Инварианты Жордана—Кронекера для полупрямых сумм вида $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^{k*}$

К. С. ВОРУШИЛОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ksvorushilov@gmail.com

УДК 512.81

Ключевые слова: алгебры Ли, инварианты Жордана—Кронекера.

Аннотация

В данной работе вычислены инварианты Жордана—Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли $\mathrm{sl}(n)$ и $\mathrm{gl}(n)$ с k экземплярами $\mathbb{R}^n$ по стандартному представлению в случаях, когда $k > n$ или n кратно k.

Abstract

K. S. Vorushilov, Jordan–Kronecker invariants of semidirect sums of the form $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ *and* $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 3—18.

We calculate Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums of Lie algebras $\mathrm{sl}(n)$ and $\mathrm{gl}(n)$ with k copies of $\mathbb{R}^n$ with respect to their standard representation for cases where $k > n$ or n is a multiple of k.

1. Введение

Инварианты Жордана—Кронекера алгебр Ли были введены А. В. Болсиновым и П. Чжаном в [7]. Они представляют собой набор целочисленных индексов, описывающих канонический вид пары кососимметрических форм $\mathcal{A} = (c_{ij}^k x_k)$ и $\mathcal{B} = (c_{ij}^k a_k)$, заданных свёрткой тензора структурных констант алгебры Ли c_{ij}^k с элементами общего положения a, x её коалгебры (т. е. пространства, сопряжённого к алгебре Ли). Интерес к инвариантам Жордана—Кронекера обусловлен их связью с теорией интегрируемых систем на алгебрах Ли, в частности с методом сдвига аргумента, предложенным А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [6]. Для некоторых типов алгебр Ли (например, для полупростых алгебр и алгебр малой размерности) инварианты вычислены, но в общем случае вопрос пока открыт. Задача получения инвариантов Жордана—Кронекера обсуждалась

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01303).

специалистами в области конечномерных интегрируемых систем как один из весьма интересных открытых вопросов [2, 8, 10]. В данной работе рассмотрены полупрямые суммы специальной линейной ($\mathrm{sl}(n)$) или полной линейной ($\mathrm{gl}(n)$) алгебр Ли с несколькими экземплярами пространства $\mathbb{R}^n$. С опорой на результаты А. В. Болсинова и П. Чжана, изложенные в [7], был выработан метод вычисления инвариантов Жордана—Кронекера для таких алгебр. Индексы и инварианты коприсоединённого представления этих алгебр, необходимые для данного метода, были найдены в работах А. С. Воронцова [3] и А. Гусейнова [5]. На основе найденного метода были получены инварианты Жордана—Кронекера для таких алгебр Ли при $k \geqslant n$, а также для некоторых специальных случаев при $k < n$.

1.1. Теорема о разложении Жордана—Кронекера

Теорема 1 [11]. *Пусть A и B — две произвольные билинейные кососимметрические формы на линейном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Тогда существует такой базис пространства V, в котором формы A и B одновременно приведены к блочно-диагональному виду $A = \mathrm{diag}\{A_1, \ldots, A_n\}$, $B = \mathrm{diag}\{B_1, \ldots, B_n\}$ с блоками следующих видов:*

1) *жорданов блок с собственным значением $\lambda_i \in \mathbb{K}$:*

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & J(\lambda_i) \\ -J^{\mathrm{T}}(\lambda_i) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

а E — единичная матрица;

2) *жорданов блок с собственным значением $\lambda_i = \infty$:*

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & J(0) \\ -J^{\mathrm{T}}(0) & 0 \end{pmatrix};$$

3) *кронекеров блок:*

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ -K_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & K_2 \\ -K_2^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

где K_1 и K_2 — матрицы размера $(k_i - 1) \times k_i$ вида

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Размер кронекеровых блоков составляет $2k_i - 1$, число $k_i \in \mathbb{N}$ — кронекеров индекс пары форм A и B. Доказательство данной теоремы описано в [11].

Базис из теоремы Жордана—Кронекера не будет единственным, однако блоки определены однозначно с точностью до перестановки. Максимальный по λ ранг формы $A + \lambda B$ называется рангом пучка $\mathcal{P} = \{A + \lambda B\}$, количество кронекеровых блоков равно $\operatorname{corank} \mathcal{P}$. Характеристические числа, появляющиеся в жордановых блоках, — корни полинома $\mathbf{p}(\lambda)$, который является наибольшим общим делителем пфаффианов всех диагональных миноров степени $\operatorname{rank} \mathcal{P}$ матрицы формы $A + \lambda B$ [7]. Алгебра имеет кронекеров тип, если в разложения Жордана—Кронекера пучка общего положения присутствуют только кронекеровы блоки, жорданов тип, если разложение Жордана—Кронекера пучка содержит только жордановы блоки, и смешанный тип в остальных случаях.

2. Общие сведения о рассматриваемой серии

Элементами специальной линейной группы Ли $\mathrm{SL}(n)$ являются матрицы размера $n \times n$ с определителем, равным единице. Её алгебра Ли $\mathrm{sl}(n)$ состоит из всех матриц с нулевым следом. Рассмотрим полупрямое произведение $G = \mathrm{SL}(n) \leftthreetimes (\mathbb{R}^n)^k$, заданное стандартным представлением $\mathrm{SL}(n)$ в $\mathbb{R}^n$, и соответствующую алгебру Ли вида $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$. Её коалгебру, т. е. пространство, сопряжённое к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, обозначим через $\mathfrak{g}^*$. Введём следующие обозначения для $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}^*$:

$$g = \begin{pmatrix} X & v_1 & \dots & v_k \\ 0 & & E & \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} A & h_1 & \dots & h_k \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} Y & l_1 & \dots & l_k \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix},$$

где $X \in \mathrm{SL}(n)$, $A \in \mathrm{sl}(n)$, $Y \in \mathrm{sl}(n)^*$. Иногда вместо данных обозначений будем также использовать упрощённые обозначения вида $g = (X, W)$, где W — матрица, составленная из столбцов v_i, и т. п.

Все обозначения сохраняются для случая $\mathrm{GL}(n)$ — полной линейной группы Ли, состоящей из всех невырожденных матриц, и её алгебры Ли $\mathrm{gl}(n)$, состоящей из всех матриц.

В дальнейшем изложении часто встречаются понятия индекса, аннулятора и сингулярного множества. Напомним их определения:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \min_{y \in \mathfrak{g}^*} \dim \operatorname{Ann} y, \\ &\operatorname{Ann} y = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}^*_\xi y = 0\}, \\ &\operatorname{Sing} = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \dim \operatorname{Ann} y > \operatorname{ind} \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

3. Индекс алгебры

Опишем вычисление индексов для рассматриваемых алгебр Ли, следуя [3]. Это вычисление основано на теореме Раиса.

Теорема 2 (М. Раис [1, 9]). *Пусть* $\mathcal{G} = \mathcal{H} \leftthreetimes_{\Phi} V$ *— полупрямое произведение группы Ли* $\mathcal{H}$ *по представлению* Φ, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\phi} V$ *— её алгебра Ли (где* $\phi = d\Phi$*),* $y = (Y, l)$ *— элемент коалгебры* $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}^* + V^*$, $\mathrm{St}(l) \subset \mathfrak{h}$ *— стационарная подалгебра элемента* l *относительно двойственного представления* ϕ^*, $\pi\colon \mathfrak{h}^* \to \mathrm{St}(l)^*$ *— естественная проекция. Тогда размерность аннулятора* $y \in \mathfrak{g}^*$ *равна сумме размерности аннулятора* $\pi(Y) \in \mathrm{St}(l)^*$ *в алгебре Ли* $\mathrm{St}(l)$ *и коразмерности орбиты* $\mathcal{O}_l$ *элемента* l *при действии* Φ^* *группы* $\mathcal{H}$ *на* V^*:

$$\dim \mathrm{Ann}\, y = \dim \mathrm{Ann}_{\mathrm{St}(l)}\, \pi(Y) + \mathrm{codim}\, \mathcal{O}_l.$$

Более того, если y *— элемент общего положения,* St_0 *— стационарная подалгебра общего положения представления* ϕ^*, *а* $\mathrm{ind}\, \phi$ *— минимальная коразмерность орбиты представления* Φ^*, *то*

$$\mathrm{ind}\, \mathfrak{g} = \mathrm{ind}\, \mathrm{St}_0 + \mathrm{ind}\, \phi.$$

Прежде всего найдём стационарную подалгебру общего положения полупрямой суммы $\mathrm{sl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$:

$$\mathrm{St}_0 = \{A \in \mathrm{sl}(n) \mid \rho(A)l = 0,\ l \in (\mathbb{R}^n)^k\}.$$

Стационарная подалгебра общего положения в данном случае изоморфна алгебре Ли $\mathrm{sl}(n-k) \oplus (\mathbb{R}^{n-k})^k$; при $k \geqslant n$ она тривиальна.

1. Случай $k \geqslant n$. Индекс ϕ равен $kn - n^2 + 1$. Так как стационарная подалгебра общего положения тривиальна, её индекс равен нулю. Отсюда следует, что

$$\mathrm{ind}\, \mathfrak{g} = kn - n^2 + 1.$$

2. Случай $k < n$. Индекс ϕ равен

$$kn - \dim\bigl(\mathrm{sl}(n)\bigr) + \dim \mathrm{St}_0 = kn - n^2 + 1 + (n-k)^2 - 1 + k(n-k) = 0.$$

   Для вычисления индекса St_0 разделим n на k с остатком: $n = kd + r$, $0 \leqslant r < k$. Тогда

$$\mathrm{ind}\, \mathrm{St}_0 = \mathrm{ind}\, \mathrm{sl}(r) \oplus (\mathbb{R}^r)^k = kr - r^2 + 1$$

   (данный результат получается рекуррентным вычислением индексов $\mathrm{St}_0\bigl(\ldots\bigl(\mathrm{St}_0(\mathfrak{g})\bigr)\bigr)$, пока алгебра не станет изоморфной одной из алгебр случая $k \geqslant n$). Получаем

$$\mathrm{ind}\, \mathfrak{g} = kr - r^2 + 1, \quad n = kd + r, \quad 0 \leqslant r < k.$$

Для $\mathfrak{g} = \mathrm{gl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ ответ получается аналогичным образом.

1. Случай $k \geqslant n$: $\mathrm{ind}\, \mathfrak{g} = kn - n^2$.
2. Случай $k < n$: $\mathrm{ind}\, \mathfrak{g} = kr - r^2$, где $n = kd + r$, $0 \leqslant r < k$.

4. Явный вид оператора коприсоединённого представления

Найдём действие оператора присоединённого представления (для $g = (X, W) \in G$, где $W = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{pmatrix}$) на вектор $\xi = (A, H) \in \mathfrak{g}$, где $H = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_k \end{pmatrix}$):

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\, \xi = g^{-1}\xi g = \begin{pmatrix} X^{-1}AX & X^{-1}AW + X^{-1}H \\ \text{\Large 0} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью скалярного произведения:

$$\langle \xi, y \rangle = \mathrm{Tr}(AY) + \sum_{i=1}^{k} l_i^{\mathrm{T}} h_i,$$

где $y = (Y, L) \in \mathfrak{g}^*$, $L = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_k \end{pmatrix}$. Теперь мы можем найти общий вид действия оператора коприсоединённого представления на элемент $y \in \mathfrak{g}^*$:

$$\mathrm{Ad}_g^* y = \begin{pmatrix} XYX^{-1} + V & {X^{-1}}^{\mathrm{T}} L \\ \text{\Large 0} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$V = \sum_{i=1}^{k} \left(v_i l_i^{\mathrm{T}} X^{-1} - \frac{\mathrm{Tr}(v_i l_i^{\mathrm{T}} X^{-1})}{n} E \right) \tag{2}$$

в случае $\mathrm{sl}(n)$ и

$$V = \sum_{i=1}^{k} v_i l_i^{\mathrm{T}} X^{-1} \tag{3}$$

в случае $\mathrm{gl}(n)$.

Пусть $g(t)$ — кривая в G, где $g(0) = e$. Тогда

$$\zeta = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g = \begin{pmatrix} B & p_1 & \dots & p_k \\ \text{\Large 0} & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}.$$

Найдём коприсоединённое представление алгебры Ли, пользуясь определением:

$$(\mathrm{ad}_\zeta^*\, y)\xi = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad}_g^* y)\xi$$

для любого $\xi \in \mathfrak{g}$. Вычисляя, получаем

$$\mathrm{ad}_\zeta^*\, y = \begin{pmatrix} BY - YB + V^* & -B^{\mathrm{T}} L \\ \text{\Large 0} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

где

$$V^* = \sum_{i=1}^{k} \left(p_i l_i^{\mathrm{T}} - \frac{l_i^{\mathrm{T}} p_i}{n} E \right)$$

в случае $\mathrm{sl}(n)$ и

$$V^* = \sum_{i=1}^{k} p_i l_i^{\mathrm{T}}$$

в случае $\mathrm{gl}(n)$.

5. Типы алгебр Ли и Ad^*-инварианты

Определить тип алгебры Ли в смысле разложения Жордана—Кронекера для случая $\mathrm{sl}(n)$ для любых n и k позволяет следующая теорема.

Теорема 3 (А. В. Болсинов [1]). *Алгебры Ли* $\mathrm{sl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ *кронекерова типа, если либо* $k = 1$, *либо* $n \not\equiv 0 \bmod k$. *В остальных случаях рассматриваемые алгебры Ли имеют смешанный тип.*

Инварианты коприсоединённого представления для $\mathrm{sl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ имеют вид $\det M_y$, где M_y — матрица размера $n \times n$, которая строится следующим образом ($n = kd + r$, $0 \leqslant r < k$): сначала идут d групп по k столбцов, где первая группа — это l_i, вторая — $Y^{\mathrm{T}} l_i$, третья — $(Y^{\mathrm{T}})^2 l_i$ и т. д. до группы $(Y^{\mathrm{T}})^{d-1} l_i$, а потом последние r столбцов $(Y^{\mathrm{T}})^d l_i$ ($i = 1, \ldots, r$).

Зная вид инвариантов, несложно подсчитать их степень:

$$\deg f_i = \frac{(d+1)(n+r)}{2}.$$

Для серии $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ данные функции не будут инвариантами коприсоединённого представления, однако они будут являться так называемыми *полуинвариантами*. Соответственно, инвариантами коприсоединённого представления этой серии будут отношения данных функций [5].

Для некоторых чисто кронекеровых случаев серии $\mathrm{sl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ ответ можно получить, используя теорему Воронцова.

Теорема 4 (А. С. Воронцов [4]). *Пусть* $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — *алгебраически независимые полиномиальные инварианты коприсоединённого представления алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *со степенями* $\deg f_1 \leqslant \ldots \leqslant \deg f_s$, *где* $s = \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$. *Тогда справедлива следующая оценка для кронекеровых индексов* $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_s$:

$$\deg f_i \geqslant k_i.$$

Следствие 1. *Если алгебра кронекерова типа и выполнено условие*

$$\sum_{i=1}^{s} \deg f_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}), \tag{4}$$

то оценка теоремы 4 *превращается в строгое равенство*:

$$\deg f_i = k_i.$$

Вычислим левую и правую части формулы (4):

$$\frac{\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}}{2} = \frac{n^2 - 1 + kn + kr - r^2 + 1}{2} = \frac{(n+r)(k+n-r)}{2} = \frac{k(n+r)(d+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{s} \deg f_i(y) = \frac{(d+1)(n+r)}{2}(kr - r^2 + 1).$$

Их равенство выполняется при $r = 1$ или $k = r + 1$.

6. Случай $k > n$

Алгебры Ли серии $\mathrm{sl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ в данном случае ($k > n$) имеют кронекеров тип, т. е. для описания инвариантов Жордана—Кронекера требуется найти лишь кронекеровы индексы. Для этого мы используем метод цепочек (см., например, [4]). Пусть $x, a \in \mathfrak{g}^*$, причём x — элемент общего положения. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}^*_{\xi_1} x = 0,\\
&\mathrm{ad}^*_{\xi_2} x = \mathrm{ad}^*_{\xi_1} a,\\
&\mathrm{ad}^*_{\xi_3} x = \mathrm{ad}^*_{\xi_2} a,\\
&\quad \dots\\
&\mathrm{ad}^*_{\xi_{l-1}} a = \mathrm{ad}^*_{\xi_l} x.
\end{aligned}$$

Вектор v назовём вектором высоты n, если существует цепочка ξ_i, такая что $\xi_n = v$. Обозначим через V_i пространство векторов высоты i. Число кронекеровых блоков размера больше $2k - 1$ равно $\dim V_{k+1} - \dim V_k$.

Предложение 1. *Для алгебр Ли* $\mathrm{sl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ *при* $k > n$ *пространство* V_l *векторов высоты* l *имеет размерность* $l \operatorname{ind} \mathfrak{g}$, *если* $l \operatorname{ind} \mathfrak{g} < kn$, *и* kn *в остальных случаях.*

Доказательство. Пусть $\xi_i = (B_i, P_i)$, $x = (Y_x, L_x)$, $a = (Y_a, L_a)$. Обозначим через L_x^* матрицу, составленную из первых n столбцов матрицы L_x. Действием оператора Ad^* её можно привести к виду единичной матрицы E. Из общего вида оператора коприсоединённого представления следует, что условие на B_1, задаваемое первым уравнением системы, имеет вид $B_1^{\mathrm{T}} L_x = 0$, откуда следует, что $B_1 = 0$. Все последующие B_i также равны нулю, так как правая часть уравнения $B_{i+1}^{\mathrm{T}} L_x = B_i^{\mathrm{T}} L_a$ равна нулю.

Обозначим через P_i^* матрицу, составленную из первых n столбцов матрицы P_i. Рассмотрим матричное уравнение

$$P_i L_x^{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{Tr}(P_i L_x^{\mathrm{T}})}{n} E = P_{i-1} L_a^{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{Tr}(P_{i-1} L_a^{\mathrm{T}})}{n} E. \tag{5}$$

Все недиагональные элементы матрицы P_i^* входят в линейные уравнения, задаваемые (5), один раз. Система уравнений, задаваемых диагональными элементами (5), может иметь ранг не больше $n-1$, так как левая часть (5) имеет нулевой след. Матрица коэффициентов, с которыми диагональные элементы матрицы P_i^* входят в эту систему, имеет вид $(-1/n)I+E$, где I — матрица всех единиц. Легко проверить, что матрица коэффициентов имеет ранг $n-1$.

Таким образом, на первом шаге мы имеем n^2-1 независимых линейных уравнений и kn неизвестных. Их разность и есть размерность пространства V_1, она равна индексу рассматриваемой алгебры Ли. На следующем шаге к неизвестным P_2 мы прибавляем неизвестные P_1, получая систему из n^2-1 уравнений с $\operatorname{ind}\mathfrak{g}+kn$ неизвестными; размерность V_2 соответственно равна $2\operatorname{ind}\mathfrak{g}$. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока на каком-то шаге i разность числа неизвестных и числа уравнений не станет большей или равной kn, что будет означать, что P_i не зависит от P_j, $j<i$, и может быть задана произвольно. Размерность всех V_l при $l \geqslant i$ будет равна kn. □

Предложение 2. *В случаях $n=2$, $k>2$ и $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2n$ все рассматриваемые алгебры Ли имеют только кронекеровы блоки размеров 1 и 3.*

Доказательство. Случай $n=2$ изоморфен случаю $\mathrm{sp}(2)\oplus(\mathbb{R}^2)^k$, описанному в [12].

Утверждение предложения означает, что для данных алгебр $\dim V_2 \geqslant kn$. Пользуясь предыдущим утверждением, преобразуем это условие ($k>n\geqslant 2$):

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{ind}\mathfrak{g} \geqslant kn\\
&2kn-2n^2+2 \geqslant kn\\
&kn-2n^2 \geqslant -2\\
&n(k-2n) \geqslant -2.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется при всех неотрицательных значениях $k-2n$. □

Оценка $k \geqslant 2n$, найденная в предложении 2, работает и для $\mathrm{gl}(n)\oplus(\mathbb{R}^n)^k$ при $k>n$. Доказательство аналогично.

7. Случай $k = n$

Для алгебр Ли серии $\mathrm{gl}(n)\oplus(\mathbb{R}^n)^k$ данный случай ($k=n$) был описан в [7].

Предложение 3. *Разложение Жордана—Кронекера пучка общего положения алгебры Ли $\mathrm{sl}(n)\oplus(\mathbb{R}^n)^n$ имеет один кронекеров блок размера $2n-1$.*

Доказательство. Воспользуемся методом цепочек.

Пусть $\xi_i=(B_i,P_i)$, $x=(Y_x,L_x)$, $a=(Y_a,L_a)$. Преобразованием Ad^* можем привести матрицу L_x к виду единичной матрицы E. Из рассуждений, аналогичных представленным в доказательстве предложения 1, следует, что $B_i=0$.

Условие на P_i преобразуем следующим образом:

$$\begin{gathered} P_i - \frac{\operatorname{Tr}(P_i)}{n}E = P_{i-1}L_a^{\mathrm{T}} - \frac{\operatorname{Tr}(P_{i-1}L_a^{\mathrm{T}})}{n}E \\ \Updownarrow \\ P_i - P_{i-1}L_a^{\mathrm{T}} - \frac{\operatorname{Tr}(P_i - P_{i-1}L_a^{\mathrm{T}})}{n}E = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Решения имеют вид

$$P_i = \alpha_0 E + \alpha_1 L_a^{\mathrm{T}} + \ldots + \alpha_{i-1}(L_a^{i-1})^{\mathrm{T}}.$$

Действительно, решения уравнения $S - \big((\operatorname{Tr} S)/n\big)E = 0$ имеют вид $S = \mu E$. Уравнение (6) имеет такой вид при $S = P_i - P_{i-1}L_a^{\mathrm{T}}$, $P_0 = 0$. Решения имеют вид $P_i = \mu E + P_{i-1}L_a^{\mathrm{T}}$. Вид P_j при $j < i$ находится аналогично.

Размерность V_i равна i до момента $i = n + 1$, так как матрицы $E, L_a, L_a^2, \ldots, L_a^i$ линейно зависимы при $i \geqslant n$ и независимы при $i < n$ при условии $\operatorname{rank} L_a = n$. Это означает, что размерности V_i стабилизируются на n, из чего и следует доказываемое утверждение. $\square$

Предложение 4. *Характеристический многочлен для алгебр Ли* $\mathfrak{g} = \operatorname{sl}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^n$ *имеет вид* $(\det L_\lambda)^{n-1}$, *где* $x = (Y_x, L_x)$, $a = (Y_a, L_a)$, $y_\lambda = x + \lambda a = (Y_\lambda, L_\lambda)$ — *элементы* $\mathfrak{g}^*$. *Разложение Жордана—Кронекера пучка общего положения* $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ *для данных алгебр содержит* $n - 1$ *тривиальных жордановых блоков для каждого из* n *различных собственных значений.*

Доказательство. Найдём размерность ядра формы $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$, где λ — решение уравнения $\det L_\lambda = 0$. Уравнение $\operatorname{ad}^*_\xi y_\lambda = 0$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} BY_\lambda - Y_\lambda B + PL_\lambda^{\mathrm{T}} - \dfrac{\operatorname{Tr}(PL_\lambda^{\mathrm{T}})}{n}E = 0, \\ -B^{\mathrm{T}}L_\lambda = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Условие $\det L_\lambda = 0$ означает, что максимальный возможный ранг матрицы L_λ равен $n-1$. В этом случае преобразованием Ad^* мы можем привести L_λ к виду

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_{n-1} — единичная матрица размера $(n-1)\times(n-1)$, $l \in \mathbb{R}^{n-1}$. В этом случае матрица $PL_\lambda^{\mathrm{T}} - (\operatorname{Tr}(PL_\lambda^{\mathrm{T}})/n)E$ имеет нули на первых $n-1$ местах последнего столбца. Решением второго уравнения будут матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

где $b \in \mathbb{R}^{n-1}$. Коммутатор $[B, Y_\lambda]$ имеет нули на первых $n-1$ местах последнего столбца. Используя рассуждения, применённые выше в доказательстве предложения 1, получаем, что первое матричное уравнение системы (7) задаёт систему из $n(n-1)$ независимых линейных уравнений с n^2+n-1 неизвестными, т. е. размерность пространства решений данной системы равна $2n-1$. Пользуясь следствием 6 из [7], получаем, что собственному значению λ соответствует

$$\frac{1}{2}(\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}) - \operatorname{ind}\mathfrak{g}) = \frac{1}{2}(2n-1-1) = n-1$$

жордановых блоков. Все блоки тривиальны, так как в разложении Жордана—Кронекера пучка $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ имеется один кронекеров блок размера $2n-1$, т. е. сумма размеров жордановых блоков равна

$$\dim\mathfrak{g} - 2n + 1 = 2n^2 - 1 - 2n + 1 = 2n(n-1). \qquad \square$$

8. Случай $n = lk$

8.1. Описание регулярных и сингулярных элементов

Теорема 5. *Множество регулярных элементов алгебр Ли серий* $\mathrm{sl}(lk)\oplus(\mathbb{R}^{lk})^k$ *и* $\mathrm{gl}(lk)\oplus(\mathbb{R}^{lk})^k$ *описывается условием* $\det M \neq 0$, *где* M — *матрица, построенная способом, указанным выше* (*см. начало раздела* 5).

Доказательство разобьём на несколько предложений.

Предложение 5. *В случае* $\mathrm{sl}(lk)\oplus(\mathbb{R}^{lk})^k$ *при* $\det M \neq 0$ *размерность аннулятора минимальна.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $y=(Y,L)\in\mathfrak{g}^*$. Сначала применим к нему Ad^*-преобразование, приводящее L к виду

$$\begin{pmatrix} L' \\ 0 \end{pmatrix},$$

где L' — диагональная матрица. Затем подействуем на получившийся элемент $y'=(\tilde{Y},L')\in\mathfrak{g}^*$, где

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$$

и Y_1 — матрица размера $k\times k$, преобразованием Ad^*_g, где $g=(X,W)\in G$,

$$X = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ X_1 & X_4 \end{pmatrix}, \quad XYX^{-1}+V = \begin{pmatrix} 0 & Y_2X_4^{-1} \\ 0 & X_1Y_2X_4^{-1} - \lambda E + X_4Y_4X_4^{-1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$\operatorname{Tr}\lambda E = \operatorname{Tr} X_1Y_2^{\mathrm{T}}X_4^{-1}$, а V задано формулой (2). Легко видеть, что, выбирая $g=(X,W)$ таким образом, можно Ad^*-преобразованием привести компоненту Y элемента $y=(Y,L)\in\mathfrak{g}^*$ к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & Y_2' \\ 0 & Y_4' \end{pmatrix},$$

где $Y_2' = \begin{pmatrix} E_k & 0 \end{pmatrix}$. Из формулы (8) видно, что выражение $X_1Y_2X_4^{-1} - \lambda E + X_4Y_4X_4^{-1}$ задаёт такое же преобразование, как и $XYX^{-1}+V$, но на меньшем подпространстве размерности $n-k$. Поэтому можно выбрать матрицу X_4 специального вида (как в формуле (8), но отличного от вида матрицы X на прошлом шаге лишь размерами матриц $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_4$) и повторить этот процесс несколько раз. В результате мы приведём исходный элемент $y = (Y, L) \in \mathfrak{g}^*$ к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{k(l-2)} & 0 & L' \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & Y' & 0 \end{pmatrix},$$

где $Y' \in \mathrm{sl}(k)$, а L' — диагональная матрица.

Рассмотрим уравнение $\mathrm{ad}^*_\zeta y = 0$, где $\zeta = (B, P)$. Из общего вида оператора коприсоединённого представления (1) следует, что B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ B_{2,1} & \dots & B_{2,l} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l,1} & \dots & B_{l,l} \end{pmatrix}$$

и удовлетворяет уравнению

$$[B, Y] + PL^{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{Tr}\, PL^{\mathrm{T}}}{n} E = 0, \tag{9}$$

которое в данном случае можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{2,1} & \dots & B_{2,l-1} + B_{2,l}Y' \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & B_{l,1} & \dots & B_{l,l-1} + B_{l,l}Y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{2,1} & \dots & B_{2,l} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l,1} & \dots & B_{l,l} \\ Y'B_{l,1} & \dots & Y'B_{l,l} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} P_1 L' - \alpha E & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_l L' & 0 & -\alpha E \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда сразу видно, что $B_{i,j} = 0$ при $i \leqslant j$ и $P_i L' = B_{i+1,1} = B_{i+2,2} = \ldots = B_{l,l-i}$ при $i = 2, \ldots, l-1$. Также выполнено $Y'B_{l,1} = P_l L'$, $Y'B_{l,i} = B_{l,i-1}$ для $1 < i < l$, $B_{l,l-1} = \alpha E$. Кроме того, условия на диагонали $B_{i,i-1} - B_{i+1,i} - \alpha E = 0$ при $2 < i \leqslant l-1$ и $-B_{2,1} + P_1 L' - \alpha E = 0$ определяют все оставшиеся переменные через переменную α. □

Предложение 6. *В случае* $\mathrm{gl}(lk) \oplus (\mathbb{R}^{lk})^k$ *при* $\det M \neq 0$ *размерность аннулятора минимальна.*

Доказательство. Случай gl отличается от случая sl лишь тем, что матрицы принадлежат $\mathrm{gl}(n)$, и поэтому в уравнении (9) отсутствует слагаемое $\big((\mathrm{Tr}\, PL^{\mathrm{T}})/n\big)E$. □

Предложение 7. *В случае* $\mathrm{sl}(lk) \oplus (\mathbb{R}^{lk})^k$ *уравнение* $\det M = 0$ *задаёт множество* Sing *сингулярных элементов.*

Доказательство. Ранг матрицы M должен быть меньше максимального хотя бы на единицу. Применяя рассуждения из доказательства предложения 5, мы можем Ad^*-преобразованием привести $y=(Y,L)$ к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{k(l-2)} & 0 & L' \\ 0 & 0 & E'_k & 0 \\ 0 & 0 & Y' & 0 \end{pmatrix},$$

где $Y' \in \mathrm{sl}(k)$, L' — диагональная матрица (которую в случае gl можно считать единичной), E'_k — матрица ранга $k-1$.

Рассмотрим уравнение

$$[B,Y] + PL^{\mathrm{T}} - \frac{\operatorname{Tr} PL^{\mathrm{T}}}{n}E = 0,$$

которое в данном случае можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{2,1} & \dots & B_{2,l-1} + B_{2,l}Y' \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & B_{l,1} & \dots & B_{l,l-1} + B_{l,l}Y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{2,1} & \dots & B_{2,l} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l,1} & \dots & B_{l,l} \\ Y'B_{l,1} & \dots & Y'B_{l,l} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} P_1 - \alpha E & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_l & 0 & -\alpha E \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, выполняются условия $B_{i,j} = 0$ при $i \leqslant j$, но теперь исключается случай $B_{l,l} = 0$, а вместо этого выполняется условие $E'_k B_{l,l} = 0$. Также выполняются условия

$$P_i = B_{i+1,1} = B_{i+2,2} = \ldots = B_{l-1,l-i+1} = E'_k B_{l,l-i}$$

при $i = 2, \ldots, l-1$ и условия $Y'B_{l,1} = P_l$, $Y'B_{l,i} = B_{l,i-1}$ для $1 < i < l$ и $B_{l,l-1}E'_k + B_{l,l}Y' - Y'B_{l,l} = \alpha E$. Условия на диагонали: $B_{i,i-1} - B_{i+1,i} - \alpha E = 0$ при $2 < i \leqslant l-2$, $-B_{21} + P_1 - \alpha E = 0$ и $B_{l-1,l-2} - E'_k B_{l,l-1} = \alpha E$.

Получается система уравнений

$$\begin{cases} P_1 - E'_k B_{l,l-1} = (l-1)\alpha E, \\ E'_k B_{l,l} = 0, \\ B_{l,l-1}E'_k + B_{l,l}Y' - Y'B_{l,l} = \alpha E. \end{cases} \tag{10}$$

Матрицу E'_k можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} E_{k-1} & \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для удобства введём для матриц, входящих в систему (10), обозначения $P = P_1$, $C = B_{ll}$, $D = B_{l,l-1}$, $Y = Y'$ и каждую из них разобьём на блоки следующим образом:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3^{\mathrm{T}} & z_4 \end{pmatrix},$$

где Z_1 — матрица размера $(k-1)\times(k-1)$. При таком разбиении согласно второму уравнению системы (10) матрица C полностью определяется через свою компоненту C_3, из третьего уравнения системы выражаются D_1, D_3 и α (при этом матричное уравнение в блоке

$$\begin{pmatrix} \cdot & * \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

выражается через оставшиеся), а из первого уравнения — P_1, P_3 и p_4. Также из первого уравнения мы получаем уравнение $P_2 = D_2 + d_4\phi$, размерность пространства решений которого составляет k. Прибавив к этому числу размерность C_3, получаем, что размерность пространства решений системы (10) равна $2k-1$, что очевидно больше 1 во всех интересующих нас случаях. □

Предложение 8. *В случае* $\mathrm{gl}(n) \oplus (\mathbb{R}^{lk})^k$ *уравнение* $\det M = 0$ *задаёт множество* Sing *сингулярных элементов.*

Доказательство. Действуя так же, как и в случае $\mathrm{sl}(n)$, мы получаем систему, аналогичную (10):

$$\begin{cases} P_1 - E_k' B_{l,l-1} = 0, \\ E_k' B_{l,l} = 0, \\ B_{l,l-1} E_k' + B_{l,l} Y' - Y' B_{l,l} = 0, \end{cases}$$

где матрицы Y' и $B_{l,l}$ не обязательно имеют нулевой след. Размерность пространства решений в данном случае составляет $2k-2$. □

8.2. Неприводимость множества сингулярных элементов

В этом разделе доказываются две теоремы о свойствах многочлена $\det M$ (см. определение матрицы M после теоремы 3). Мы доказываем их для случая $Y \in \mathrm{gl}(n)$, но рассуждения в случае sl полностью аналогичны (см. замечание в конце этого раздела).

Теорема 6. *Многочлен* $\det M$ *является неприводимым степени* $kl(l+1)/2$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для случая, когда Y — диагональная матрица. Действительно, степень в таком случае та же самая, но если после ограничения на некоторое подпространство в $\mathfrak{g}^*$ многочлен имеет максимально возможную степень и неприводим, то он неприводим и на всем пространстве $\mathfrak{g}^*$. Итак, далее предполагаем, что матрица Y диагональна.

Если многочлен $\det M$ приводим, то у него есть делитель — многочлен f (не пропорциональный $\det M$). Заметим, что многочлен $\det M$ является «квазисимметричным» в следующем смысле: при перестановке столбцов матрицы L, а также при перестановке строк матрицы L и соответствующей перестановке диагональных элементов матрицы Y получится (с точностью до знака) тот же многочлен $\det M$. Поэтому многочлен $\det M$ зависит от всех элементов матрицы L (иначе он был бы нулевым). Из структуры матрицы M видно, что каждый из элементов матрицы L может входить в многочлены $\det M$ не более чем в первой степени. Значит, то же самое верно и для его делителя f. Ясно также, что если многочлен f зависит линейно от одного из элементов матрицы L, то он зависит линейно и от всех элементов матрицы L из той же строки. Иными словами, все элементы из одной строки матрицы L входят лишь в один из множителей f, на которые разлагается многочлен $\det M$. Из квазисимметричности следует, что если все элементы каких-то m строк матрицы L входят в множитель f, то многочлен $\det M$ делится также на многочлены, полученные из многочлена f заменой этих m строк на другие. Число таких многочленов равно C_{kl}^m. Случай, когда C_{kl}^m больше степени $kl(l+1)/2$ многочлена $\det M$, невозможен. Поскольку случаи $k = 1$ и $l = 1$ уже разобраны ранее (см. [7] и раздел 7), остаётся разобрать лишь следующие варианты: $m = k = l = 2$, $m = 1$, $m = 0$.

В случае $m = k = l = 2$ имеем равенство $C_{kl}^m = kl(l+1)/2$, но поскольку многочлен должен зависеть и от переменных матрицы Y, получаем противоречие.

В случае $m = 1$ получаем, что $\det M$ раскладывается в произведение скобок, каждая из которых зависит от элементов только одной строки матрицы L. Тогда в многочлене $\det M$ будут слагаемые, содержащие произведение всех элементов из одного столбца матрицы L, но это невозможно, так как столбцов в матрице M, в которых есть эти элементы, всего l.

Случай $m = 0$ означает, что $\det M$ представляется в виде произведения двух множителей, один из которых содержит все элементы L. Это означает, что существует такой многочлен f от элементов матрицы Y, что из условия $f(Y) = 0$ (при любом выборе матрицы L) следует $\det M(Y, L) = 0$. Покажем, что такой ситуации не может быть. Для этого достаточно для любого многочлена f указать такую матрицу L, что $\det M(Y, L) \neq 0$ при каких-то Y, удовлетворяющих условию $f(Y) = 0$. Рассмотрим матрицу L следующего вида: в столбце i в строках $(i-1)l+1, \ldots, (i-1)l+l$ стоят единицы, остальные элементы нулевые. Тогда рассматриваемый многочлен f должен быть произведением k определителей Вандермонда, каждый из которых зависит от своей группы диагональных элементов $y_{il+1}, \ldots, y_{il+l}$ матрицы Y. Равенство нулю этого многочлена эквивалентно равенству двух собственных значений матрицы Y (т. е. двух её диагональных элементов), причём эти элементы должны быть из одной группы $y_{il+1}, \ldots, y_{il+l}$. Но в случае совпадения таких собственных значений можно изменить матрицу L таким образом, чтобы совпадающие собственные значения входили в разные группы. □

Теорема 7. *Многочлен* $\det M_\lambda(\lambda)$, *где* M_λ — *матрица* M, *построенная по элементу* $x + \lambda a = (Y_x + \lambda Y_a, L_x + \lambda L_a)$, *имеет ровно* $kl(l+1)/2$ *различных корней.*

Доказательство. В качестве матрицы L возьмём матрицу следующего вида: в столбце i в строках $(i-1)l+l, \ldots, (i-1)l+l$ стоят различные переменные, остальные элементы нулевые; в качестве Y рассмотрим диагональную матрицу. Получим произведение k определителей Вандермонда, каждый из которых является произведением $C_l^2 = l(l-1)/2$ линейных полиномов, домноженное на произведение всех ненулевых элементов матрицы L (которых всего kl):

$$P(Y,L) = a_1 \cdot \ldots a_{kl} \cdot \prod_{1<t<k} \prod_{(t-1)l \leqslant i<j \leqslant (t-1)l+l} (y_i - y_j). \qquad \square$$

Замечание 1. При замене $Y \in \mathrm{gl}(n)$ на $Y \in \mathrm{sl}(n)$ обе доказанные выше теоремы верны: в теореме 6 конкретное разложение нигде не используется, а в теореме 7 в конкретном разложении y_{kl} можно всюду заменить на $-\sum\limits_{i=1}^{kl-1} y_i$.

8.3. Основная теорема

Теорема 8.

1. *Разложение Жордана—Кронекера пучка общего положения алгебры Ли* $\mathrm{sl}(kl) \oplus (\mathbb{R}^{kl})^k$ *содержит один кронекеров блок размера* $kl(l+1)-1$ *и* $k-1$ *тривиальных жордановых блоков для каждого из* $kl(l+1)/2$ *характеристических чисел.*
2. *Разложение Жордана—Кронекера пучка общего положения алгебры Ли* $\mathrm{gl}(kl) \oplus (\mathbb{R}^{kl})^k$ *содержит* $k-1$ *жордановых блоков для каждого из* $kl(l+1)/2$ *характеристических чисел, причём* $k-2$ *блока тривиальны, а один имеет размер* 4.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Из неприводимости $\det M$ следует, что все собственные значения имеют одинаковые кратности [7, утверждение 5]. Так как в сингулярном элементе ранг пучка падает на $2k-2$, то каждому собственному значению соответствует $k-1$ жорданов блок [7, следствие 6]. Все блоки тривиальны, так как для самой простой нетривиальной ситуации (когда для каждого собственного значения нетривиален один блок) требуется размерность больше, чем размерность рассматриваемой алгебры Ли, хотя бы на 4.

Докажем утверждение 2. Все рассуждения выше справедливы для $\mathrm{gl}(n)$, но в данном случае отсутствует кронекеров блок и размерность алгебры больше на 1, что делает возможной только ситуацию, в которой каждому собственному значению отвечают $k-2$ блока размера 2 и один блок размера 4. $\square$

Литература

[1] Болсинов А. В. Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — МГУ им. М. В. Ломоносова, 1987.

[2] Болсинов А. В., Изосимов А. М., Коняев А. Ю., Ошемков А. А. Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования // Тр. семин. по вектор. и тензор. анализу. — 2012. — Вып. 28. — С. 119—191.

[3] Воронцов А. С. Инварианты алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 8. — С. 45—62.

[4] Воронцов А. С. Кронекеровы индексы алгебры Ли и оценка степеней инвариантов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — Т. 66, № 1. — С. 26—30.

[5] Гусейнов А. Инварианты коприсоединённого представления алгебр Ли $\mathrm{so}(n) +_{\phi} +_{\phi}(\mathbb{R}^n)^k$, $\mathrm{sp}(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$, $\mathrm{gl}(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$: Диплом. работа. — МГУ им. М. В. Ломоносова, 2006.

[6] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396—415.

[7] Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transform. Groups. — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 51—86.

[8] Bolsinov A., Izosimov A., Tsonev D. Finite-dimensional integrable systems: A collection of research problems // J. Geom. Phys. — Published online 16 November 2016. — http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.11.003.

[9] Raïs M. L'indice des produits semi-directs $E \underset{\rho}{\times} \mathfrak{G}$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. — 1978. — Vol. 287, no. 4. — P. 195—197.

[10] Rosemann S., Schöbel K. Open problems in the theory of finite-dimensional integrable systems and related fields // J. Geom. Phys. — 2015. — Vol. 87. — P. 396—414.

[11] Thompson R. Pencils of complex and real symmetric and skew matrices // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 147. — P. 323—371.

[12] Vorushilov K. Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras // Lob. J. Math. — 2017. — Vol. 38, no. 6. — P. 1121—1130.