondratieva@sumail.ru

УДК 512.628.2

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, дифференциальные многочлены, размерностный многочлен Колчина, типовая дифференциальная размерность, кольцо дифференциальных операторов, отлично фильтрованный модуль.

Аннотация

В статье доказана верхняя и нижняя оценки старшего коэффициента размерностного многочлена Колчина системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных коразмерности 2, квадратичная от порядков входящих в систему уравнений. Типовая дифференциальная размерность играет важную роль в дифференциальной алгебре, некоторые её оценки были доказаны Д. Риттом и Э. Колчиным, ими же выдвигались гипотезы, которые позднее были опровергнуты. Полученная оценка обобщает аналог теоремы Безу для случая одной дифференциальной неизвестной. Отметим, что она лучше, чем оценка, полученная Д. Григорьевым.

Abstract

M. V. Kondratieva, A bound for a typical differential dimension of systems of linear differential equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 259—269.

We prove upper and lower bounds for the leading coefficient of Kolchin dimension polynomial of systems of partial linear differential equations in the case of codimension two, quadratic with respect to the orders of the equations in the system. A notion of typical differential dimension plays an important role in differential algebra, some of its estimations were proved by J. Ritt and E. Kolchin; they also advanced several conjectures that were later refuted. Our bound generalizes the analogue of the Bézout theorem for one differential indeterminate. It is better than an estimation proved by D. Grigoriev.

1. Введение

Одним из основных объектов изучения дифференциальной алгебры является дифференциальный размерностный многочлен, введённый Э. Колчиным [6]. Это аналог размерности в алгебраической геометрии, и оценка коэффициентов размерностного многочлена относится к классическим нерешённым проблемам дифференциальной алгебры. Если известно характеристическое множество простого дифференциального идеала в кольце дифференциальных многочленов, проблема нахождения размерностного многочлена является несложной

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 259—269.

комбинаторной задачей, для решения которой известен ряд алгоритмов (см., например, [8]). Из этих алгоритмов следует, что коэффициенты размерностного многочлена полиномиально зависят от порядков элементов характеристического множества простой компоненты. Но для нахождения характеристического множества применяются алгоритмы (различные варианты алгоритма Розенфельда—Грёбнера, см., например, [1, 5]), сложность которых неизвестна. В случае линейных уравнений характеристическое множество является базисом Грёбнера модуля дифференциалов, и в [2] доказана дважды экспоненциальная оценка порядков элементов характеристического множества, обобщающая оценку на порядки базиса Грёбнера полиномиального идеала (см., например, [3]). Мы не будем использовать для оценки старшего коэффициента размерностного многочлена оценку элементов характеристического множества, и в случае коразмерности 2 получим более точную, чем в [4], оценку. Отметим также, что известна дважды экспоненциальная оценка снизу на порядок элементов базиса Грёбнера [9], но пока нет аналогичной оценки снизу для коэффициентов размерностного многочлена Колчина. Поэтому представляет интерес пример 3 о квадратичной оценке снизу в коразмерности 2.

В случае нелинейной системы Э. Колчиным доказана оценка старшего коэффициента при условии, что степень размерностного многочлена на 1 меньше количества дифференцирований (т. е. в случае коразмерности 1). В [8, с. 265] опровергнута гипотеза Колчина об оценке в коразмерности больше 1 и некоторые другие полиномиальные гипотезы. В [7] доказана грубая оценка старшего коэффициента при любом значении дифференциальной размерности, включающая функцию Акермана. Вопрос о том, можно ли доказать верхнюю дважды экспоненциальную оценку для нелинейных систем, пока открыт.

2. Предварительные факты

Основные понятия и факты изложены в [6, 8, 10].

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, через $\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел, через $\binom{n}{k}$ — количество сочетаний из n элементов по k. Пусть $e = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Тогда число $\sum\limits_{k=0}^{m} j_k$ будем называть порядком элемента e и обозначать через $\operatorname{ord} e$. Отметим, что любой целозначный (т. е. принимающий в целых точках целые значения) полином $v(s)$ может быть записан в виде

$$v(s) = \sum_{i}^{d} a_i \binom{s+i}{i},$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$. Будем называть числа $(a_d, \ldots, a_0)$ *стандартными коэффициентами* многочлена $v(s)$.

Теперь дадим определение размерностного многочлена Колчина подмножества $E \subset \mathbb{N}_0^m$. Определим частичный порядок на $\mathbb{N}_0^m$ следующим образом: отношение $(i_1, \ldots, i_m) \leqslant (j_1, \ldots, j_m)$ равносильно тому, что $i_k \leqslant j_k$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Рассмотрим функцию $\omega_E(s)$, принимающую в точке s значение $\operatorname{Card} V_E(s)$, где $V_E(s)$ — множество точек $x \in \mathbb{N}_0^m$, таких что $\operatorname{ord} x \leqslant s$ и для каждого $e \in E$ не выполняется условие $e \leqslant x$. Тогда (см, например, [6, с. 115] или [8, теорема 5.4.1]) функция $\omega_E(s)$ для всех достаточно больших s является целозначным многочленом. Будем называть её размерностным многочленом Колчина множества E и обозначать через $\omega_E(s)$.

Определение 1. Оператор ∂, действующий на коммутативном кольце $\mathbb{K}$ с единицей, называется *дифференциальным оператором* (или *дифференцированием*), если он линеен, $\partial(a + b) = \partial(a) + \partial(b)$, и выполняется правило Лейбница, $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$ для всех элементов $a, b \in \mathbb{K}$.

Дифференциальным кольцом (или Δ-кольцом) будем называть коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с конечным множеством $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ попарно коммутирующих дифференцирований на $\mathbb{K}$.

Пусть

$$\Theta = \Theta(\Delta) = \left\{\partial_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_m^{i_m} \;\middle|\; i_j \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right\}.$$

Для $\theta = \partial_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_m^{i_m}$ определим *порядок дифференциального оператора* θ

$$\operatorname{ord}(\theta) = i_1 + \ldots + i_m$$

и

$$\Theta(r) = \{\theta \in \Theta \mid \operatorname{ord}(\theta) \leqslant r\}.$$

Положим

$$R = \mathbb{K}\{y_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} := \mathbb{K}[\theta y_j \mid \theta \in \Theta,\ 1 \leqslant j \leqslant n] -$$

кольцо коммутативных многочленов с коэффициентами в $\mathbb{K}$ от бесконечного числа неизвестных $\Theta Y = \Theta(y_j)_{j=1}^n$ и

$$R_r = \mathbb{K}[\Theta(r)y_j], \quad r \geqslant 0.$$

Кольцо R называется *кольцом дифференциальных многочленов* от дифференциальных неизвестных $y_1, \ldots, y_n$ с коэффициентами в $\mathbb{K}$.

R является дифференциальным кольцом с множеством дифференцирований $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$. Всюду в дальнейшем мы полагаем, что кольцо $\mathbb{K}$ является дифференциальным полем $\mathcal{F}$ характеристики 0. Идеал I в кольце $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ называется *дифференциальным*, если $\partial f \in I$ для всех $f \in I$ и $\partial \in \Delta$.

Пусть $\Sigma \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ — множество дифференциальных многочленов. Обозначим через $[\Sigma]$ дифференциальный идеал, порождённый множеством Σ в $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, $\{\Sigma\} = \sqrt{[\Sigma]}$ — радикальный дифференциальный идеал.

Определение 2. *Ранжиром* на $\{y_1, \ldots, y_n\}$ будем называть полный порядок $\leqslant$ на множестве производных $T = \theta y_j$ ($\theta \in \Theta$, $1 \leqslant j \leqslant n$), удовлетворяющий следующим двум условиям:

1) $u \leqslant \theta u$ для любых $\theta \in \Theta$ и $u \in T$;

2) если $u \leqslant v$, то $\theta u \leqslant \theta v$ для любых $u \in T$, $v \in T$ и $\theta \in \Theta$.

Ранжир называется *степенным*, если из условия $\operatorname{ord}(\theta_1) \leqslant \operatorname{ord}(\theta_2)$ следует, что $\theta_1 y_i \leqslant \theta_2 y_k$ для всех $1 \leqslant i, k \leqslant n$.

Дифференциальный многочлен $F \in \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ называется *линейным*, если его степень (как обычного многочлена от переменных θy_i, где $\theta \in \Theta$, $1 \leqslant i \leqslant n$) равна 1. Множество Σ кольца R называется системой линейных дифференциальных уравнений, если каждый элемент Σ является линейным. Пусть u — производная, т. е. $u = \theta y_j$ для $\theta = \partial_1^{i_1} \cdots \partial_m^{i_m} \in \Theta$ и $1 \leqslant j \leqslant n$. *Порядком* u называется

$$\operatorname{ord} u = \operatorname{ord} \theta = i_1 + \ldots + i_m.$$

Если f — дифференциальный многочлен и $f \notin \mathcal{F}$, то $\operatorname{ord} f$ — это максимальный порядок производных, входящих в f с ненулевым коэффициентом.

Определение 3. Для дифференциального поля $\mathcal{F}$ с множеством дифференцирований $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ определим (в общем случае некоммутативное) кольцо $D = \mathcal{F}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ косых многочленов от переменных $\partial_1, \ldots, \partial_m$ с коэффициентами в $\mathcal{F}$ так, что выполняются соотношения $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$, $\partial_i a = a\partial_i + \partial_i(a)$ для всех $a \in \mathcal{F}$, $\partial_i, \partial_j \in \Delta$. D называется кольцом (*линейных*) *дифференциальных операторов* (или Δ-*операторов*) над $\mathcal{F}$.

Если дифференцирования из множества Δ действуют на $\mathcal{F}$ тривиально, D является кольцом коммутативных многочленов.

Каждый элемент σ of D представляется в виде конечной суммы

$$\sigma = \sum_{\theta \in \Theta(\Delta)} a_\theta \theta = \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}_0} a_{i_1, \ldots, i_m} \partial_1^{i_1} \ldots \partial_m^{i_m}, \quad a_\theta \in \mathcal{F}.$$

Максимальный порядок $\operatorname{ord} \theta$ среди θ, для которых $a_\theta \neq 0$, называется *порядком* σ и обозначается через $\operatorname{ord} \sigma$.

Пусть D — кольцо линейных дифференциальных операторов над полем $\mathcal{F}$. Рассмотрим на D возрастающую фильтрацию $(D_r)_{r \in \mathbb{Z}}$, где

$$D_r = \{f \in D \mid \operatorname{ord} f \leqslant r\} = \mathcal{F} \cdot \Theta(r)$$

при $r \geqslant 0$ и $D_r = 0$ при $r < 0$.

Фильтрованным D-модулем называется D-модуль M с исчерпывающей и отделимой фильтрацией $(M_r)_{r \in \mathbb{Z}}$. Это означает, что $M = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Z}} M_r$ и существует $r_0 \in \mathbb{Z}$, такое что $M_r = 0$ для всех $r < r_0$, $M_i \subseteq M_{i+1}$ и $D_i M_r \subseteq M_{r+i}$ для всех $r, i \in \mathbb{Z}$.

Определение 4. Пусть M — фильтрованный D-модуль с фильтрацией $(M_r)_{r \in \mathbb{Z}}$. Предположим, что модуль M_r конечно порождён над $\mathcal{F}$ для любого $r \in \mathbb{Z}$. Тогда мы говорим, что фильтрация $(M_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ является *конечной* и называем M *конечно фильтрованным* D*-модулем*. Если существует целое число $r_0 \in \mathbb{Z}$, такое что $M_r = D_{r-r_0} M_{r_0}$ для всех $r > r_0$, то фильтрация $(M_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ называется *хорошей*, а M называется *хорошо фильтрованным* D*-модулем*. Конечная и хорошая фильтрация D-модуля M называется *отличной*. В этом случае M называется *отлично фильтрованным* D*-модулем*.

Пример 1. Пусть M — конечно порождённый D-модуль и $\{m_i\}_{i\in I}$ — конечная система его образующих. Назовём фильтрацию $M_r = \sum\limits_{i\in I} D_r m_i$ *ассоциированной* с этими образующими. Нетрудно видеть, что она является отличной.

Пример 2. Пусть M — отлично фильтрованный D-модуль и N — подмодуль модуля M. Рассмотрим на N индуцированную фильтрацию $N_r = N \cap M_r$. Согласно [8, утверждение 5.1.15] индуцированная фильтрация также является отличной.

Определим теперь *функцию Гильберта* фильтрованного D-модуля как $\chi(r) = \dim_{\mathcal{F}} M_r$. Широко известен следующий факт (см., например, [8, теорема 5.1.11]). Функция Гильберта отлично фильтрованного модуля для достаточно большого значения аргумента r является многочленом степени не выше m. Мы будем называть этот многочлен $\omega_M(s)$ *размерностным многочленом Колчина*. Заметим, что многочлен $\omega_M(s)$ является целозначным. Степень $d = \deg(\omega_M)$ размерностного многочлена Колчина $\omega_M(s)$ называют *дифференциальным типом* модуля M, разность $m - d$ — *коразмерностью*, а стандартный старший коэффициент $a_d(\omega_M)$ — *типовой дифференциальной размерностью*.

Утверждение 1 (см. [8, 5.2.12]). *Пусть $\mathcal{F}$ — дифференциальное поле с множеством дифференцирований $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$, D — кольцо Δ-операторов над полем $\mathcal{F}$. Если ${}_D M$ — конечно порождённый D-модуль, то для любой отличной фильтрации m-й стандартный коэффициент $a_m(\omega_M)$ размерностного многочлена Колчина равен максимальному числу линейно независимых над D элементов M (т. е. $a_m(\omega_M) = \mathrm{rk}_D\, M$).*

Пусть M — свободный D-модуль с образующими $m_1, \ldots, m_n$. Рассмотрим на нём фильтрацию, ассоциированную с выбором этих образующих (см. пример 1). Каждый элемент $f \in M$ представляется в виде $f = \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j m_j$, где $\sigma_j \in D$. Обозначим $\mathrm{ord}_{m_i} f = \mathrm{ord}\,\sigma_i$ и $\mathrm{ord}\, f = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} (\mathrm{ord}\,\sigma_i)$.

Пусть N — подмодуль модуля M, порождённый элементами $\Sigma \subset N$, причём $\mathrm{ord}_{m_j} f \leqslant e_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$, $f \in \Sigma$. Согласно примеру 2 индуцированная фильтрация модуля N является отличной, а значит, и фильтрация фактор-модуля $M/N = (M_r/N_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ также является отличной. Следовательно, существует многочлен Колчина модуля $\omega_{M/N}$. Иногда этот многочлен называют размерностным многочленом системы Σ и обозначают через $\omega_{[\Sigma]}$.

Согласно [8, теорема 4.3.5], используя технику базисов Грёбнера, для любого степенного ранжира на M имеем

$$\omega_{[\Sigma]}(s) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{E_j}(s),$$

где $E_j \subset \mathbb{N}_0^m$. Отсюда следует, что если система Σ имеет коразмерность 0, то её типовая Δ-размерность не превосходит n.

Нас интересует следующий вопрос.

Вопрос 1. Как оценить типовую дифференциальную размерность Σ через известные порядки $e_1, \ldots, e_n$?

Этот вопрос впервые поставил Д. Ритт, который занимался системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Позднее Э. Колчин решил эту задачу в коразмерности 1 даже для нелинейной системы.

Теорема 1 (см. [6, с. 199]). *Пусть $\Sigma \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, и пусть $\operatorname{ord}_{y_i} f \leqslant e_j$ для всех $f \in \Sigma$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда для каждой простой компоненты ρ идеала $\{\Sigma\}$ дифференциального типа $m-1$ типовая дифференциальная размерность a_{m-1} идеала ρ не превосходит $e_1 + \ldots + e_n$.*

Отметим, что для системы линейных дифференциальных уравнений идеал $\rho = [\Sigma]$ является простым, а размерностный многочлен Колчина идеала ρ совпадает с размерностным многочленом отлично фильтрованного модуля дифференциалов M/N. В дальнейшем, говоря о линейной совместной системе $\Sigma \subset \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, всегда будем иметь в виду отлично фильтрованный модуль дифференциалов M/N, отождествляя m_i с $\delta(y_i)$.

Перейдём к коразмерности 2.

Теорема 2 (см. [8, 5.6.7]). *Пусть в условиях вопроса 1 $n = 1$. Если коразмерность фильтрованного D-модуля M/N равна 2, то $a_{m-2}(\omega_{M/N}) \leqslant e_1^2$. Эта оценка является достижимой.*

Заметим, что теорема 2 является обобщением классической теоремы Безу, которая утверждает, что если дифференцирования действуют на поле тривиально (т. е. D — кольцо коммутативных многочленов) и все уравнения Σ однородны, то выполняется неравенство $a_d \leqslant h^{m-d}$, где d — степень характеристического многочлена Гильберта, $h = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} e_j$.

Отметим также, что в [4] найдена оценка для типовой дифференциальной размерности в любой коразмерности, а именно $a_d \leqslant n(4m^2nh)^{4^{m-d-1}(2(m-d))}$. Однако неизвестна нижняя оценка, и вопрос о существовании верхней полиномиальной оценки открыт.

3. Основные результаты

Наша цель — доказать оценку типовой Δ-размерности в коразмерности 2 для $n > 1$. Сначала рассмотрим пример, который даёт нижнюю оценку.

Пример 3. Рассмотрим следующую систему Σ линейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$
\begin{array}{llllll}
\partial_1^{e_1} m_1 = 0; & & & & & \\
\partial_2^{e_1} m_1 = \partial_1^{e_2} m_2; & & & & & \\
& \partial_2^{e_2} m_2 = \partial_1^{e_3} m_3; & & & & \\
& & \partial_2^{e_3} m_3 = \partial_1^{e_4} m_4; & & & \\
& & \dots & \dots; & & \\
& & & \partial_2^{e_i} m_i = \partial_1^{e_{i+1}} m_{i+1}; & & \\
& & & \dots & \dots; & \\
& & & & \partial_2^{e_{n-1}} m_{n-1} = \partial_1^{e_n} m_n; & \\
& & & & & \partial_2^{e_n} m_n = 0.
\end{array}
$$

Утверждение 2. *Для системы* Σ *выполняется следующее соотношение*:

$$\omega_{[\Sigma]}(s) = \sum_{j_1+\ldots+j_n=2} e_1^{j_1} \ldots e_n^{j_n} \binom{s+m-2}{m-2}.$$

Доказательство. Рассмотрим степенной ранжир (см. определение 2), такой что $m_1 > m_2 > \ldots > m_n$. Для вычисления характеристического множества системы Σ (уравнения линейны, поэтому достаточно найти базис Грёбнера) найдём критическую пару двух первых уравнений. Получаем $\partial_1^{e_1+e_2} m_2 = 0$. Теперь находим критическую пару для этого уравнения и третьего уравнения системы. Получаем уравнение $\partial_1^{e_1+e_2+e_3} m_3 = 0$. Для последней образующей будет получено уравнение $\partial_1^{e_1+\ldots+e_n} m_n = 0$. Рассмотрев лидеры полученных уравнений, получим по [8, теорема 4.3.5]

$$
\begin{aligned}
&\omega_{[\Sigma]}(s) = \\
&= \omega_{\left(\begin{smallmatrix} e_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_1 & \ldots & 0 \end{smallmatrix}\right)}(s) + \omega_{\left(\begin{smallmatrix} e_1+e_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_2 & \ldots & 0 \end{smallmatrix}\right)}(s) + \ldots + \omega_{\left(\begin{smallmatrix} e_1+e_2+\ldots+e_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_n & \ldots & 0 \end{smallmatrix}\right)}(s) = \\
&= e_1^2 \binom{s+m-2}{m-2} + (e_1+e_2)e_2 \binom{s+m-2}{m-2} + \ldots + \\
&+ (e_1+\ldots+e_n)e_n \binom{s+m-2}{m-2} = \sum_{j_1+\ldots+j_n=2} e_1^{j_1} \ldots e_n^{j_n} \binom{s+m-2}{m-2}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Таким образом, оценка типовой дифференциальной размерности в коразмерности 2 должна быть не ниже чем

$$\sum_{j_1+\ldots+j_n=2} e_1^{j_1} \ldots e_n^{j_n}. \tag{1}$$

Этот пример подтверждает выдвинутую в [8] (см. формула (5.6.4)) гипотезу. Там же приведён пример (см. пример 5.6.6), опровергающий её для коразмерности больше 2. Пока неизвестно, выполняется ли эта гипотеза в коразмерности 2.

Сейчас мы докажем верхнюю границу типовой Δ-размерности, которая, как в этой гипотезе, является квадратичной от порядков входящих в систему уравнений. А именно, докажем оценку

$$a_{m-2}(\omega_\Sigma) \leqslant 2^{2(m+1)}(e_1 + \ldots + e_n)^2.$$

Известно, что если поле $\mathcal{F}$ содержит поле рациональных функций $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_m)$ и дифференцирования действуют так, что $\partial_i(x_i) = 1$, то для всякого Δ-расширения $\mathcal{F}$ коразмерности больше 0 существует Δ-примитивный элемент (см, например, [8, 5.3.13]).

Мы докажем конструктивный вариант этой теоремы для линейных уравнений, который представляет самостоятельный интерес. А именно, в положительной коразмерности линейная система от n неизвестных порядка h эквивалентна системе линейных уравнений от одной неизвестной порядка не выше $O(m)(n+1)h$.

Теорема 3. *Пусть $\Sigma \subset \mathcal{F}\{y_1, \dots, y_n\}$ — совместная система линейных дифференциальных уравнений, $\operatorname{ord} f_{y_j} \leqslant e_j$ для всех $f \in \Sigma$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $a_m(\omega_{[\Sigma]}) = 0$. Тогда в некотором расширении $\mathcal{G}$ поля $\mathcal{F}$ существуют элементы $c_2, \dots, c_n$, такие что модуль дифференциалов M/N системы Σ порождён одним элементом $M/N = \tilde{D}\psi$, где $\psi = m_1 + c_2 m_2 + \dots c_n m_n$, $\tilde{D} = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{F}} D$. Введём обозначение $\lambda_j \in \tilde{D}$: $\lambda_j \psi = m_j$. Тогда порядок каждого λ_j не выше*

$$2^m(e_1 + \dots + e_n).$$

Доказательство. Поскольку коразмерность системы Σ не меньше 1, ранг D-модуля дифференциалов M/N равен 0. Отсюда следует, что $\operatorname{rk}_D N = n$, и мы можем выбрать в Σ такую подсистему Σ' независимых над D элементов свободного модуля M, что $\operatorname{Card} \Sigma' = n$. Пусть $\Sigma' = \{F_1, \dots, F_n\}$. Обозначим через Σ_0 следующую систему Δ-уравнений относительно $m_1, \dots, m_n$:

$$\begin{aligned} &F_i(m_1, \dots, m_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \ F_i \in \Sigma', \\ &m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_n m_n = \psi. \end{aligned}$$

Здесь c_i, ψ — новые дифференциальные неизвестные. Рассмотрим Σ_0 как систему линейных уравнений относительно Θm_j с коэффициентами в поле $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\big(\Theta(c_1), \dots, \Theta(c_n), \Theta(\psi)\big)$. Это система $n+1$ линейно независимых над $\mathcal{F}'$ уравнений от $k(\Sigma_0) = \binom{e_1+m}{m} + \dots + \binom{e_n+m}{m}$ неизвестных. Независимость означает, что ранг $((n+1) \times k(\Sigma_0))$-матрицы соответствующей однородной системы максимален и равен $n+1$. Будем теперь дифференцировать уравнения Σ_0. Пусть Σ_s — система

$$\begin{aligned} &\Theta(s) F_i(m_1, \dots, m_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \ F_i \in \Sigma', \\ &\theta(m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_n m_n) = \theta(\psi), \quad \theta \in \Theta(s). \end{aligned}$$

Σ_s — система от $\binom{s+e_1+m}{m} + \dots + \binom{s+e_n+m}{m}$ неизвестных, количество независимых уравнений в ней равно $(n+1)\binom{s+m}{m}$. Мы видим, что количество уравнений растёт быстрее, чем количество неизвестных. Из независимости уравнений системы Σ' следует, что найдётся такое s, что Σ_s станет однозначно определённой. Матрица линейной системы Σ_s состоит из элементов поля $\mathcal{F}\big(\theta(s)(c_1), \dots, \theta(s)(c_n), \theta(s)(\psi)\big)$. Не используя деление, приведём эту матрицу к треугольному виду. Получим для каждого $j = 1, \dots, n$ выражение

$\alpha_j m_j = \lambda_j \psi$, где $\alpha_j = \sum\limits_{j=2}^{n} \sigma_j(c_j)$, $\sigma_j \in D_s$ — производная от $c_2, \dots, c_n$ порядка не выше s. Осталось добавить к полю $\mathcal{F}$ элементы $c_2, \dots, c_n$, удовлетворяющие системе неравенств $\alpha_j(c_2, \dots, c_n) \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}\langle c_2, \dots, c_n\rangle$, $\tilde{D} = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{F}}$. Тогда $\tilde{D}$-модуль M/N порождается своей образующей $\psi = m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n$, причём каждый m_j может быть выражен как $\lambda_j \psi$, $\operatorname{ord} \lambda_j \leqslant s$.

Таким образом, осталось найти подходящее значение s. Покажем, что для $s = 2^m(e_1 + \ldots + e_n)$ выполняется условие

$$\binom{s+e_1+m}{m} + \ldots + \binom{s+e_n+m}{m} \leqslant (n+1)\binom{s+m}{m}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{s+m+e_1}{m} + \ldots + \binom{s+m+e_m}{m}}{\binom{s+m}{m}} &= \frac{\prod_{j=1}^m (s+e_1+j)}{\prod_{j=1}^m (s+j)} + \ldots + \frac{\prod_{j=1}^m (s+e_n+j)}{\prod_{j=1}^m (s+j)} = \\
&= \prod_{j=1}^m \frac{(s+e_1+j)}{(s+j)} + \ldots + \prod_{j=1}^m \frac{(s+e_n+j)}{(s+j)} = \\
&= \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{e_1}{s+j}\right) + \ldots + \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{e_n}{s+j}\right) \leqslant \\
&\leqslant \left(1 + \frac{e_1}{s+1}\right)^m + \ldots + \left(1 + \frac{e_1}{s+1}\right)^m = \\
&= n + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \left(\frac{e_1}{s+1}\right)^j + \ldots + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \left(\frac{e_n}{s+1}\right)^j.
\end{aligned}$$

Таким образом, для $s + 1 \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i$ имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{s+m+e_1}{m} + \ldots + \binom{s+m+e_m}{m}}{\binom{s+m}{m}} &\leqslant n + (2^m - 1)\left(\frac{e_1}{s+1} + \ldots + \frac{e_n}{s+1}\right) \leqslant \\
&\leqslant n + 2^m \frac{(e_1 + \ldots + e_n)}{s+1} \leqslant n + 1,
\end{aligned}$$

так как мы взяли $s = 2^m(e_1 + \ldots + e_n)$. □

Как следует из доказательства теоремы 3, для поиска примитивного элемента достаточно продифференцировать нужное число раз систему Σ' и исключить из полученной линейной системы переменные (например, методом Гаусса). Таким образом, эта теорема даёт алгоритм нахождения примитивного элемента системы линейных дифференциальных уравнений.

Теперь докажем аналог теоремы Безу в случае коразмерности 2 для систем линейных дифференциальных уравнений.

Теорема 4. *Пусть $\Sigma \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ — система линейных дифференциальных уравнений в частных производных, $m = \operatorname{Card}\Delta$, и пусть $\operatorname{ord}_{y_j} f \leqslant e_j$ для всех $f \in \Sigma$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Предположим, что система Σ имеет дифференциальный тип $m-2$. Тогда её типовая дифференциальная размерность a_{m-2} не превосходит*

$$2^{2m+2}(e_1 + \ldots + e_n)^2. \tag{2}$$

Доказательство. По теореме 3 можем считать, что модуль дифференциалов M/N порождается примитивным элементом ψ. По той же теореме образующие m_i выражаются через ψ операторами порядка не выше $2^m(e_1 + \ldots + e_n)$. Обозначим через $J = \{\lambda \in \tilde{D} \colon \lambda\psi = 0\}$ аннулятор элемента ψ. Идеал J порождён как идеал кольца дифференциальных операторов $\tilde{D}$ элементами порядка не выше

$$2^m(e_1 + \ldots + e_n) + \max_{1 \leqslant j \leqslant n} e_j,$$

так как именно такие порядки операторов получаются после подстановки выражений m_j через ψ в систему Σ. Отсюда следует, что аннулятор элемента ψ порождён как идеал кольца дифференциальных операторов $\tilde{D}$ элементами порядка не выше $2^m(2e_1 + \ldots + 2e_n)$. Теперь по теореме 2 получаем оценку (2). $\square$

Итак, в случае системы линейных дифференциальных уравнений мы получили верхнюю и нижнюю квадратичную оценку типовой дифференциальной размерности для дифференциального типа $m-2$. Это более точная, чем в [4], оценка.

Литература

[1] Boulier F., Lazard D., Ollivier F., Petitot M. Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals // Appl. Algebra Eng., Commun. Comput. — 2009. — Vol. 20, no. 1. — P. 73—121.

[2] Chistov A., Grigoriev D. Complexity of a standard basis of a D-module // St. Petersburg Math. J. — 2009. — Vol. 20. — P. 709—736.

[3] Dubé T. The structure of polynomial ideals and Gröbner bases // SIAM J. Comput. — 1990. — Vol. 19, no. 4. — P. 750—773.

[4] Grigoriev D. Weak Bezout inequality for D-modules // J. Complexity. — 2005. — Vol. 21. — P. 532—542.

[5] Hubert E. Factorization-free decomposition algorithms in differential algebra // J. Symbolic Comput. — 2000. — Vol. 29, no. 4-5. — P. 641—662.

[6] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — London: Academic Press, 1973.

[7] Kondratieva M. V. An upper bound for minimizing coefficients of dimension Kolchin polynomial // Program. Comput. Software. — 2010. — Vol. 36, no. 2. — P. 83—86.

[8] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[9] Mayr E. W., Meyer A. R. The complexity of a word problem for commutative semigroups and polynomial ideals // Adv. Math. — 1982. — Vol. 46. — P. 305—329.

[10] Ritt J. Differential Algebra. — New York: Amer. Math. Soc., 1950.