Теория шейпов

П. С. ГЕВОРКЯН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: ps.gevorkyan@mpgu.su, pgev@yandex.ru

УДК 515.12+515.14

Ключевые слова: гомотопия, обратные спектры, про-гомотопическая категория, шейповая категория, шейповый функтор, эквивариантные шейпы, Z-множество, подвижность, устойчивые пространства, шейповые ретракты, гомотопические про-группы, шейповые группы, шейповая размерность, клеточноподобные отображения, Q-многообразие.

Аннотация

Теория шейпов была открыта К. Борсуком 50 лет назад. Она, по сути, является спектральной гомотопической теорией и занимает важное место в геометрической топологии. В статье изложены основные понятия и наиболее важные, на наш взгляд, результаты теории шейпов. К сожалению, из-за нехватки места не удалось осветить много других интересных задач и результатов, связанных с теорией шейпов. Для более подробного и систематического изучения рассматриваемых в обзоре вопросов даны соответствующие ссылки и приведён достаточно подробный список литературы.

Abstract

P. S. Gevorgyan, Shape theory, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 19—84.

Shape theory was founded by K. Borsuk 50 years ago. It is essentially a spectral homotopy theory and occupies an important place in geometric topology. This paper presents the basic concepts and the most important, in our opinion, results of shape theory. Unfortunately, due to space limitation, it is not possible to cover many other interesting problems and results related to this theory. For a more detailed and systematic study of the issues considered in the review, we provide an extensive list of references at the end.

Памяти моего учителя
Юрия Михайловича Смирнова

1. Введение

Теория шейпов была открыта в 1968 г. известным польским математиком К. Борсуком. На открытии Международной конференции по топологии в Москве в 1979 г. П. С. Александров [1] в своём вступительном слове рассмотрел три периода в развитии геометрической топологии. В первом из этих

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 6, с. 19—84.

периодов он выделил выдающиеся работы Л. Э. Я. Брауэра 1909—1913 гг., М. Фреше 1907 г. и Ф. Хаусдорфа 1914 г. Второй период (1925—1943 гг.) отмечен созданием и развитием теории гомологий и когомологий (включая теоремы двойственности), созданием теории размерности и развитием теории континуумов. Начало третьего периода связывается с работами К. Борсука по теории ретрактов, а продолжение — с созданием и развитием теории шейпов (см. [3]).

Теория шейпов является спектральной формой теории гомотопий и использует теоретико-множественные, геометрические, комбинаторно-алгебраические идеи и методы топологии. Она связана с гомологиями Александрова—Чеха, а следовательно, и с алгебраической топологией. Имеются также тесные связи с бесконечномерной топологией, в частности с теорией Q-многообразий.

Известно, что фундаментальные понятия теории гомотопий применимы к пространствам с хорошим локальным строением (многообразия, полиэдры, CW-комплексы, ANR-пространства). Многие теоремы гомотопической топологии справедливы для CW-комплексов, однако не справедливы для метризуемых компактов. Например, известная теорема Уайтхеда утверждает, что отображение $f\colon X \to Y$ между CW-комплексами является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда оно индуцирует изоморфизм $\pi_n(f)\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$, $n = 1, 2, \ldots$, всех гомотопических групп. Утверждение этой теоремы не верно для произвольных метризуемых компактов. Действительно, рассмотрим так называемую *варшавскую окружность* или *квазиокружность* W, которая состоит из графика функции $y = \sin(2\pi/x)$, $0 < x \leqslant 1$, отрезка $[-1, 1]$ оси y и дуги, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$ (рис. 1). Она имеет плохую локальную структуру и не является CW-комплексом.

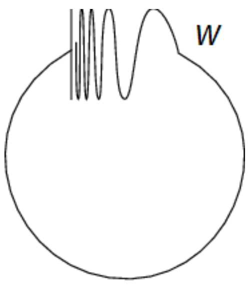

Рис. 1

Любое непрерывное отображение n-мерной сферы S^n в варшавскую окружность W гомотопно постоянному отображению, а значит, все гомотопические группы варшавской окружности тривиальны. Однако W не имеет гомотопический тип точки. Итак, постоянное отображение $f\colon W \to \{*\}$ в одноточечное пространство индуцирует изоморфизмы гомотопических групп для всех n, но не является гомотопической эквивалентностью.

Гомотопическая теория идеально применима к пространствам с хорошим локальным строением, однако плохо приспособлена к произвольным пространствам. Варшавская окружность W и обычная окружность S^1 гомотопически не эквивалентны, хотя они имеют внешнее сходство и обладают общими важными свойствами. Например, каждая из них разбивает плоскость на две части.

Гомотопическая неэквивалентность варшавской окружности и окружности S^1 объясняется отсутствием достаточного количества непрерывных отображений из S^1 в W. Эта ситуация меняется, если рассматривать непрерывные отображения из S^1 в произвольную окрестность варшавской окружности W. Таких отображений уже достаточно много. Данное наблюдение позволило К. Борсуку предложить замечательную идею исправления «недостатка» теории гомотопии для метризуемых компактов и тем самым положить начало новому направлению геометрической топологии — теории шейпов [75]. О своих результатах К. Борсук впервые рассказал на симпозиуме по бесконечномерной топологии, который проходил в Батон-Руже (Луизиана, США) с 27 марта по 1 апреля 1967 г., а затем на международном симпозиуме по топологии и её приложениям в Херцег-Нови, состоявшемся с 25 по 31 августа 1968 г. (см. [76]).

После основополагающих работ К. Борсука [74, 75, 77—85] теория шейпов стала стремительно развиваться во всём мире. Центром научных мероприятий и исследований по теории шейпов стала Варшава, где работали К. Борсук и его ученики. В США первые работы по теории шейпов принадлежат Р. Фоксу, Т. Чепмену, Дж. Сегалу и Дж. Кислингу, а в Японии К. Морите и Ю. Кодаме. В Москве исследования по теории шейпов возглавил Ю. М. Смирнов. В Загребе образовалась группа топологов, занимающихся этой теорией; ею руководил С. Мардешич. Теорией шейпов стали заниматься Ф. Бауэр и его ученики во Франкфурте, Т. Портер в Великобритании и многие другие топологи во всём мире.

Идея К. Борсука построения теории шейпов заключается в том, что метризуемые компакты вкладываются в гильбертов куб Q (можно в любой абсолютный ретракт) и вместо непрерывных отображений из X в Y рассматриваются так называемые фундаментальные последовательности $(f_n)\colon Q \to Q$, которые соответствующим образом согласованы с окрестностями метризуемых компактов X и Y (см. раздел 2).

В 1972 г. Р. Фокс [168] методом К. Борсука распространил теорию шейпов на метризуемые пространства. Для этого ему приходилось произвольное метрическое пространство X замкнуто вкладывать в некоторый абсолютный окрестностный ретракт M и для построения шейповых морфизмов применять систему окрестностей пространства X в M. Здесь важно, что все эти окрестности являются абсолютными окрестностными ретрактами для метризуемых пространств.

Геометрический метод К. Борсука неприменим в общем случае, поскольку абсолютных окрестностных ретрактов в категории всех топологических пространств слишком мало.

В 1970 г. С. Мардешич и Дж. Сегал [286,288] построили теорию шейпов для произвольных хаусдорфовых компактов методом обратных спектров. В этом им существенно помогла известная теорема о том, что произвольный хаусдорфов компакт X является пределом обратного спектра $\mathbf{X} = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, состоящего из компактных ANR-пространств X_α.

В 1975 г. К. Морита [310] методом обратных ANR-спектров распространил теорию шейпов на произвольные топологические пространства. Это удалось сделать благодаря «чеховскому» функтору $\check{C}$, который каждому топологическому пространству X ставит в соответствие обратный спектр $\check{C}(X)$ из нервов X_α нормальных локально конечных открытых покрытий α с естественными проекциями, порождёнными вписыванием покрытий. К. Морита ввёл понятие *ассоциированного обратного ANR-спектра* и доказал, что для произвольного топологического пространства X обратный ANR-спектр $\check{C}(X)$ ассоциирован с X. Более того, все обратные ANR-спектры, ассоциированные с пространством X, изоморфны друг другу и, в частности, спектру $\check{C}(X)$.

Спектральный метод построения теории шейпов оказался универсальным. К. Борсук [75], по существу, с каждым метризуемым компактом X ассоциировал счётный ANR-спектр его окрестностей при некотором вложении $X \subset M$ в абсолютный ретракт M. Так как ANR-спектр, полученный из системы всех окрестностей замкнутого подмножества X абсолютного окрестностного ретракта N класса метризуемых пространств, ассоциирован с X, то Р. Фокс [168], по сути, тоже рассматривал ассоциированные с метризуемым пространством обратные ANR-спектры. Наконец, если хаусдорфов компакт X является пределом обратного спектра $\mathbf{X} = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, состоящего из компактных ANR-пространств X_α, $X = \varprojlim\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, то ANR-спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ гомотопической категории H-CW ассоциирован с компактом X. Это позволило С. Мардешичу и Дж. Сегалу [286, 288] построить теорию шейпов для произвольных хаусдорфовых компактов.

В 1973 г. короткое категорное определение теории шейпов было дано С. Мардешичем [272]. Объектами шейповой категории Sh-Top являются топологические пространства, а морфизмами $F\colon X \to Y$ — отображения, которые каждому гомотопическому классу $\boldsymbol{\psi}\colon Y \to P$ в ANR-пространство P ставят в соответствие такой гомотопический класс $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to P$, что для любого ANR-пространства P' и любых гомотопических классов $\boldsymbol{\psi}'\colon Y \to P'$ и $\mathbf{q}\colon P' \to P$, удовлетворяющих равенству $\mathbf{q}\boldsymbol{\psi}' = \boldsymbol{\psi}$, выполняется соответствующее равенство $\mathbf{q}\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi}$.

Шейповый функтор $S\colon$ H-Top $\to$ Sh-Top удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $S(X) = X$ для произвольного топологического пространства X;
2) для каждого шейпового морфизма $F\colon X \to Q$ в ANR-пространство Q существует единственный гомотопический класс $\mathbf{f}\colon X \to Q$, такой что $S(\mathbf{f}) = F$.

Эти условия обладают свойством универсальности, и их естественно назвать *аксиомами теории шейпов*. Первую аксиоматику теории шейпов для класса всех метризуемых компактов дал В. Голштыньский [211]. В общем случае аксиоматическую характеризацию теории шейпов дал С. Мардешич [272].

Отметим, что для метризуемых компактов все способы построения теории шейпов эквивалентны борсуковскому. Однако в классе всех метризуемых пространств теории шейпов К. Борсука [80], Р. Фокса [168] и Ф. Бауэра [62] попарно различны. Таким образом, существуют различные теории шейпов, подобно тому как в алгебраической топологии имеют право на существование различные теории гомологии и когомологий.

Шейповая категория более слабая, чем гомотопическая категория. Она является не обобщением, а естественным исправлением или расширением гомотопической категории, поскольку шейповый функтор $S\colon \text{H-Top} \to \text{Sh-Top}$ является изоморфизмом на подкатегории H-CW всех пространств, имеющих гомотопический тип ANR-пространств. Итак, для класса пространств, имеющих гомотопический тип полиэдра, куда входят все CW-комплексы и ANR-пространства, теория шейпов совпадает с гомотопической теорией. Варшавская окружность и окружность S^1 являются примерами метризуемых компактов, которые имеют различные гомотопические типы, но шейпово эквивалентны.

Теория шейпов, по сути, является спектральной гомотопической теорией, поскольку в её основе лежит идея замены сингулярного начала на аппроксимационное, потому она тесно связана со спектральными гомологиями Александрова—Чеха. Она рассчитана на пространства с плохой локальной структурой, которые всё чаще и чаще встречаются в самых различных областях математики, а также возникают в результате применения многих топологических конструкций, например при изучении расслоений, клеточноподобных отображений, множеств неподвижных точек, аттракторов динамических систем, спектров линейных операторов, наростов бикомпактных расширений, границы групп и т. д.

Идеи и задачи, тесно связанные с теорией шейпов, были известны задолго до выхода в свет первых работ К. Борсука [75, 76] о построении категории шейпов метризуемых компактов. Ещё в 1895 г. А. Пуанкаре в своей знаменитой работе «Analysis situs» [327] заложил основы алгебраической топологии и ввёл важные понятия цепи, цикла, границы, числа Бетти, отношения гомологичности циклов и др. В этой работе А. Пуанкаре предположил, но не доказал, что числа Бетти являются топологическими инвариантами. Первое строгое доказательство этого факта было дано Дж. Александером [40] в 1915 г., что поставило на твёрдую математическую основу интуитивные идеи Пуанкаре. В 1922 г. О. Веблен [387] доказал топологическую инвариантность сингулярных гомологий. Идея применения сингулярных гомологий заключается в рассмотрении семейства непрерывных отображений из полиэдра P в топологическое пространство X. Та же самая идея лежит в основе теории гомотопий, поскольку гомотопическая группа $\pi_n(X, *)$ определяется с помощью непрерывных отображений n-мерной сферы S^n в пунктированное пространство $(X, *)$. Однако эта идея перестаёт быть удовлетворительной для пространств с плохой локальной структурой. Этим объясняется, почему в основе теории шейпов лежит двойственная идея, которая состоит в рассмотрении семейства непрерывных отображений топологического пространства X в полиэдр P. Этот подход впервые был применён П. С. Александровым для определения обратного спектра пространств [42,44], а также для введения понятия нерва покрытия топологического пространства [43]. Итак, справедливо можно считать, что зачатки теории шейпов были заложены в работах П. С. Александрова [42, 44], Л. Вьеториса [391] и Э. Чеха [98], где в различных формах были введены чеховские гомологии.

Теория шейпов связана со многими разделами топологии, а её идеи и результаты оказываются важными и полезными для этих разделов. Из-за ограниченности места мы не смогли упомянуть и осветить все интересные задачи и замечательные результаты, связанные с теорией шейпов. Тем не менее мы постарались затронуть наиболее важные моменты теории шейпов за последние 50 лет.

Отметим, что по теории шейпов имеется довольно большой список работ (см. библиографию), среди них монография К. Борсука [10], книги С. Мардешича и Дж. Сегала [289], Е. Дыдака и Дж. Сегала [148], обзорные статьи Ю. М. Смирнова [25], К. Борсука и Е. Дыдака [86], С. Мардешича [279, 280].

2. Основные конструкции теории шейпов

2.1. Шейповая категория метризуемых компактов (метод К. Борсука)

Основной идеей К. Борсука построения шейповой категории метризуемых компактов является замена класса непрерывных отображений некоторым более широким классом морфизмов и введение понятия гомотопии между такими морфизмами.

Пусть X и Y — метризуемые компакты, лежащие в AR-пространствах M и N соответственно.

Определение 1. Последовательность отображений $f_n\colon M \to N$, $n \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной последовательностью из X в Y* (обозначается $(f_n)_{MN}\colon X \to Y$), если для произвольной окрестности V компакта Y в N существуют такая окрестность U компакта X в M и такое натуральное число $n_V \in \mathbb{N}$, что, во-первых, $f_n(U) \subset V$ для всех $n \geqslant n_V$ и, во-вторых,

$$f_n|U \simeq f_m|U$$

в V для всех $n, m \geqslant n_V$.

Фундаментальная последовательность

$$(1_n)_{MM}\colon X \to X,$$

где

$$1_n = 1_M\colon M \to M\,—$$

тождественное отображение для всех $n \in \mathbb{N}$, называется *тождественной фундаментальной последовательностью*. Композиция фундаментальных последовательностей $(f_n)_{MN}\colon X \to Y$ и $(g_n)_{NP}\colon Y \to Z$, где Z — метризуемый компакт, лежащий в AR-пространстве P, определяется формулой

$$(g_n)(f_n) = (g_n f_n).$$

Ясно, что композиция $(g_n f_n)_{MP}\colon X \to Z$ является фундаментальной последовательностью и удовлетворяет свойству ассоциативности.

Понятие гомотопии естественно распространяется на фундаментальные последовательности.

Определение 2. Две фундаментальные последовательности $(f_n)_{MN}\colon X \to Y$ и $(f'_n)_{MN}\colon X \to Y$ называются *гомотопными*, если для произвольной окрестности V компакта Y в N существуют такая окрестность U компакта X в M и такое натуральное число $n_V \in \mathbb{N}$, что

$$f_n|U \simeq f'_n|U$$

в V для всех $n \geqslant n_V$. В этом случае пишут $(f_n) \simeq (f'_n)$.

Это отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Класс эквивалентности фундаментальной последовательности $(f_n)_{MN}\colon X \to Y$ называется *фундаментальным классом* и обозначается через $[(f_n)]$. Несложно заметить, что если $(f_n) \simeq (f'_n)$ и $(g_n) \simeq (g'_n)$, то $g_n f_n \simeq g'_n f'_n$. Следовательно, можно определить композицию фундаментальных классов $[(f_n)]$ и $[(g_n)]$ формулой

$$[(g_n)][(f_n)] = [(g_n)(f_n)].$$

Очевидно, что эта композиция ассоциативна и выполняется равенство $[(f_n)][(1_n)] = [(1_n)][(f_n)] = [(f_n)]$.

Таким образом, мы получаем так называемую *фундаментальную категорию*, объектами которой являются всевозможные пары (X, M), где M — некоторое AR-пространство, а X — метризуемый компакт, лежащий в M, а морфизмами являются классы фундаментальных последовательностей. Изоморфные объекты этой категории называются *фундаментально эквивалентными*. Иначе говоря, пары (X, M) и (Y, N) фундаментально эквивалентны, если существуют такие фундаментальные последовательности $(f_n)_{MN}\colon X \to Y$ и $(g_n)_{NM}\colon Y \to X$, что $[(g_n)][(f_n)] = [(1_n)_{MM}]$ и $[(f_n)][(g_n)] = [(1_n)_{NN}]$.

Фундаментальная последовательность $(f_n)_{MN}\colon X \to Y$ называется *порождённой отображением* $f\colon X \to Y$, если $f_n|X = f$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что для произвольного отображения $f\colon X \to Y$ существует порождённая им фундаментальная последовательность $(f_n)_{MN}\colon X \to Y$. Действительно, так как N является AR-пространством, то существует продолжение $\tilde{f}\colon M \to N$ отображения $f\colon X \to Y$. Полагая $f_n = \tilde{f}$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, мы получаем фундаментальную последовательность, порождённую отображением f.

Следующая теорема показывает, что фундаментальный класс фундаментальной последовательности $(f_n)_{MN}\colon X \to Y$, порождённой отображением $f\colon X \to Y$, зависит только от гомотопического класса этого отображения.

Теорема 1. *Пусть фундаментальные последовательности $(f_n)_{MN}\colon X\to Y$ и $(f'_n)_{MN}\colon X\to Y$ порождены отображениями $f\colon X\to Y$ и $f'\colon X\to Y$ соответственно. Тогда если $f\simeq f'$, то $(f_n)\simeq(f'_n)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную окрестность V компакта Y в N. По определению 1 существуют такая окрестность U_1 компакта X в M и такое натуральное число $n'_V\in\mathbb{N}$, что $f_n|U_1\simeq f_m|U_1$ в V для всех $n,m\geqslant n'_V$. Точно так же существуют такая окрестность U_2 компакта X в M и такое натуральное число $n''_V\in\mathbb{N}$, что $f'_n|U_2\simeq f'_m|U_2$ в V для всех $n,m\geqslant n''_V$. Положим $\tilde U=U_1\cap U_2$ и $n_V=\max\{n'_V,n''_V\}$. Ясно, что

$$f_n|\tilde U\simeq f_m|\tilde U \quad \text{и} \quad f'_n|\tilde U\simeq f'_m|\tilde U \tag{1}$$

в V для всех $n,m\geqslant n_V$.

Теперь рассмотрим отображения $f_{n_V},f'_{n_V}\colon \tilde U\to V$. По условию теоремы $f_{n_V}|X=f$, $f'_{n_V}|X=f'$ и $f\simeq f'$. Пусть $F\colon X\times I\to Y$ — гомотопия, связывающая отображения f и f'. Так как V является ANR-пространством, то существуют такая окрестность U компакта X в M, $U\subset\tilde U$, и гомотопия $\tilde F\colon U\times I\to V$, связывающая отображения $f_{n_V}|U$ и $f'_{n_V}|U$, что $\tilde F|X\times I=F$ (см. [289, теорема 8, с. 40]). Итак,

$$f_{n_V}|U\simeq f'_{n_V}|U. \tag{2}$$

Осталось заметить, что

$$f_n|U\simeq f'_n|U$$

в V для всех $n\geqslant n_V$. Это следует из (1) и (2). □

Следствие 1. *Пусть $(f_n)_{MN}\colon X\to Y$ и $(f'_n)_{MN}\colon X\to Y$ — фундаментальные последовательности, порождённые отображением $f\colon X\to Y$. Тогда $(f_n)\simeq(f'_n)$.*

Из этого следствия, в частности, вытекает, что все фундаментальные последовательности $(i_n)_{MM}\colon X\to X$, порождённые отображением $1_X\colon X\to X$, гомотопны тождественной фундаментальной последовательности $(1_n)_{MM}\colon X\to X$.

Справедлива следующая важная теорема, которая показывает, что отношение фундаментальной эквивалентности имеет абсолютный характер и не зависит от выбора AR-пространств, в которые вкладываются метризуемые компакты.

Теорема 2. *Пусть $X\subset M\cap M'$. Тогда пары (X,M) и (X,M') фундаментально эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальные последовательности

$$(i_n)_{MM'}\colon X\to X,\quad (i_n)_{M'M}\colon X\to X,$$

порождённые тождественным отображением $1_X\colon X\to X$. Очевидно, что композиции $(i_n)_{M'M}(i_n)_{MM'}$ и $(i_n)_{MM'}(i_n)_{M'M}$ также порождены тождественным отображением $1_X\colon X\to X$, а значит, согласно следствию 1 гомотопны тождественным фундаментальным последовательностям $(1_n)_{MM}$ и $(1_n)_{M'M'}$ соответственно. Таким образом,

$$[(i_n)_{M'M}][(i_n)_{MM'}] = [(1_n)_{MM}], \quad [(i_n)_{MM'}][(i_n)_{M'M}] = [(1_n)_{M'M'}],$$

т. е. (X, M) и (X, M') фундаментально эквивалентны. □

Замечание 1. Так как каждый метризуемый компакт X гомеоморфен некоторому компакту, лежащему в гильбертовом кубе Q, то для построения фундаментальной категории можно было ограничиться парами вида (X, Q).

Категория, объектами которой являются метризуемые компакты, а морфизмами — классы фундаментальных последовательностей между ними, называется *шейповой категорией* метризуемых компактов. Обозначим её через $\mathrm{Sh(CM)}$. Поскольку отношение фундаментальной эквивалентности является отношением эквивалентности, то класс всех метризуемых компактов распадается на попарно не пересекающиеся классы пространств, которые называются *шейпами*. Шейп, содержащий пространство X, называется *шейпом пространства* X и обозначается через $\mathrm{sh}(X)$. Два компакта X и Y называются *шейпово эквивалентными* или имеют один и тот же шейп, $\mathrm{sh}(X) = \mathrm{sh}(Y)$, если они фундаментально эквивалентны.

2.2. Спектральный метод построения теории шейпов (метод Мардешича—Мориты [272, 310])

Чтобы определить шейповую категорию произвольных топологических пространств, нужна так называемая гомотопическая категория pro-H-TOP, введённая А. Гротендиком [196]. Объектами этой категории являются обратные спектры $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ гомотопической категории топологических пространств H-Top. Морфизмы категории pro-H-TOP определяются в два шага. Сначала определяется морфизм $(\mathbf{f}_\beta, \varphi)\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y} = \{Y_\beta, \mathbf{q}_{\beta\beta'}, B\}$ между обратными спектрами как пара отображений $\varphi\colon B \to A$ и $\mathbf{f}_\beta\colon X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta$, удовлетворяющих условию

(∗) для произвольных $\beta, \beta' \in B$, $\beta' \geqslant \beta$, существует такой индекс $\alpha \geqslant \varphi(\beta), \varphi(\beta')$, что $\mathbf{f}_\beta \mathbf{p}_{\varphi(\beta)\alpha} = \mathbf{q}_{\beta\beta'} \mathbf{f}_{\beta'} \mathbf{p}_{\varphi(\beta')\alpha}$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& X_\alpha \arrow[dl, "\mathbf{p}_{\varphi(\beta)\alpha}"'] \arrow[dr, "\mathbf{p}_{\varphi(\beta')\alpha}"] & \\
X_{\varphi(\beta)} \arrow[d, "\mathbf{f}_\beta"'] & & X_{\varphi(\beta')} \arrow[d, "\mathbf{f}_{\beta'}"] \\
Y_\beta & & Y_{\beta'} \arrow[ll, "\mathbf{q}_{\beta\beta'}"]
\end{tikzcd} .$$

Далее вводится понятие эквивалентных морфизмов. Морфизмы $(\mathbf{f}_\beta, \varphi)$ и $(\mathbf{g}_\beta, \psi)$ из обратного спектра $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ в обратный спектр $\mathbf{Y} = \{Y_\beta, \mathbf{q}_{\beta\beta'}, B\}$ называются *эквивалентными*, если выполняется условие

(**) для произвольного $\beta \in B$ существует такой индекс $\alpha \geqslant \varphi(\beta), \psi(\beta)$, что $\mathbf{f}_\beta \mathbf{p}_{\varphi(\beta)\alpha} = \mathbf{g}_\beta \mathbf{p}_{\psi(\beta)\alpha}$, т. е. коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
 & X_\alpha \arrow[dl, "\mathbf{p}_{\varphi(\beta)\alpha}"'] \arrow[dr, "\mathbf{p}_{\psi(\beta)\alpha}"] & \\
X_{\varphi(\beta)} \arrow[dr, "\mathbf{f}_\beta"'] & & X_{\psi(\beta)} \arrow[dl, "\mathbf{g}_\beta"] \\
 & Y_\beta &
\end{tikzcd} .
$$

Это отношение и в самом деле является отношением эквивалентности. Таким образом, множество всех морфизмов из обратного спектра $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ в обратный спектр $\mathbf{Y} = \{Y_\beta, \mathbf{q}_{\beta\beta'}, B\}$ распадается на классы эквивалентности $[(\mathbf{f}_\beta, \varphi)]$, которые и являются морфизмами $\mathbf{f}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ про-гомотопической категории pro-H-TOP. Композиция двух морфизмов $\mathbf{f}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ и $\mathbf{g}\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{Z} = \{Z_\gamma, \mathbf{r}_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$ определяется с помощью их представителей $\mathbf{f} = [(\mathbf{f}_\beta, \varphi)]$ и $\mathbf{g} = [(\mathbf{g}_\gamma, \psi)]$ формулой $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = [(\mathbf{g}_\gamma \circ \mathbf{f}_{\psi(\gamma)}, \varphi \circ \psi)]$.

Замечание 2. Отметим, что морфизмы между обратными спектрами $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_\beta, \mathbf{q}_{\beta\beta'}, B\}$ в про-гомотопической категория pro-H-TOP можно было задать коротко следующей формулой Гротендика [196]:

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \varprojlim_{\beta} \varinjlim_{\alpha} [X_\alpha, Y_\beta],$$

где $[X_\alpha, Y_\beta]$ — гомотопические классы отображений.

Для построения теории шейпов особый интерес представляет про-гомотопическая категория pro-H-CW обратных спектров полной подкатегории H-CW категории H-Top. Следующий хорошо известный результат даёт важную характеризацию пространств категории H-CW (см. [289, гл. I, § 4.1, теорема 1]).

Лемма 1. *Для топологического пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

а) *X имеет гомотопический тип CW-комплекса*;

б) *X имеет гомотопический тип симплициального комплекса в метрической топологии*;

в) *X имеет гомотопический тип ANR-пространства* (*класса метризуемых пространств*).

Учитывая эту лемму, можно сказать, что H-CW — это гомотопическая категория пространств, имеющих гомотопический тип ANR-пространств. В дальнейшем мы будем придерживаться этого подхода, поскольку для теории шейпов нужны лишь свойства, которыми обладают ANR-пространства, а обратные спектры категории pro-H-CW будем называть *ANR-спектрами*.

Важным шагом в построении теории шейпов для класса всех топологических пространств является введённое К. Моритой [310] понятие ассоциированного ANR-спектра.

Определение 3 (К. Морита [310]). Обратный ANR-спектр $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ называется *ассоциированным с топологическим пространством* X, если для каждого $\alpha \in A$ существует такой гомотопический класс $\mathbf{p}_\alpha \colon X \to X_\alpha$, что выполняются следующие условия:

(i) $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{p}_{\alpha'}$ для всех $\alpha \leqslant \alpha'$;

(ii) для произвольного ANR-пространства P и произвольного гомотопического класса $\mathbf{f} \colon X \to P$ существуют индекс $\alpha \in A$ и гомотопический класс $\mathbf{h}_\alpha \colon X_\alpha \to P$, такие что $\mathbf{h}_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{f}$;

(iii) если $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{p}_\alpha = \boldsymbol{\psi}\mathbf{p}_\alpha$ для двух гомотопических классов $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \colon X_\alpha \to P$, то существует такой индекс $\alpha' \geqslant \alpha$, что $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{p}_{\alpha\alpha'} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{p}_{\alpha\alpha'}$.

Теорема 3 (К. Морита [310]). *Для произвольного топологического пространства X существует ассоциированный с ним обратный ANR-спектр.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in A$, — множество всех нормальных локально конечных открытых покрытий пространства X. Если покрытие $\mathcal{U}_{\alpha'}$ вписано в $\mathcal{U}_\alpha$, то мы пишем $\alpha' > \alpha$. Пусть X_α — нерв покрытия $\mathcal{U}_\alpha$, который является симплициальным комплексом со слабой топологией. Для произвольного $\alpha \in A$ рассмотрим непрерывное отображение $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$, удовлетворяющее условию

$$p_\alpha^{-1}\big(\mathrm{St}(u, X_\alpha)\big) \subset U,$$

где u — вершина X_α, соответствующая элементу U покрытия $\mathcal{U}_\alpha$. Это отображение называется *каноническим отображением*. Все канонические отображения гомотопны друг другу. Если $\alpha' > \alpha$, то существует такое симплициальное отображение $p_{\alpha\alpha'} \colon X_{\alpha'} \to X_\alpha$, что из $p_{\alpha\alpha'}(u) = v$ следует $U \subset V$, где u и v — вершины симплициальных комплексов X_α и $X_{\alpha'}$, соответствующие элементам U и V покрытий $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{U}_{\alpha'}$ соответственно. Отображение $p_{\alpha\alpha'}$ называется *канонической проекцией*. Любые две канонические проекции гомотопны друг другу. Более того,

$$\mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{p}_{\alpha'} = \mathbf{p}_\alpha$$

для всех $\alpha, \alpha' \in A$, $\alpha > \alpha'$.

Полученный обратный ANR-спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ ассоциирован с пространством X. $\square$

Для различных пространств ассоциированные обратные ANR-спектры можно построить разными способами. Например, произвольный хаусдорфов компакт X является пределом обратного спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, состоящего из компактных ANR-пространств X_α: $X = \varprojlim\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$. Оказывается, что тогда обратный ANR-спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ ассоциирован с пространством X. Однако важно, что все ассоциированные с одним и тем же пространством X обратные ANR-спектры эквивалентны в категории pro-H-CW.

Итак, каждому топологическому пространству X ставится в соответствие некоторый обратный ANR-спектр $S(X)$ категории pro-H-CW. Более того, это соответствие естественным и единственным образом продолжается на морфизмы категории H-Top, т. е. каждому гомотопическому классу $\mathbf{f} \colon X \to Y$ ставится в соответствие морфизм $S(\mathbf{f})\colon S(X) \to S(Y)$ категории pro-H-CW. Тем самым получается функтор $S\colon$ H-Top $\to$ pro-H-CW, который и называется *шейповым функтором*.

Шейповый функтор S позволяет естественным образом определить *шейповую категорию* Sh-Top для класса всех топологических пространств. Объектами категории Sh-Top являются объекты категории H-Top, т. е. топологические пространства, а морфизмами — морфизмы категории pro-H-CW: $S(X,Y) = \mathrm{MOR}\big(S(X), S(Y)\big)$. Шейповая классификация пространств слабее гомотопической, но на классе H-CW обе классификации совпадают. В классе всех метризуемых компактов теория шейпов Мардешича—Мориты совпадает с борсуковской.

Теорию шейпов можно определить, не прибегая к ассоциированным обратным спектрам (см. [272]). Для этого каждому топологическому пространству X ставится в соответствие некоторая категория W^X, объектами которой являются гомотопические классы $\mathbf{f}\colon X \to P$, $P \in$ H-CW, а морфизмами — $\mathbf{u}\colon \mathbf{f} \to \mathbf{f}'$, где $\mathbf{f}'\colon X \to P'$, $P' \in$ H-CW, — такие гомотопические классы $\mathbf{u}\colon P \to P'$, что $\mathbf{uf} = \mathbf{f}'$. Заметим, что единичным морфизмом $1_{\mathbf{f}}\colon \mathbf{f} \to \mathbf{f}$ является гомотопический класс $\mathbf{1}_P\colon P \to P$, а композициями морфизмов в категории W^X являются композиции соответствующих гомотопических классов категории H-CW. Теперь шейповые морфизмы $F\colon X \to Y$ определяются как ковариантные функторы $F\colon W^Y \to W^X$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

1) если $\mathbf{g} \in W^Y$, $\mathbf{g}\colon Y \to P$, то $F(\mathbf{g}) = \mathbf{f} \in W^X$, где $\mathbf{f}\colon X \to P$;
2) если $\mathbf{u}\colon \mathbf{g} \to \mathbf{g}'$ — морфизм, заданный гомотопическим классом $\mathbf{u}\colon P \to P'$, то морфизм $F(\mathbf{u})\colon F(\mathbf{g}) \to F(\mathbf{g}')$ также задан гомотопическим классом $\mathbf{u}\colon P \to P'$.

Применяя такой подход определения шейповой категории, несложно доказать следующий критерий шейповой эквивалентности непрерывного отображения.

Теорема 4. *Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ является шейповой эквивалентностью тогда и только тогда, когда для произвольного ANR-пространства P индуцированное отображение $f^*\colon [Y,P] \to [X,P]$ является взаимно-однозначным.*

Здесь через $[Y,P]$ мы обозначили множество гомотопических классов $\mathbf{g}\colon Y \to P$, а через f^* — отображение, ставящее в соответствие каждому $\mathbf{g}\colon Y \to P$ гомотопический класс $f^*(\mathbf{g}) = \mathbf{gf} \in [X,P]$.

2.3. Эквивариантная теория шейпов

Для построения категории шейпов для G-пространств (непрерывных групп преобразований с фиксированной действующей группой G) существует много различных способов. Ю. М. Смирнов [24,26] методом Борсука—Фокса [10,168] построил теорию шейпов для категорий метризуемых G-пространств и компактных G-пространств в случае компактной действующей группы G. И. Поп [330] и Т. Матумото [293] независимо построили эквивариантную теорию шейпов для произвольных G-пространств в случае конечной группы G, а С. А. Антонян с С. Мардешичем [52] и П. С. Геворкян [185] — в случае компактной группы G. В случае произвольной действующей группы G категорию шейпов для любых G-пространств построил З. Черин [101] с помощью G-гомотопических классов семейств многозначных отображений.

В [185] эквивариантная теория шейпов строится методом, основанным на применении всех инвариантных непрерывных псевдометрик данного G-пространства. Пусть X — произвольное G-пространство, а μ — некоторая инвариантная непрерывная псевдометрика на X. Определим отношение эквивалентности на X: $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда $\mu(x,x') = 0$. Соответствующее фактор-пространство $X|_\sim$ обозначим через X_μ, а класс эквивалентности элемента $x \in X$ — через $[x]_\mu$. Фактор-пространство X_μ является G-пространством с действием $g[x]_\mu = [gx]_\mu$, причём $\rho([x]_\mu, [x']_\mu) = \mu(x,x')$ — инвариантная метрика на X_μ. Заметим также, что фактор-отображение $p_\mu\colon X \to X_\mu$, заданное формулой $p_\mu(x) = [x]_\mu$, является непрерывным и эквивариантным. Итак, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Фактор-пространство X_μ является инвариантно метризуемым G-пространством, а фактор-отображение $p_\mu\colon X \to X_\mu$ — непрерывным эквивариантным отображением.*

Следующая теорема позволяет построить эквивариантную теорию шейпов (см. [185]) для класса всех G-пространств в случае компактной группы G методом обратных спектров Мардешича—Мориты.

Теорема 5. *Для произвольного G-пространства X существует ассоциированный с ним обратный спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ эквивариантной гомотопической категории* H-G-ANR.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{P}$ всех инвариантных псевдометрик G-пространства X. На этом семействе введём естественный порядок следующим образом: $\mu \leqslant \mu'$, если $\mu(x,x') \leqslant \mu'(x,x')$, $x, x' \in X$.

Для произвольных псевдометрик $\mu, \mu' \in \mathcal{P}$, $\mu \leqslant \mu'$, определим отображение $p_{\mu\mu'}\colon X_{\mu'} \to X_\mu$ формулой $p_{\mu\mu'}([x]_{\mu'}) = [x]_\mu$, где $[x]_{\mu'} \in X_{\mu'}$, $[x]_\mu \in X_\mu$. Это определение корректное, поскольку не зависит от выбора представителя класса $[x]_{\mu'}$. Действительно, пусть $[x]_{\mu'} = [x']_{\mu'}$, т. е. $\mu'(x,x') = 0$. Тогда $\mu(x,x') \leqslant \mu'(x,x') = 0$, или $\mu(x,x') = 0$. А это значит, что $[x]_\mu = [x']_\mu$, т. е. $p_{\mu\mu'}([x]_{\mu'}) = p_{\mu\mu'}([x']_{\mu'})$. Несложно проверить, что отображение $p_{\mu\mu'}\colon X_{\mu'} \to X_\mu$ удовлетворяет условиям $p_{\mu\mu'} p_{\mu'} = p_\mu$ и $p_{\mu\mu'} p_{\mu'\mu''} = p_{\mu\mu''}$, для произвольных $\mu, \mu', \mu'' \in \mathcal{P}$, $\mu \leqslant \mu' \leqslant \mu''$.

Итак, $\{X_\mu, p_{\mu\mu'}\}$ — обратная система инвариантно метризуемых G-пространств. G-пространство X_μ замкнуто, изометрически и эквивариантно вкладывается в некоторое нормированное G-пространство $M(X_\mu)$, а эквивариантные отображения $p_{\mu\mu'}\colon X_{\mu'} \to X_\mu$ продолжаются до эквивариантных отображений $\bar{p}_{\mu\mu'}\colon M(X_{\mu'}) \to M(X_\mu)$, которые удовлетворяют равенству $\bar{p}_{\mu\mu'} \bar{p}_{\mu'\mu''} = \bar{p}_{\mu\mu''}$

(см. [190]). Тем самым получаем обратную систему $\{M(X_\mu), \bar{p}_{\mu\mu'}\}$ нормированных G-пространств.

Пусть A — множество всех пар (μ, U), где $\mu \in \mathcal{P}$, U — открытая инвариантная окрестность метризуемого G-пространства X_μ в нормированном G-пространстве $M(X_\mu)$. На множестве A определим естественный порядок следующим образом: если $\alpha = (\mu, U)$, $\alpha' = (\mu', U')$, то $\alpha \leqslant \alpha'$ тогда и только тогда, когда $\mu \leqslant \mu'$ и $\bar{p}_{\mu\mu'}(U') \subset U$. Теперь положим $X_\alpha = U$ и определим эквивариантное отображение $p_{\alpha\alpha'}\colon X_{\alpha'} \to X_\alpha$ формулой $p_{\alpha\alpha'} = \bar{p}_{\mu\mu'}|_{U'}\colon U' \to U$. Заметим, что в случае $\mu = \mu'$ имеем $\bar{p}_{\mu\mu'} = \mathrm{id}\colon M(X_\mu) \to M(X_\mu)$, следовательно, $p_{\alpha\alpha'} = i\colon U' \hookrightarrow U$.

Таким образом, мы построили обратный спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ категории H-G-ANR. Докажем, что он эквивариантно ассоциирован с G-пространством X.

Для каждого $\alpha = (\mu, U) \in A$ определим эквивариантное отображение $p_\alpha\colon X \to X_\alpha = U$ формулой $p_\alpha = ip_\mu$, где $p_\mu\colon X \to X_\mu$ — фактор-отображение, а $i\colon X_\mu \to U$ — вложение. Несложно заметить, что $p_\alpha = p_{\alpha\alpha'}p_{\alpha'}$ при $\alpha \leqslant \alpha'$.

Пусть теперь $f\colon X \to Q$ — непрерывное эквивариантное отображение, где Q — произвольное G-ANR-пространство. Рассмотрим инвариантную метрику ρ пространства Q, существование которой следует из компактности группы G. На X определим непрерывную инвариантную псевдометрику μ формулой $\mu(x, x') = \rho\big(f(x), f(x')\big)$. Заметим, что отображение $\varphi\colon X_\mu \to Q$, заданное формулой $\varphi([x]_\mu) = f(x)$, является эквиморфизмом G-пространств X_μ и $f(X)$, удовлетворяющим равенству $\varphi p_\mu = f$. Так как X_μ — замкнутое инвариантное подмножество нормированного G-пространства $M(X_\mu)$, а Q — G-ANR-пространство, то существует эквивариантное продолжение $h\colon U \to Q$ отображения $\varphi\colon X_\mu \to Q$, где U — некоторая инвариантная окрестность X_μ в $M(X_\mu)$. Иначе говоря, $h|_{X_\mu} = \varphi$, или $hi = \varphi$.

Рассмотрим произвольный индекс $\alpha = (\mu, U) \in A$. Тогда $X_\alpha = U$, $p_\alpha = ip_\mu$ и выполняется равенство $hp_\alpha = f$. В самом деле, $hp_\alpha = hip_\mu = \varphi p_\mu = f$. Теперь предположим, что $h_0, h_1\colon X_\alpha \to Q$ — такие эквивариантные отображения в G-ANR-пространство Q, что $h_0p_\alpha \simeq_G h_1p_\alpha$. Так как $X_\alpha = U$, а $p_\alpha = ip_\mu$, то эквивариантные отображения $h_0|_{X_\mu}$ и $h_1|_{X_\mu}$ эквивариантно гомотопны. Следовательно, существует такая инвариантная окрестность $V \subset U$ замкнутого инвариантного подмножества X_μ, что $h_0|_V$ и $h_1|_V$ также эквивариантно гомотопны. А это значит, что $h_0p_{\alpha\alpha'} \simeq_G h_1p_{\alpha\alpha'}$, где $\alpha' = (\mu, V)$. □

3. Шейповая классификация пространств

Как и всякая категория, шейповая категория порождает классификацию всех своих объектов — шейповую классификацию топологических пространств. В первую очередь интересно иметь такие классы пространств, в пределах которых шейповая и гомотопическая классификации совпадают. Одним из таких классов является класс ANR-пространств. Однако есть и другие классы, для которых шейповая классификация совпадает даже с топологической. Например, класс всех нульмерных пространств (см. [194, 288]).

Теорема 6. *Нульмерные пространства X и Y имеют один и тот же шейп тогда и только тогда, когда они гомеоморфны.*

Следствие 2. *Существует $\aleph_1$ счётных метризуемых компактов с попарно различными шейпами.*

Действительно, счётные метризуемые компакты являются нульмерными, а С. Мазуркевич и В. Серпинский [294] доказали, что в классе счётных метризуемых компактов существует $\aleph_1$ различных топологических типов.

Из следствия 2 можно сделать вывод, что число различных шейпов компактов в $\mathbf{R}^1$ несчётно.

Ещё одним классом пространств, в пределах которого шейповая классификация совпадает с топологической, является класс всех P-адических соленоидов S_P, где $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — последовательность простых чисел. Напомним, что P-адический соленоид определяется как предел обратной последовательности $\{X_n, p_{nn+1}, N\}$, где $X_n = S^1$, а p_{nn+1} — отображение степени p_n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 7 [194, 288]. *Соленоиды S_P и S_Q имеют один и тот же шейп тогда и только тогда, когда они гомеоморфны.*

С. Годлевский [194] показал, что шейп всякого соленоида вполне определяется его первой когомологической группой, подобно тому как шейп любого плоского континуума определяется его первым числом Бетти.

Другой интересный случай, когда теория шейпов не даёт ничего нового, связан с классом всех компактных связных абелевых групп. Шейповые морфизмы между группами находятся во взаимно-однозначном соответствии с непрерывными гомоморфизмами этих групп. Более того, Дж. Кислинг [229] доказал следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть X и Y — компактные связные абелевы группы. Тогда $\operatorname{sh} X = \operatorname{sh} Y$ тогда и только тогда, когда X и Y изоморфны (алгебраически и топологически).*

Следует отметить, что этот результат оказался весьма полезным при построении различных контрпримеров в теории шейпов. Класс компактных связных абелевых групп существенно шире класса всех соленоидов. Более того, справедлива следующая теорема Кислинга [225] (см. также [149]).

Теорема 9. *Пусть X — T^n-подобный континуум, где $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ — n-мерный тор. Тогда X имеет шейп компактной связной абелевой топологической группы.*

Однако если Π — семейство всех компактных связных групп Ли, а X является Π-подобным континуумом, то он не обязан иметь шейп компактной связной топологической группы. Соответствующий пример строится в [225].

В случае плоских континуумов шейп зависит только от первого числа Бетти, т. е. от числа областей, на которые данный континуум разбивает плоскость.

Теорема 10 [10]. *Два плоских континуума X и Y имеют один и тот же шейп тогда и только тогда, когда их первые числа Бетти совпадают между собой.*

В частности, $\operatorname{sh} X \geqslant \operatorname{sh} Y$ тогда и только тогда, когда число областей $\mathbf{R}^2 \setminus X$ больше или равно числу областей $\mathbf{R}^2 \setminus Y$. Следовательно, для произвольных двух плоских континуумов X и Y либо $\operatorname{sh} X = \operatorname{sh} Y$, либо $\operatorname{sh} X < \operatorname{sh} Y$, либо $\operatorname{sh} X > \operatorname{sh} Y$. Однако для континуумов, лежащих в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$, имеет место другая ситуация: существуют такие континуумы $X, Y \subset \mathbf{R}^3$, что $\operatorname{sh} X \leqslant \operatorname{sh} Y$, $\operatorname{sh} X \geqslant \operatorname{sh} Y$, но $\operatorname{sh} X \neq \operatorname{sh} Y$.

Из теоремы 10 следует, что имеется счётное число различных шейпов плоских континуумов. В качестве представителей этих шейпов можно взять точку (тривиальный шейп), букет n окружностей для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и букет бесконечного числа окружностей. Таким образом, получена полная шейповая классификация плоских континуумов.

Несложно доказать, что семейство всех различных шейпов плоских компактов имеет мощность $2^{\aleph_0}$. С. Годлевский [193] доказал, что в $\mathbf{R}^3$ существует $2^{\aleph_0}$ континуумов с попарно различными шейпами (см. также [288]). На самом деле эти различные шейпы можно найти среди соленоидов.

Полную шейповую классификацию П-подобных континуумов для различных классов П можно найти в [149, 201—203, 225, 288, 351—353, 396].

4. Теоремы о дополнениях и теория шейпов

Теория шейпов является весьма полезным инструментом для решения классических проблем бесконечномерной и геометрической топологии. Это стало ясным после глубоких результатов Т. Чепмена [104, 105], Р. Гэгана и Р. Саммерхилла [181], Р. Д. Эдвардса [160], Дж. Веста [406] и др., которые продемонстрировали эффективность методов теории шейпов в геометрической топологии. С другой стороны, методы бесконечномерной топологии являются крайне важными для изучения шейпов метризуемых компактов. Насколько нам известно, эти методы в теории гомотопии впервые применил К. Борсук [81]. Он доказал теорему о гомотопическом типе фактор-пространства евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ с помощью теоремы Кли [240] о продолжении гомеоморфизмов компактов, лежащих в гильбертовом пространстве, на всё гильбертово пространство. Эти методы были применены также Д. Хендерсоном [209].

Особое место в исследованиях теории шейпов с применением методов бесконечномерной топологии занимают так называемые теоремы о дополнениях, т. е. утверждения, дающие в различных ситуациях ответы на следующий вопрос: когда гомеоморфны дополнения $M \setminus X$ и $M \setminus Y$ компактов X и Y, некоторым специальным образом лежащих в объемлющем пространстве M? Одним из первых результатов такого рода является теорема К. Борсука [10] о том, что если X и Y — плоские континуумы, то дополнения $\mathbf{R}^2 \setminus X$ и $\mathbf{R}^2 \setminus Y$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $\operatorname{sh}(X) = \operatorname{sh}(Y)$. Замечательные результаты в этом направлении были получены также Т. Чепменом [104, 105]. Суть результатов Т. Чепмена заключается в том, что при определённых ограничениях на расположение двух компактов X и Y в гильбертовом кубе Q они будут иметь один и тот же шейп тогда и только тогда, когда дополнения к ним гомеоморфны. Следовательно, если X и Y — абсолютные окрестностные ретракты, то они будут иметь один и тот же гомотопический тип тогда и только тогда, когда дополнения к ним гомеоморфны.

Гильбертов куб Q будем представлять в виде произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, где $I_n = [0,1]$. Множество $s = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \mathring{I}_n$, где $\mathring{I}_n = (0,1)$, называется *псевдовнутренностью* гильбертова куба Q.

Напомним, что компактное подмножество X гильбертова куба Q называется *Z-множеством*, если тождественное отображение 1_Q может быть сколь угодно близко аппроксимировано непрерывными отображениями из Q в $Q \setminus X$, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое непрерывное отображение $f\colon Q \to Q \setminus X$, что $d(f, 1_Q) < \varepsilon$. Это понятие было введено Р. Андерсоном [47] и является одним из фундаментальных понятий теории Q-многообразий [27].

Отметим, что произвольный метризуемый компакт вкладывается в гильбертов куб как Z-множество. Компактные подмножества, лежащие в псевдовнутренности s гильбертова куба Q, составляют важный класс Z-множеств. Как показывает следующая теорема, всякое Z-множество гильбертова куба Q можно некоторым гомеоморфизмом $h\colon Q \to Q$ перевести в псевдовнутренность s.

Теорема 11. *Пусть $X \in Q$ — некоторое Z-множество. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой гомеоморфизм $h\colon Q \to Q$, что $h(X) \subset s$ и $d(h, 1_Q) < \varepsilon$.*

Эта теорема, доказанная Р. Андерсоном [47], исключительно важна, поскольку сводит изучение Z-множеств к теории компактов, лежащих в псевдовнутренности s.

Т. Чепмен [104] доказал, что шейп всякого Z-множества, в частности всякого компакта в s, зависит лишь от топологического типа его дополнения. Точнее, справедлива следующая замечательная *теорема о дополнениях* (см. [104]).

Теорема 12. *Пусть X и Y — произвольные Z-множества гильбертова куба Q. Они имеют один и тот же шейп тогда и только тогда, когда их дополнения $Q \setminus X$ и $Q \setminus Y$ гомеоморфны.*

Если же X и Y — абсолютные окрестностные ретракты, то они будут иметь один и тот же гомотопический тип тогда и только тогда, когда дополнения к ним гомеоморфны.

Для доказательства последней теоремы Т. Чепмен применил глубокие результаты, посвящённые Q-многообразиям (см. [47, 49, 50, 415]).

Отметим, что аналогичный факт для подмножеств гильбертова пространства l_2 неверен, так как согласно одной теореме Андерсона [48] если $X \subset l_2$ — произвольный компакт, то l_2 гомеоморфно $l_2 \setminus X$.

Т. Чепмену [105] принадлежит также первый конечномерный аналог теоремы 12 о дополнениях. Эта теорема привлекла внимание многих специалистов по геометрической топологии, которые в дальнейшем доказали новые теоремы о дополнениях в конечномерном случае. Отметим работы Р. Гэгана и Р. Саммерхилла [181], Г. А. Венемы [388], И. Иваншича, Р. Б. Шера и Г. А. Венемы [217], П. Мрозика [315]. Во всех этих работах предполагается, что метризуемые компакты X и Y подходящим образом вложены в пространство $\mathbf{R}^n$ и выполняется некоторое условие размерностного характера. Тогда X и Y имеют один и тот же шейп тогда и только тогда, когда их дополнения $\mathbf{R}^n \setminus X$ и $\mathbf{R}^n \setminus Y$ гомеоморфны.

Теорема 13 (Т. Чепмен [105]). *Пусть X и Y — метризуемые компакты размерности не больше k. Тогда*

а) *при $n \geqslant 2k+2$ существуют такие вложения $i\colon X \to \mathbf{R}^n$ и $j\colon Y \to \mathbf{R}^n$, что из равенства $\operatorname{sh}(X) = \operatorname{sh}(Y)$ следует гомеоморфизм $\mathbf{R}^n \setminus i(X) \cong \mathbf{R}^n \setminus j(Y)$;*

б) *при $n \geqslant 3k+3$ существуют такие вложения $i\colon X \to \mathbf{R}^n$ и $j\colon Y \to \mathbf{R}^n$, что гомеоморфизм $\mathbf{R}^n \setminus i(X) \cong \mathbf{R}^n \setminus j(Y)$ влечёт равенство $\operatorname{sh}(X) = \operatorname{sh}(Y)$.*

Р. Гэган и Р. Саммерхилл [181] для формулировки и доказательства своей теоремы о дополнениях ввели понятия ε-переноса и сильного Z_k-множества. Пусть X — некоторое замкнутое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$. Гомеоморфизм $h\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется *ε-переносом* пары $(\mathbf{R}^n, X)$, если существует такая изотопия $H\colon \mathbf{R}^n \times I \to \mathbf{R}^n$, что $d\big(x, H_t(x)\big) < \varepsilon$ для всех $x \in \mathbf{R}^n$ и $t \in I$ (в этом случае изотопия называется ε-изотопией), $H_0 = 1$, $H_1 = h$ и $H_t(x) = x$ для всех $t \in I$ и всех x, удовлетворяющих условию $\operatorname{dist}(x, X) \geqslant \varepsilon$.

Замкнутое подмножество X пространства $\mathbf{R}^n$ называется *сильным Z_k-множеством* ($k \geqslant 0$), если для каждого компактного полиэдра P в $\mathbf{R}^n$ размерности $\dim P \leqslant k+1$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой ε-перенос h пары $(\mathbf{R}^n, X)$, что $P \cap h(X) = \varnothing$.

Теорема 14 (Р. Гэган и Р. Саммерхилл [181]). *Пусть X и Y — метризуемые компакты, являющиеся сильными Z_{n-k-2}-множествами в $\mathbf{R}^n$ ($k \geqslant 0$, $n \geqslant 2k+2$). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\operatorname{sh}(X) = \operatorname{sh}(Y)$;

2) *пары $(\mathbf{R}^n/X, \{X\})$ и $(\mathbf{R}^n/Y, \{Y\})$ гомеоморфны;*

3) *тройки $(\mathbf{R}^n/X, (\mathbf{R}^n/X) \setminus \{X\}, \{X\})$ и $(\mathbf{R}^n/Y, (\mathbf{R}^n/Y) \setminus \{Y\}, \{Y\})$ имеют один и тот же гомотопический тип;*

4) $\mathbf{R}^n \setminus X \cong \mathbf{R}^n \setminus Y$.

В связи с последней теоремой важно отметить, что произвольный метризуемый компакт X размерности $\dim X \leqslant k$ вкладывается в $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2k+1$) в качестве сильного Z_{n-k-2}-множества.

Заметим, что свойство быть сильным Z_k-множеством не является гомотопическим. Однако из некоторых гомотопических свойств часто следует свойство быть сильным Z_{n-k-2}-множеством. Это позволило Р. Гэгану и Р. Саммерхиллу [181] доказать следующую более удобную для применения теорему о дополнениях.

Теорема 15. *Пусть X и Y — непустые компакты в $\mathbf{R}^n$, такие что их дополнения $\mathbf{R}^n \setminus X$ и $\mathbf{R}^n \setminus Y$ равномерно локально* 1*-связны и* $\max\{\dim X, \dim Y\} \leqslant k$, $\max\{2k+2, 5\} \leqslant n$. *Тогда* $\mathrm{sh}(X) = \mathrm{sh}(Y)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{R}^n \setminus X \cong \cong \mathbf{R}^n \setminus Y$.

Напомним, что метрическое пространство X называется *равномерно локально k-связным* (коротко $X \in \mathrm{ULC}^k$), если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что всякое отображение $f\colon S^k \to X$, удовлетворяющее условию $\operatorname{diam} f(S^k) < \delta$, гомотопно постоянному отображению на множестве $V \subset X$ диаметра $\operatorname{diam} V < \varepsilon$.

Следствие 3. *Пусть X и Y — замкнутые k-мерные подмногообразия $\mathbf{R}^n$, где* $\max\{2k+2, 5\} \leqslant n$. *Тогда X гомотопически эквивалентно Y тогда и только тогда, когда* $\mathbf{R}^n \setminus X \cong \mathbf{R}^n \setminus Y$.

Условие ULC^1 в теореме 15 не может быть опущено, поскольку дополнение дикой дуги Бланкиншипа [73] в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, неодносвязно. Важно также иметь достаточно большую коразмерность. Д. Хендерсон [209] построил пример гомотопически не эквивалентных компактных двумерных полиэдров в $\mathbf{R}^3$, дополнения которых гомеоморфны.

В [112] было введено так называемое *условие малых петель* (SLC, *small loops condition*). Компакт $X \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию SLC, если для произвольной окрестности U компакта X существуют такая окрестность V, $X \subset V \subset U$, и такое число $\varepsilon > 0$, что всякая петля в $V \setminus X$ диаметра меньше ε гомотопна нулю в $U \setminus X$. Это понятие является обобщением *критерия клеточности* (CC, *cellularity criterion*) Мак-Миллана [297], характеризующего клеточные вложения в многообразия. Условие CC получается из SLC при $\varepsilon = \infty$.

Результаты работы [112] позволили Дж. Холлингсуорту и Т. Рушингу [210] получить следующее обобщение теоремы 15.

Теорема 16. *Пусть компакты $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяют условию* SLC, *и пусть* $\max\{\dim X, \dim Y\} \leqslant k$, $\max\{2k+2, 5\} \leqslant n$. *Тогда* $\mathrm{sh}(X) = \mathrm{sh}(Y)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{R}^n \setminus X \cong \mathbf{R}^n \setminus Y$.

Приведём два интересных следствия этой теорем.

Следствие 4. *Пусть $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ — ANR-компакты, удовлетворяющие условию* SLC, *и пусть* $\max\{\dim X, \dim Y\} \leqslant k$, $\max\{2k+2, 5\} \leqslant n$. *Тогда X и Y имеют один и тот же гомотопический тип тогда и только тогда, когда* $\mathbf{R}^n \setminus X \cong \cong \mathbf{R}^n \setminus Y$.

Следствие 5. *Пусть компакты $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ гомеоморфны и удовлетворяют условию* SLC. *Если* $\dim X = \dim Y \leqslant k$, $\max\{2k+2, 5\} \leqslant n$, *то* $\mathbf{R}^n \setminus X \cong \cong \mathbf{R}^n \setminus Y$.

Г. А. Венеме [388] удалось в теореме 16 размерность $\dim$ заменить на шейповую размерность sd. Для этого он определил *условие несущественной петли* (ILC, *inessential loops condition*). Компактное подмножество X многообразия M

удовлетворяет условию ILC, если для произвольной окрестности U компакта X в M существует такая окрестность V, $X \subset V \subset U$, что всякая петля в $V \setminus X$, которая несущественна (гомотопна нулю) в V, будет несущественной также в $U \setminus X$. Заметим, что из ILC следует SLC. Если $X \subset M^n$ и $\dim X \leqslant n-2$, то эти два условия эквивалентны.

Теорема 17 (Г. А. Венема [388]). *Пусть компакты $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяют условию* ILC, *и пусть* $\max\{\operatorname{sd} X, \operatorname{sd} Y\} \leqslant k$, $\max\{2k+2, 5\} \leqslant n$. *Тогда* $\operatorname{sh}(X) = \operatorname{sh}(Y)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{R}^n \setminus X \cong \mathbf{R}^n \setminus Y$.

Эта теорема в случае, когда $\dim X \leqslant n-3$, а Y — конечный полиэдр размерности не больше k, где $2k+2 \leqslant n$, была доказана в [112].

Наиболее общую теорему о дополнениях получили И. Иваншич, Р. Б. Шер и Г. А. Венема [217].

Теорема 18 [217]. *Пусть компакты $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ шейпово r-связны и удовлетворяют условию* ILC. *Пусть также*

$$\max\{\operatorname{sd} X, \operatorname{sd} Y\} \leqslant k, \quad n \geqslant \max\{2k+2-r, 5\}.$$

Если $n \geqslant k+3$, то из $\operatorname{sh}(X) = \operatorname{sh}(Y)$ следует $\mathbf{R}^n \setminus X \cong \mathbf{R}^n \setminus Y$. Обратное верно при $n \geqslant k+4$.

Эта теорема обобщает почти все предыдущие результаты.

Теоремы о дополнениях в различных категориях и в более общих случаях были получены П. Мрозиком [315].

5. Подвижность и другие шейповые инварианты

Понятие подвижности для метризуемых компактов было введено К. Борсуком [78].

Определение 4. Метризуемый компакт X, лежащий в AR-пространстве M, называется *подвижным*, если для любой окрестности U компакта X существует такая окрестность U' компакта X, $U' \subset U$, что для любой окрестности U'' компакта X, $U'' \subset U$, существует гомотопия $H\colon U' \times I \to U$, удовлетворяющая условию $H(x,0) = x$, $H(x,1) \in U''$ для всех $x \in U'$.

Это определение не зависит от выбора AR-пространства M и способа вложения метризуемого компакта в M.

Для произвольных топологических пространств понятие подвижности было определено С. Мардешичем и Дж. Сегалом [286] в терминах ANR-спектров.

Определение 5. Обратный ANR-спектр $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ называется *подвижным*, если

(M) для произвольного $\alpha \in A$, существует такое $\alpha' \in A$, $\alpha' \geqslant \alpha$, что при всяком $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geqslant \alpha$, существует такой гомотопический класс $\mathbf{r}^{\alpha'\alpha''}\colon X_{\alpha'} \to X_{\alpha''}$, что $\mathbf{p}_{\alpha\alpha'} = \mathbf{p}_{\alpha\alpha''} \circ \mathbf{r}^{\alpha'\alpha''}$.

Обратный ANR-спектр $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ называется *равномерно подвижным*, если

(UM) для произвольного $\alpha \in A$, существуют $\alpha' \in A$, $\alpha' \geqslant \alpha$, и морфизм $\mathbf{r}\colon X_{\alpha'} \to \mathbf{X}$ категории pro-H-CW, такие что $\mathbf{p}_\alpha \circ \mathbf{r} = \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}$, где $\mathbf{p}_\alpha\colon \mathbf{X} \to X_\alpha$ — морфизм категории pro-H-CW, порождённый тождественным гомотопическим классом $\mathbf{1}_{X_\alpha}$.

Топологическое пространство X называется (*равномерно*) *подвижным*, если существует ассоциированный с ним (равномерно) подвижный ANR-спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$.

Если пространство X (равномерно) подвижно, то все ассоциированные с ним ANR-спектры будут (равномерно) подвижными, т. е. понятие (равномерной) подвижности зависит лишь от самого пространства X. В случае метризуемых компактов определения 4 и 5 эквивалентны.

Как показывает следующая теорема, понятие подвижного пространства можно определить, не прибегая к ассоциированным обратным спектрам.

Теорема 19 (П. С. Геворкян [15]). *Топологическое пространство X подвижно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие*:

(∗) *для произвольного гомотопического класса $\mathbf{f}\colon X \to Q$, $Q \in \mathrm{ANR}$, существуют такие гомотопические классы $\mathbf{f}'\colon X \to Q'$ и $\boldsymbol{\eta}\colon Q' \to Q$, $Q' \in \mathrm{ANR}$, $\mathbf{f} = \boldsymbol{\eta}\mathbf{f}'$, что для произвольных гомотопических классов $\mathbf{f}''\colon X \to Q''$ и $\boldsymbol{\eta}'\colon Q'' \to Q$, $Q'' \in \mathrm{ANR}$, $\mathbf{f} = \boldsymbol{\eta}'\mathbf{f}''$, существует гомотопический класс $\boldsymbol{\eta}''\colon Q' \to Q''$, удовлетворяющий условию $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\eta}''$*:

$$\begin{tikzcd} & & Q' \arrow[dll, bend right, "\boldsymbol{\eta}"'] \arrow[dd, dashed, "\boldsymbol{\eta}''"] \\ Q & X \arrow[l, "\mathbf{f}"'] \arrow[ur, "\mathbf{f}'"] \arrow[dr, "\mathbf{f}''"'] & \\ & & Q'' \arrow[ull, bend left, "\boldsymbol{\eta}'"] \end{tikzcd} .$$

Подвижность является монотонным шейповым инвариантом, т. е. если $\operatorname{sh} X \leqslant \operatorname{sh} Y$ и пространство Y подвижно, то пространство X тоже подвижно. Свойство подвижности сохраняется при произведении (см. [7, 78]), при надстройке (см. [82]), но не сохраняется при пересечении, при объединении (см. [117]), при клеточных отображениях (см. [230]). Если каждая компонента компакта X подвижна, то X также подвижен. Однако обратное не верно, т. е. существует такой подвижный компакт, у которого не всякая компонента подвижна (см. [10]).

Подвижных пространств достаточно много. Все ANR-пространства являются подвижными. В частности, *устойчивые пространства* (т. е. пространства, имеющие шейп ANR-пространств) подвижны. Все плоские компакты также подвижны [78]. Однако в $\mathbf{R}^3$ уже существуют континуумы, которые неподвижны, например все соленоиды [10]. Это следует из того, что первая гомологическая про-группа соленоида неподвижна. Дело в том, что подвижность сохраняется при функториальных переходах. Следовательно, если пространство X подвижно, то его гомотопическая про-группа pro-$\pi_n(X,*)$ и гомологическая про-группа pro-$H_n(X)$ также подвижны.

Подвижность, которая определяется в любой про-категории (см. [312]), важна потому, что в подвижных обратных спектрах можно перейти к пределу, не теряя алгебраической информации о спектре. В случае шейпового морфизма $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ подвижных метризуемых компактов индуцированные гомоморфизмы $\check{\pi}_n(F)\colon \check{\pi}_n(X,*) \to \check{\pi}_n(Y,*)$ и pro-$\pi_n(F)\colon$ pro-$\pi_n(X,*) \to$ pro-$\pi_n(Y,*)$ шейповых групп и про-групп являются изоморфизмами одновременно (см. теорему 50). Поэтому в случае подвижных пространств некоторые теоремы остаются в силе, если в них гомотопические про-группы заменить шейповыми группами. Так обстоит дело с шейповыми версиями теоремы Уайтхеда (см. теорему 49), теоремы Гуревича (см. теорему 57) и др.

В категории pro-Set подвижность имеет простую характеризацию: обратный спектр $\mathbf{X} = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\} \in$ pro-Set подвижен тогда и только тогда, когда выполняется условие Миттаг-Леффлера

(ML) для любого $\alpha \in A$ существует такое $\alpha' \geqslant \alpha$, что $p_{\alpha\alpha'}(X_{\alpha'}) = p_{\alpha\alpha''}(X_{\alpha''})$ для любого $\alpha'' \geqslant \alpha'$.

Подвижные про-группы обладают свойством Миттаг-Леффлера. Однако обратное не верно (см. [289]).

Семейство всех подвижных компактов *шейпово ограничено*, а точнее, справедлива следующая теорема Спижа [367].

Теорема 20. *Существует такой подвижный компакт X_0, что $\mathrm{sh}(X) \leqslant \mathrm{sh}(X_0)$ для любого подвижного компакта X.*

В этом случае компакт X_0 называется *мажорантой* семейства всех подвижных компактов. Из последней теоремы следует, что семейство всех плоских компактов шейпово ограничено или имеет мажоранту. Такое утверждение не верно для семейства всех компактов пространства $\mathbf{R}^3$. Это следует из одного результата К. Борсука и В. Голштыньского [87] о том, что не существует компакта, шейп которого больше шейпа любого соленоида.

В эквивариантной теории шейпов аналог теоремы 20 не верен, т. е. в классе всех G-подвижных компактов нет мажорант. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 21 (П. С. Геворкян [13]). *Пусть G — компактная группа со счётной базой. Тогда в любом классе слабо шейпово сравнимых G-подвижных компактов существует мажоранта.*

Слабая шейповая сравнимость G-пространств X и Y означает, что существуют G-шейповые морфизмы как из X в Y, так и из Y в X. Доказательство последней теоремы основывается на конструкции МакКорда [295] построения универсального компакта и на эквивариантном аналоге теоремы Брауна [13].

Первые результаты об эквивариантной подвижности были получены автором в [12—15, 183], где, в частности, доказаны следующие результаты.

Теорема 22. *Пусть G — компактная группа Ли, а X — G-подвижное метризуемое G-пространство. Тогда X является H-подвижным для любой замкнутой подгруппы H группы G.*

G-подвижность метризуемого G-пространства влечёт также подвижность множества H-неподвижных точек для произвольной замкнутой подгруппы H группы G. В частности, из G-подвижности метризуемого G-пространства X следует его подвижность. Обратное утверждение не верно, даже если действующая группа G является циклической группой $\mathbb{Z}_2$ (см. [183, пример 5.1]).

Теорема 23. *Пусть G — компактная группа, а X — метризуемое G-пространство. Если X G-подвижно, то для любой замкнутой нормальной подгруппы H группы G пространство H-орбит $X|_H$ также G-подвижно.*

В частности, из G-подвижности G-пространства X следует подвижность пространства орбит $X|_G$. Обратное утверждение не верно. Однако если компактная группа Ли действует свободно на метризуемом пространстве X, то G-подвижность эквивалентна подвижности, причём условия лиевости действующей группы G и свободности действия существенны в последнем утверждении.

Подвижность топологических групп была изучена Дж. Кислингом [227, 229, 231] и Дж. Козловским и Дж. Сегалом [254]. Дж. Кислингом [227], в частности, была доказана следующая теорема.

Теорема 24. *Связная компактная абелева группа подвижна тогда и только тогда, когда она локально связна.*

В случае неабелевых групп эта теорема не верна (см. [227]).

Эквивариантная подвижность топологических групп была изучена автором [184]. Отметим следующий результат.

Теорема 25 (П. С. Геворкян [184]). *Компактная группа со счётной базой G является лиевой тогда и только тогда, когда она G-подвижна.*

Эта теорема, в частности, даёт новые примеры подвижных, но эквивариантно неподвижных G-пространств (см. [184]).

Подвижные шейповые морфизмы были определены и исследованы П. С. Геворкяном и И. Попом [187]. Морфизм $(\mathbf{f}, \varphi)\colon \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\} \to \{Y_\beta, \mathbf{q}_{\beta\beta'}, B\}$ категории pro-H-CW называется *подвижным*, если для произвольного $\beta \in B$ существует такое $\alpha \in A$, $\alpha \geqslant \varphi(\beta)$, что для любого $\beta' \geqslant \beta$ найдётся гомотопический класс $\mathbf{u}\colon X_\alpha \to Y_{\beta'}$, который удовлетворяет равенству $\mathbf{f}_\beta \mathbf{p}_{\varphi(\beta)\alpha} = \mathbf{q}_{\beta\beta'}\mathbf{u}$. Понятие подвижного шейпового морфизма согласовано с понятием подвижного пространства в том смысле, что пространство X подвижно тогда и только тогда, когда подвижно тождественное отображение 1_X. Важность подвижных морфизмов, в частности, объясняется тем, что в некоторых теоремах условие подвижности пространства удаётся заменить более слабым условием подвижности шейпового морфизма $F\colon X \to Y$ (см., например, теорему Уайтхеда 53 для подвижных морфизмов $F\colon X \to Y$).

Подвижные шейповые морфизмы разными способами и для различных целей были введены и изучены также другими авторами [100, 158, 416, 417].

К. Борсук в [10] ввёл понятие n-подвижности, которое тоже является шейповым инвариантом. Метризуемый компакт X, лежащий в AR-пространстве M, называется *n-подвижным*, если для произвольной окрестности U компакта X в M существует такая окрестность U' компакта X, $U' \subset U$, что для любой окрестности U'' компакта X, $U'' \subset U$, произвольного метризуемого компакта K размерности $\dim K \leqslant n$ и любого отображения $f\colon K \to U'$ существует отображение $g\colon K \to U''$, которое гомотопно f в U. Для произвольных пространств это понятие вводится с помощью обратных спектров.

Определение 6. Обратный ANR-спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ называется *n-подвижным*, если для произвольного $\alpha \in A$ существует такое $\alpha' \in A$, $\alpha' \geqslant \alpha$, что для любого $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geqslant \alpha$, и любого гомотопического класса $\mathbf{h}\colon P \to X_{\alpha'}$, где P — произвольное ANR-пространство размерности $\dim P \leqslant n$, существует такой гомотопический класс $\mathbf{r}\colon P \to X_{\alpha''}$, что $\mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{h} = \mathbf{p}_{\alpha\alpha''}\mathbf{r}$.

Топологическое пространство X называется *n-подвижным*, если существует ассоциированный с ним n-подвижный ANR-спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$.

Несложно заметить, что $(n+1)$-подвижность всегда влечёт n-подвижность. Ясно также, что из подвижности пространства X следует его n-подвижность для произвольного n. Если $\dim X \leqslant n$, то верно и обратное: из n-подвижности пространства X следует его подвижность (в случае $\operatorname{sd} X \leqslant n$ см. [7]). Эквивариантный аналог этого утверждения доказан в случае конечной действующей группы G: всякий эквивариантно n-подвижный G-компакт размерности $\dim X \leqslant n$ эквивариантно подвижен (см. [14]). Следовательно, конечномерный G-компакт эквивариантно подвижен тогда и только тогда, когда он эквивариантно n-подвижен для всех n. В общем случае из n-подвижности не следует подвижность: кановский компакт [221] n-подвижен при всех n, но неподвижен (см. [7, 252]). Всякое LC^{n-1} паракомпактное пространство n-подвижно (см. [255]).

Особо важный случай 1-подвижности подробно исследован Е. Дыдаком [132], Д. Р. Мак-Милланом [298], Й. Красинкевичем [257—259] и др. Если метризуемый континуум $(X, *)$ 1-подвижен для некоторой точки $x \in X$, то он 1-подвижен для любой другой точки X. Более того, если метризуемый континуум (X, x) 1-подвижен и $\operatorname{sh}(X) = \operatorname{sh}(Y)$, то $\operatorname{sh}(X, x) = \operatorname{sh}(Y, y)$ для произвольного $y \in Y$ (см. [132]). Существует достаточно нетривиальный пример метризуемого континуума X, который 1-подвижен, в то время как $(X, *)$ не 1-подвижен (см. [131]). Непрерывный образ 1-подвижного метризуемого континуума является 1-подвижным. Следующие важные критерии 1-подвижности метризуемых континуумов принадлежат Й. Красинкевичу [257].

Теорема 26. *Метризуемый континуум $(X, *)$ 1-подвижен тогда и только тогда, когда его гомотопическая про-группа* pro-$\pi_1(X, *)$ *удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера.*

Теорема 27. *Метризуемый континуум $(X, *)$ 1-подвижен тогда и только тогда, когда он имеет шейп локально связного континуума.*

Из этих теорем следует, что соленоид X не имеет шейпа локально связного континуума, поскольку про-группа pro-$\pi_1(X)$ не удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера.

В теории шейпов многие результаты без каких-либо трудностей переносятся со случая пунктированного пространств на случай без отмеченной точки. Однако обратный перенос результатов не прост и не всегда возможен (см. [175,289]). Например, из подвижности пунктированного пространства $(X, *)$ легко следует подвижность X, однако обратная задача достаточно сложная и до сих пор не решена. Частичное решение этой задачи содержится в следующей теореме.

Теорема 28 (Й. Красинкевич [258]). *Пусть $(X, *)$ — 1-подвижный метризуемый континуум. Тогда из подвижности X следует подвижность $(X, *)$.*

Понятие n-подвижности положило начало *теории n-шейпов*, которая была исследована в [29]. Эта теория является важным инструментом в теории k-мерных менгеровских многообразий, инициированной М. Бествиной в [68].

Имеется ещё несколько видоизменений понятия подвижности и n-подвижности (см. [5, 243, 273, 312], а также [63, 139, 254, 368, 401]). Понятие *n-подвижности шейповых морфизмов* было введено и изучено П. С. Геворкяном и И. Попом [188].

Ещё одним важным шейповым инвариантом является *сильная подвижность*. Это понятие сыграло важную роль прежде всего при изучении устойчивости топологических пространств и абсолютных окрестностных шейповых ретрактов. Пространство X называется *сильно подвижным*, если существует ассоциированный с ним *сильно подвижный ANR-спектр* $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$, что означает следующее: для произвольного $\alpha \in A$ существует такой $\alpha' \geqslant \alpha$, что для любого $\alpha'' \geqslant \alpha$ существуют индекс $\alpha^* \geqslant \alpha', \alpha''$ и гомотопический класс $\mathbf{r}^{\alpha'\alpha''} \colon X_{\alpha'} \to X_{\alpha''}$, такие что выполняются соотношения $\mathbf{p}_{\alpha\alpha''}\mathbf{r}^{\alpha'\alpha''} = \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}$ и $\mathbf{r}^{\alpha'\alpha''}\mathbf{p}_{\alpha'\alpha^*} = \mathbf{p}_{\alpha''\alpha^*}$. Очевидно, что из сильной подвижности следует подвижность. Сильная подвижность сохраняется при шейповом доминировании. Для связного пространства $(X, *)$ сильная подвижность эквивалентна устойчивости (см. [126, 401]).

Понятие подвижности на более общие случаи было распространено и изучено Дж. Сегалом [354], А. П. Шостаком [32], П. С. Геворкяном [15, 182], П. С. Геворкяном и И. Попом [186—188], Т. А. Авакяном и П. С. Геворкяном [56].

Т. А. Авакян и П. С. Геворкян [56] (см. также [15, 182]) ввели понятие *подвижной категории* и доказали критерии подвижности и сильной подвижности топологического пространства.

Определение 7. Пусть K и L — произвольные категории, $\Phi\colon K \to L$ — произвольный ковариантный функтор. Категория K называется *подвижной относительно категории L и функтора* $\Phi\colon K \to L$, если для произвольного объекта $X \in \mathrm{Ob}(K)$ существуют объект $Y \in \mathrm{Ob}(K)$ и морфизм $f \in \mathrm{Mor}_K(Y, X)$, такие что для любого объекта $Z \in \mathrm{Ob}(K)$ и любого морфизма $g \in \mathrm{Mor}_K(Z, X)$ существует такой морфизм $h \in \mathrm{Mor}_L\big(\Phi(Y), \Phi(Z)\big)$, что $\Phi(g)h = \Phi(f)$.

Если K — полная подкатегория категории L, $\Phi\colon K \hookrightarrow L$ — функтор вложения, то подкатегория K называется *подвижной относительно категории L*.

Если $K = L$, $\Phi = 1_K$, то в этом случае категория K называется *сильно подвижной*.

Теорема 29 (Т. А. Авакян и П. С. Геворкян [56]). *Топологическое пространство X подвижно тогда и только тогда, когда категория W^X подвижна относительно категории* H-CW *и стирающего функтора* $\Omega\colon W^X \to \text{H-CW}$.

Стирающий функтор $\Omega\colon W^X \to \text{H-CW}$ каждому объекту $f\colon X \to Q$ ставит в соответствие объект $Q \in \text{H-CW}$, а каждому морфизму

$$\eta\colon (f\colon X \to Q) \to (f'\colon X \to Q'), \quad \eta \circ f = f',$$

категории W^X — морфизм $\eta\colon Q \to Q'$ категории H-CW.

Теорема 30 (Т. А. Авакян и П. С. Геворкян [56]). *Топологическое пространство X сильно подвижно тогда и только тогда, когда категория W^X сильно подвижна.*

Похожие теоремы для *равномерно подвижных* пространств и категорий доказаны П. С. Геворкяном и И. Попом [186].

Определение 8. Категория K называется *равномерно подвижной*, если для произвольного объекта $X \in K$ существуют объект $M(X) \in K$ и морфизм $m_X\colon M(X) \to X$, такие что

(i) для любого объекта $Y \in K$ и любого морфизма $p\colon Y \to X$ категории K существует такой морфизм $u(p)\colon M(X) \to Y$, что $pu(p) = m(X)$;

(ii) для произвольных объектов $Y, Z \in K$ и морфизмов $p\colon Y \to X$, $q\colon Z \to X$ и $r\colon Z \to Y$ категории K, удовлетворяющих условию $pr = q$, выполняется равенство $ru(q) = u(p)$.

Теорема 31 (П. С. Геворкян и И. Поп [186]). *Топологическое пространство X равномерно подвижно тогда и только тогда, когда категория W^X равномерно подвижна.*

6. Устойчивые пространства и шейповые ретракты

Топологическое пространство X называется *устойчивым*, если оно имеет шейп некоторого ANR-пространства. Устойчивость впервые в категории шейпов была рассмотрена Т. Портером [335] и систематически исследована Л. Демерсом [120], Д. Эдвардсом и Р. Гэганом [151,152,155], Е. Дыдаком [126,132,141], Р. Гэганом и Р. Лачером [179], Т. Портером [336,337] и др.

Устойчивость является шейповым инвариантом. Понятия устойчивости и пунктированной устойчивости эквивалентны, т. е. справедлива следующая теорема (см. [141,174]).

Теорема 32. *Пунктированное пространство $(X,*)$ устойчиво тогда и только тогда, когда X устойчиво.*

Теорема 33. *Пусть связное пунктированное пространство $(X,*)$ шейпово доминируется некоторым пунктированным ANR-пространством $(P,*)$. Тогда $(X,*)$ устойчиво.*

Эту теорему независимо и различными способами доказали Л. Демерс [120] и Д. Эдвардс и Р. Гэган [151,155]).

Следующая теорема Дыдака [126] показывает, что для связных пунктированных пространств понятия устойчивости и сильной подвижности совпадают (см. также [401]).

Теорема 34. *Связное пространство $(X,*)$ устойчиво тогда и только тогда, когда оно сильно подвижно.*

Если пунктированное пространство $(X,*)$ устойчиво, то про-группа pro-$\pi_k(X,*)$ изоморфна шейповой группе $\check{\pi}_k(X,*)$. Следовательно, из устойчивости пространства $(X,*)$ следует устойчивость про-группы pro-$\pi_k(X,*)$. Обратное утверждение верно для конечномерных связных пространств. Итак, справедлива следующая алгебраическая характеризация устойчивости.

Теорема 35. *Пусть $(X,*)$ — связное пространство, имеющее конечную шейповую размерность $\operatorname{sd} X$. Пространство $(X,*)$ устойчиво тогда и только тогда, когда все его гомотопические про-группы pro-$\pi_k(X,*)$ устойчивы.*

Эта теорема впервые была доказана Д. Эдвардсом и Р. Гэганом [152,155] с использованием довольно сложных и абстрактных инструментов. В дальнейшем элементарные доказательства этой теоремы были найдены Е. Дыдаком [141] и Р. Гэганом [174].

Пусть X — подпространство топологического пространства Y. Шейповый морфизм $R\colon Y \to X$ называется *шейповой ретракцией*, если выполняется равенство $Ri = 1_X$, где $i\colon X \to Y$ — шейповое вложение. В этом случае X называется *шейповым ретрактом* Y. Подпространство $X \subset Y$ называется *окрестностным шейповым ретрактом* Y, если X является шейповым ретрактом некоторой своей окрестности U в Y.

По аналогии с абсолютными (окрестностными) ретрактами класса метризуемых пространств можно определить такие же понятия в теории шейпов. Метризуемое пространство X называется *абсолютным* (*окрестностным*) *шейповым ретрактом* класса метризуемых пространств, сокращённо $X \in \mathrm{ASR}$ (соответственно $X \in \mathrm{ANSR}$), если при всяком замкнутом вложении $X \subset Y$ в метризуемое пространство Y пространство X является (окрестностным) шейповым ретрактом Y (см. [10, 32, 271, 273, 355]). Несложно заметить, что эти понятия являются шейповыми инвариантами.

Понятие абсолютного (окрестностного) шейпового ретракта в классе метризуемых компактов совпадает с понятием *фундаментального абсолютного* (*окрестностного*) *ретракта*, сокращённо FAR (соответственно FANR), введённым К. Борсуком [10].

Один из первых вопросов, которые возникают в теории шейпов, следующий: когда пространство имеет шейп точки? Этим свойством характеризуются абсолютные шейповые ретракты.

Теорема 36 (С. Мардешич [271]). *Метризуемое пространство X является ASR-пространством тогда и только тогда* $\mathrm{sh}(X) = 0$.

Для метризуемых компактов это утверждение было доказано К. Борсуком [79], а в классе всех p-паракомпактных пространств — А. П. Шостаком [32]. Для произвольных топологических пространств утверждение теоремы 36 не верно (см. [195]).

Справедлив также следующий критерий тривиальности шейпа пространства X на языке ассоциированных ANR-спектров.

Теорема 37. *Пусть ANR-спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ ассоциирован с пространством X. Тогда X имеет тривиальный шейп тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in A$ существует такое $\alpha' \geqslant \alpha$, что проекция $p_{\alpha\alpha'}$ гомотопна постоянному отображению.*

Эта теорема в случае хаусдорфовых компактов была доказана С. Мардешичем [271]. Интересны также следующие теоремы (см. [141]).

Теорема 38. *Пространство X является шейповым абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда $\mathrm{sd}\, X < \infty$ и X шейпово n-связно при некотором n.*

Теорема 39. *Пространство X является шейповым абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда оно подвижно и шейпово n-связно для всех n.*

Напомним, что пространство X называется шейпово *n-связным*, если $\text{pro-}\pi_k(X, *) = 0$ для всех $k \leqslant n$. Для метризуемых компактов последняя теорема была доказана С. А. Богатым [4] и К. Борсуком [78].

Понятие ASR-пространства замечательно во многих отношениях. В частности, оно лежит в основе определения клеточноподобного отображения и позволяет дать ответ на естественный вопрос: при каких предположениях отображение $f\colon X \to Y$ порождает шейповый изоморфизм (см. теоремы 83, 84)?

Класс ANSR-пространств представляет собой естественное расширение класса ANR-пространств, а глобальные свойства ANSR-пространств в какой-то мере похожи на глобальные свойства ANR-пространств. Ясно, что каждый компакт, имеющий шейп некоторого ANR-пространства, является ANSR-пространством. К. Борсук [84] поставил обратный вопрос: верно ли, что всякий метризуемый ANSR-компакт имеет шейп некоторого метризуемого ANR-компакта? Д. Эдвардс и Р. Гэган [151] отрицательно решили эту проблему. Они построили пример двумерного метризуемого континуума X, который является ANSR-пространством, однако не имеет шейпа конечного комплекса. Но тогда этот континуум X не может иметь шейпа ANR-компакта, поскольку хорошо известно [407], что любой метризуемый ANR-компакт имеет гомотопический тип (а значит, и шейп) конечного комплекса. Тем не менее произвольный плоский ANSR-компакт имеет шейп ANR-компакта. Действительно, плоский компакт X является ANSR-пространством тогда и только тогда, когда числа Бетти $p_0(X)$ и $p_1(X)$ конечны. Значит, шейп плоского ANSR-компакта X равен шейпу объединения конечного числа попарно не пересекающихся плоских графов, а такое объединение является ANR-компактом. Так как одномерные ANSR-пространства имеют шейп плоского компакта (см. [384]), то можно сказать, что проблема Борсука имеет положительное решение для одномерных ANSR-компактов. Для двумерных ANSR-компактов, как показывает вышеупомянутый пример Д. Эдвардса и Р. Гэгана, решение отрицательное.

ANSR-пространства характеризуются следующей теоремой С. Мардешича и Дж. Сегала [289].

Теорема 40. *Метризуемое пространство X является ANSR-пространством тогда и только тогда, когда оно шейпово доминируется некоторым ANR-пространством P.*

Важно, что в последней теореме в случае метризуемых компактов шейпово доминирующее ANR-пространство P можно выбрать компактным.

Теорема 41. *Метризуемый компакт X является ANSR-пространством тогда и только тогда, когда оно шейпово доминируется некоторым ANR-компактом P.*

Теорема 40 справедлива также в пунктированном случае.

Теорема 42. *Метризуемое пространство $(X,*)$ является ANSR-пространством тогда и только тогда, когда оно шейпово доминируется некоторым ANR-пространством $(P,*)$.*

Из теорем 32, 33 и 42 вытекает следующее важное свойство пунктированных ANSR-пространств (см. [289]).

Теорема 43. *Связное метризуемое пространство $(X,*)$ является ANSR-пространством тогда и только тогда, когда $(X,*)$ устойчиво, т. е. имеет шейп некоторого ANR-пространства $(P,*)$.*

Эта теорема для метризуемых компактов была доказана Д. Эдвардсом и Р. Гэганом [152, 155]. В теореме 43 ANR-пространство $(P,*)$ нельзя заменить на компактное ANR-пространство даже в случае метризуемых континуумов. Действительно, упомянутый выше двумерный метризуемый континуум, построенный Д. Эдвардсом и Р. Гэганом [151], является ANSR-пространством, но не имеет шейпа ANR-компакта. Вопрос о том, когда метризуемый компакт $(X,*)$ имеет шейп ANR-компакта, решается с помощью инструментов алгебраической

K-теории. Точнее, метризуемый континуум $(X,*)$ имеет шейп конечного комплекса в точности тогда, когда так называемое препятствие Уолла [393] $\sigma(X,*)$, принимающее значения в приведённой группе Гротендика $\tilde{K}^0\big(\check{\pi}_1(X,*)\big)$, тривиально (см. [151]).

Из теорем 35 и 43 вытекает следующая алгебраическая характеризация ANSR-пространств.

Теорема 44. *Пусть $(X,*)$ — связное пространство, имеющее конечную шейповую размерность $\operatorname{sd} X$. Пространство $(X,*)$ является ANSR-пространством тогда и только тогда, когда все его гомотопические про-группы $\text{pro-}\pi_k(X,*)$ устойчивы.*

Следующий важный результат был получен Х. М. Хастингсом и А. Хеллером [206, 207].

Теорема 45. *Пусть X — связное ANSR-пространство. Тогда $(X,*)$ — пунктированное ANSR-пространство.*

Доказательство этой теоремы стало возможным после решения проблемы о расщеплении гомотопически идемпотентных отображений. Напомним, что отображение $f\colon X\to X$ называется *гомотопически идемпотентным*, если $f^2\simeq f$. Отображение $f\colon X\to X$ называется *расщепляющимся* в категории H-CW, если существуют такой CW-комплекс P и такие отображения $u\colon P\to X$, $v\colon X\to P$, что $v\circ u\simeq 1_P$ и $u\circ v\simeq f$.

Теорема 46. *Гомотопически идемпотентное отображение $f\colon P\to P$ конечномерного CW-комплекса P является расщепляющимся.*

В случае бесконечномерных CW-комплексов это утверждение не верно. Е. Дыдак [132] и П. Минк, а также П. Фрейд и А. Хеллер [172] независимо друг от друга доказали существование группы G и гомоморфизма $\phi\colon G\to G$, который индуцирует нерасщепляющееся гомотопически идемпотентное отображение $f\colon K(G,1)\to K(G,1)$ бесконечномерного комплекса Эйленберга—Маклейна $K(G,1)$, причём группа G является универсальной в том смысле, что если $f'\colon X\to X$ — нерасщепляющееся гомотопически идемпотентное отображение бесконечномерного CW-комплекса X, то существует инъекция $G\to\pi_1(X)$, которая эквивариантна относительно f_* и f'_*.

Однако хорошо известно, что любое гомотопически идемпотентное отображение $f\colon (X,*)\to(Y,*)$ между пунктированными связными CW-комплексами расщепляется (см. [88, 151, 171]).

Отметим, что в непунктированном случае задача о расщеплении гомотопически идемпотентных отображений возникает в различных областях топологии. В теории гомотопий эта задача тесно связана с теоремой Брауна о представимости полуточных функторов (см. [172, 208]), а в теории шейпов — с исследованием ANSR-пространств.

Из теорем 32 и 45 следует, что утверждение теоремы 43 остаётся верным и в непунктированном случае.

Теорема 47. *Связное метризуемое пространство X является ANSR-пространством тогда и только тогда, когда X устойчиво.*

7. Теоремы Уайтхеда и Гуревича в теории шейпов

Во введении было указано, что классическая теорема Уайтхеда не верна, если в её формулировке заменить CW-комплексы произвольными пространствами. Установление возможных обобщений теоремы Уайтхеда на более общие пространства является предметом изучения теории шейпов.

Пусть $(X,*)$ — пунктированное пространство, $(\mathbf{X},*) = \big((X_\alpha,*),\mathbf{p}_{\alpha\alpha'},A\big)$ — ассоциированый с ним обратный ANR-спектр. Применяя функтор π_n, $n = 0,1,\ldots$, к данному спектру, мы получаем *гомотопическую про-группу* пунктированного пространства $(X,*)$:

$$\text{pro-}\pi_n(X,*) = (\pi_n(X_\alpha,*),\mathbf{p}_{\alpha\alpha'\#},A).$$

Гомотопические про-группы $\text{pro-}\pi_n(X,*)$ являются аналогом гомотопических групп $\pi_n(X,*)$ в теории шейпов.

Так как произвольный шейповый морфизм $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ задаётся морфизмом $\mathbf{f}\colon (\mathbf{X},*) \to (\mathbf{Y},*)$ категории pro-H-CW, то естественным образом определяется *морфизм гомотопических про-групп*

$$\text{pro-}\pi_n(F)\colon \text{pro-}\pi_n(X,*) \to \text{pro-}\pi_n(Y,*).$$

Несложно убедиться, что $\text{pro-}\pi_n$ является ковариантным функтором из шейповой категории Sh-Top_* в категорию pro-Set_* при $n=0$ и в категорию pro-Grp_* при $n=1,2,\ldots$. В частности, $\text{pro-}\pi_n(X,*)$ является шейповым инвариантом.

Обратный предел про-гомотопической группы $\text{pro-}\pi_n(X,*)$ называется *шейповой группой* пунктированного пространства $(X,*)$ и обозначается $\check{\pi}_n(X,*)$:

$$\check{\pi}_n(X,*) = \varprojlim(\pi_n(X_\alpha,*),p_{\alpha\alpha'\#},A).$$

Если $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ — шейповый морфизм, то, переходя к пределу, получаем гомоморфизм шейповых групп $\check{\pi}_n(F)\colon \check{\pi}_n(X,*) \to \check{\pi}_n(Y,*)$. Следовательно, $\check{\pi}_n$ является ковариантным функтором из категории Sh-Top_* в категорию Set_* при $n=0$ или в категорию Grp_* при $n=1,2,\ldots$.

Аналогично определяются *гомологические про-группы* $\text{pro-}H_n(X)$:

$$\text{pro-}H_n(X) = (H_n(X_\alpha),H_n(p_{\alpha\alpha'}),A).$$

Переходя к пределу в последнем спектре, получаем известную *чеховскую гомологическую группу* $\check{H}_n(X)$ пространства X.

Следует отметить, что для пространств с хорошей локальной структурой, скажем ANR-пространств, гомотопические (гомологические) про-группы можно заменить на шейповые группы (чеховские гомологические группы). Однако в общем случае при переходе к пределу часть информации теряется. Поэтому гомотопические или гомологические про-группы содержат больше сведений о пространстве X, чем шейповые или чеховские гомологические группы.

Следующая теорема Мориты [306] является наиболее общей версией теоремы Уайтхеда в теории шейпов.

Теорема 48 (шейповый аналог теоремы Уайтхеда [306]). *Шейповый морфизм $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ конечномерных (в смысле* sd*) связных топологических пространств является шейповой эквивалентностью тогда и только тогда, когда он индуцирует изоморфизм гомотопических про-групп*

$$\text{pro-}\pi_n(F)\colon \text{pro-}\pi_n(X,*) \to \text{pro-}\pi_n(Y,*)$$

для всех n.

В отличие от классической теоремы Уайтхеда, последняя теорема справедлива для произвольных пространств и в ней гомотопические группы заменены на гомотопические про-группы. Однако возникло новое ограничение: конечномерность пространств X и Y. От этого ограничения отказаться нельзя. Соответствующий пример был построен в [122] с помощью метрического континуума Кана [221]. Пусть X_0 — CW-комплекс, полученный приклеиванием $(2p+1)$-клетки к сфере S^{2p} по отображению степени p, где p — простое число. Далее индуктивно строится пространство X_{n+1} как $(2p-2)$-кратная надстройка над пространством X_n:

$$X_{n+1} = \Sigma^{2p-2}(X_n)$$

для произвольного $n \geqslant 0$. Отображение $f_n\colon X_n \to X_{n-1}$, $n > 1$, также определяется индуктивно формулой

$$f_n = \Sigma^{2p-2}(f_{n-1}),$$

начиная со специальным образом построенного отображения $f_1\colon X_1 \to X_0$.

Кановский компакт K есть предел обратной последовательности

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} X_2 \longleftarrow \ldots .$$

Так как $\pi_k\big(\Sigma^{n(2p-2)},*\big) = 0$ при $n(2p-2) \geqslant k$, то $\text{pro-}\pi_k(K,*) = 0$ для всех k. Однако компакт K не имеет шейпа точки, поскольку для произвольного n композиция

$$f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n\colon X_n \to X_0$$

является существенным отображением, т. е. не гомотопна постоянному отображению (см. [37,38]). Доказательство этого факта следует также из результатов Тоды [379].

Первая теорема типа Уайтхеда в теории шейпов была получена М. Мошинской [313]. Она доказала теорему 48 в предположении, что $(X,*)$ и $(Y,*)$ — метризуемые континуумы. С. Мардешич [274] доказал эту теорему в случае, когда $(X,*)$ и $(Y,*)$ компактны, а $(Y,*)$ метризуемо, а также в случае, когда $(X,*)$ и $(Y,*)$ — произвольные пространства, а шейповый морфизм $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ индуцируется некоторым непрерывным отображением.

Для подвижных пространств шейповый аналог теоремы Уайтхеда 48 принимает более простую форму [127,141,232,313].

Теорема 49. *Пусть $(X,*)$ и $(Y,*)$ — подвижные метризуемые континуумы, имеющие конечную шейповую размерность. Шейповый морфизм $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ является шейповой эквивалентностью тогда и только тогда, когда он индуцирует изоморфизм $\check{\pi}_n(F)\colon \check{\pi}_n(X,*) \to \check{\pi}_n(Y,*)$ всех шейповых групп.*

Эта теорема следует из теоремы 48 и следующего результата, который представляет самостоятельный интерес [141, 232].

Теорема 50. *Пусть $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ — шейповый морфизм подвижных метризуемых континуумов. Если для заданного n индуцированный гомоморфизм*

$$\check{\pi}_n(F)\colon \check{\pi}_n(X,*) \to \check{\pi}_n(Y,*)$$

является изоморфизмом (эпиморфизмом) шейповых групп, то

$$\text{pro-}\pi_n(F)\colon \text{pro-}\pi_n(X,*) \to \text{pro-}\pi_n(Y,*)$$

является изоморфизмом (эпиморфизмом) про-групп.

Первые «бесконечномерные» теоремы Уайтхеда были доказаны Д. Эдвардсом и Р. Гэганом [154] и были обобщены в [126, 127]. Наиболее общими результатами являются следующие две теоремы Е. Дыдака [141].

Теорема 51. *Пусть $(X,*)$ и $(Y,*)$ — связные пространства, $(X,*)$ подвижно, а $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ — шейповое доминирование. Если*

$$\text{pro-}\pi_n(F)\colon \text{pro-}\pi_n(X,*) \to \text{pro-}\pi_n(Y,*)$$

является изоморфизмом для всех n, то F — шейповая эквивалентность.

Теорема 52. *Пусть $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ — шейповый морфизм связных пространств и выполняется одно из следующих двух условий:*

(i) $\operatorname{sd} X < \infty$ *и $(Y,*)$ подвижно;*

(ii) *$(X,*)$ подвижно и* $\operatorname{sd} Y < \infty$.

Если $\text{pro-}\pi_n(F)\colon \text{pro-}\pi_n(X,*) \to \text{pro-}\pi_n(Y,*)$ является изоморфизмом для всех n, то F — шейповая эквивалентность.

В частности, если $(X,*)$ подвижно и все про-группы $\text{pro-}\pi_n(X,*)$ тривиальны, то $\operatorname{sh}(X,*) = 0$. В последней теореме конечномерность пространств нельзя заменить на их подвижность. Дж. Драпер и Дж. Кислинг [122] построили пример отображения $f\colon (X,*) \to (Y,*)$ подвижных метризуемых континуумов, которое индуцирует изоморфизм всех гомотопических про-групп, однако не является шейповой эквивалентностью. Похожий пример был построен также Дж. Козловским и Дж. Сегалом [256].

Шейповый аналог теоремы Уайтхеда для подвижных морфизмов был получен П. С. Геворкяном и И. Попом [187].

Теорема 53. *Пусть $(X,*)$ и $(Y,*)$ — связные пространства, $\operatorname{sd} X < \infty$, $F\colon (X,*) \to (Y,*)$ — подвижный шейповый морфизм, являющийся шейповым доминированием. Если $\text{pro-}\pi_n(F)\colon \text{pro-}\pi_n(X,*) \to \text{pro-}\pi_n(Y,*)$ является изоморфизмом для всех n, то F — шейповая эквивалентность.*

Отметим, что справедливы также гомологические версии теоремы Уайтхеда (см. [275, 306, 342]). Для доказательства этих теорем ключевым является следующий результат (см. [306, 342]).

Теорема 54. *Пусть $F\colon (X,*)\to(Y,*)$ — шейповый морфизм. Если*

$$\text{pro-}\pi_0(X,*)=\text{pro-}\pi_1(X,*)=\text{pro-}\pi_0(Y,*)=\text{pro-}\pi_1(Y,*)=0,$$

то для всех $n\geqslant 2$ следующие два условия эквивалентны:

(i) pro-$\pi_k(F)$ *является изоморфизмом при $k<n$ и эпиморфизмом при $k=n$*;

(ii) pro-$H_k(F)$ *является изоморфизмом при $k<n$ и эпиморфизмом при $k=n$.*

Известный *гомоморфизм Гуревича* $\phi_n\colon \pi_n(X,*)\to H_n(X)$ естественным образом порождает морфизм pro-$\phi_n\colon$ pro-$\pi_n(X,*)\to$ pro-$H_n(X)$. Предельным переходом получается также *спектральный гомоморфизм Гуревича* $\check{\phi}_n\colon \check{\pi}_n(X,*)\to\check{H}_n(X)$.

Классическая теорема Гуревича утверждает, что если $(X,*)$ является $(n-1)$-связным пространством, т. е. $\pi_k(X,*)=0$ для всех $0\leqslant k\leqslant n-1$, то для любого $n\geqslant 2$ выполняются следующие условия:

(i) $H_k(X)=0$, $0\leqslant k\leqslant n-1$;

(ii) $\phi_n\colon \pi_n(X,*)\to H_n(X)$ является изоморфизмом;

(iii) ϕ_{n+1} является эпиморфизмом;

(iv) $\phi_1\colon \pi_1(X,*)\to H_1(X)$ является эпиморфизмом.

Эта теорема в различных версиях была перенесена на теорию шейпов многими авторами. Следующую теорему Гуревича в про-категории можно найти в [289].

Теорема 55. *Пусть $(X,*)$ — шейпово $(n-1)$-связное пространство, т. е.* pro-$\pi_k(X,*)=0$, $k\leqslant n-1$. *Тогда для всех $n\geqslant 2$ справедливы условия*

(i) pro-$H_k(X)=0$, $1\leqslant k\leqslant n-1$;

(ii) pro-$\phi_n\colon$ pro-$\pi_n(X,*)\to$ pro-$H_n(X)$ — *изоморфизм про-групп*;

(iii) pro-$\phi_{n+1}\colon$ pro-$\pi_{n+1}(X,*)\to$ pro-$H_{n+1}(X)$ — *эпиморфизм про-групп.*

Если $n=1$, то

(iv) pro-$\phi_1\colon$ pro-$\pi_1(X,*)\to$ pro-$H_1(X)$ — *эпиморфизм.*

Несколько иные формулировки этой теоремы есть в [55, 291, 342].

К. Куперберг [260] доказал следующую теорему, которая является частным случаем более общего результата М. Артина и Б. Мазура [55].

Теорема 56. *Если метризуемый компакт $(X,*)$ шейпово $(n-1)$-связен, $n\geqslant 2$, то спектральный гомоморфизм Гуревича $\check{\phi}_n\colon \check{\pi}_n(X,*)\to\check{H}_n(X)$ является изоморфизмом.*

Для подвижных метризуемых компактов $(X,*)$ условие шейповой $(n-1)$-связности можно заменить более слабым условием $\check{\pi}_k(X,*)=0$, $k\leqslant n-1$ (см. [260]).

Теорема 57. *Пусть* $(X,*)$ — *подвижный метризуемый компакт и* $\check{\pi}_k(X,*) = 0$ *для всех* $k \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$. *Тогда* $\check{\phi}_n\colon \check{\pi}_n(X,*) \to \check{H}_n(X)$ *является изоморфизмом.*

Условие подвижности в этом утверждении существенно. Действительно, пусть X — 2-кратная надстройка над 3-адическим соленоидом. Пространство X связно и $\check{\pi}_k(X,*) = 0$ для всех $k \leqslant 3$. Однако группа $\check{\pi}_4(X,*)$ не изоморфна $\check{H}_4(X)$, поскольку $\check{\pi}_4(X,*) \neq 0$, а $\check{H}_4(X) = 0$ (см. [261]).

В теореме 57 условие метризуемости компакта также является существенным. Дж. Кислинг [233] доказал, что для произвольного $n \geqslant 2$ существует такой неметризуемый подвижный континуум $(X,*)$, что $\check{\pi}_k(X,*) = 0$ для всех $k \leqslant n-1$, однако группа $\check{\pi}_n(X,*)$ не изоморфна $\check{H}_n(X)$.

Т. Портер [332], С. Мардешич и С. Унгар [291] и С. Унгар [385] доказали теорему 56 для пар (X,A) (см. также [306, 397]). Теорема Гуревича с применением гомологии Стинрода принадлежит Ю. Кодаме и А. Кояме [244].

Следует отметить, что первая спектральная теорема Гуревича была получена Д. Кристи [111], но она была доказана в сильной теории шейпов. В дальнейшем похожие теоремы с применением гомологии Стинрода были доказаны в [22, 244, 340].

8. Шейповая размерность пространств и отображений

Размерность топологических пространств не является шейповым инвариантом. Например, стягиваемое пространство, которое может иметь сколь угодно большую размерность, имеет шейп нульмерной точки. Поэтому возникает необходимость введения некоторого численного шейпового инварианта, играющего в теории шейпов роль, аналогичную той, какую играет размерность в топологии. Такой инвариант под названием *фундаментальная размерность* первоначально для метризуемых компактов был введён К. Борсуком [76].

Определение 9. *Фундаментальной размерностью* метризуемого компакта X (обозначение $\operatorname{Fd} X$) называется минимальная из размерностей $\dim Y$ всех таких метризуемых компактов Y, что $\operatorname{sh} Y \geqslant \operatorname{sh} X$:

$$\operatorname{Fd} X = \min\{\dim Y;\ \operatorname{sh} Y \geqslant \operatorname{sh} X\}.$$

Фундаментальная размерность метризуемых компактов основательно исследована С. Новаком [317—323] и С. Спижем [369, 370].

Для произвольных топологических пространств Е. Дыдак [128] ввёл понятие *деформационной размерности*, которое в слегка изменённой форме можно сформулировать следующим образом.

Определение 10. Топологическое пространство X имеет *деформационную размерность* $\operatorname{ddim} X \leqslant n$, если произвольное отображение $f\colon X \to P$

в ANR-пространство P гомотопически факторизуется через ANR-пространство P' размерности $\dim P' \leqslant n$, т. е. $f \simeq h \circ g$, где $g\colon X \to P'$ и $h\colon P' \to P$ — некоторые отображения.

С. Мардешич и Дж. Сегал [289] определили понятие *шейповой размерности* следующим образом.

Определение 11. Топологическое пространство X имеет *шейповую размерность* $\operatorname{sd} X \leqslant n$, если существует такой ассоциированный с X обратный ANR-спектр $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$, что каждое X_α, $\alpha \in A$, гомотопически доминируется некоторым ANR-пространством размерности не больше n.

Наименьшее число n, для которого выполняется неравенство $\operatorname{sd} X \leqslant n$, называется *шейповой размерностью* пространства X и обозначается $\operatorname{sd} X = n$.

Если неравенство $\operatorname{sd} X \leqslant n$ не выполняется ни для какого целого $n \geqslant 0$, то скажем, что X имеет *бесконечную шейповую размерность* (обозначение $\operatorname{sd} X = \infty$).

Справедлива следующая теорема [128].

Теорема 58. *Топологическое пространство X имеет шейповую размерность $\operatorname{sd} X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда существует такой ассоциированный с X обратный ANR-спектр $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$, что $\dim X_\alpha \leqslant n$ для всех $\alpha \in A$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{sd} X \leqslant n$. Рассмотрим ассоциированный с X обратный ANR-спектр $\mathbf{X} = \{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$, который удовлетворяет условию определения 11. Это значит, что для каждого пространства X_α существуют ANR-пространство Y_α размерности $\dim Y_\alpha \leqslant n$ и такие гомотопические классы $\mathbf{f}_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$ и $\mathbf{g}_\alpha\colon Y_\alpha \to X_\alpha$, что

$$\mathbf{g}_\alpha \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{1}_{X_\alpha}. \tag{3}$$

Теперь для произвольных $\alpha, \alpha' \in A$, $\alpha \leqslant \alpha'$ определим гомотопический класс $\mathbf{q}_{\alpha\alpha'}\colon Y_{\alpha'} \to Y_\alpha$ формулой

$$\mathbf{q}_{\alpha\alpha'} = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'} \mathbf{g}_{\alpha'}. \tag{4}$$

Заметим, что если $\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \alpha''$, то

$$\mathbf{q}_{\alpha\alpha'} \mathbf{q}_{\alpha'\alpha''} = \mathbf{q}_{\alpha\alpha''}. \tag{5}$$

Действительно, согласно (3) и (4) имеем

$$\mathbf{q}_{\alpha\alpha'} \mathbf{q}_{\alpha'\alpha''} = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'} \mathbf{g}_{\alpha'} \mathbf{f}'_\alpha \mathbf{p}_{\alpha'\alpha''} \mathbf{g}_{\alpha''} = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'} \mathbf{1}_{X_{\alpha'}} \mathbf{p}_{\alpha'\alpha''} \mathbf{g}_{\alpha''} = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha''} \mathbf{g}_{\alpha''} = \mathbf{q}_{\alpha\alpha''}.$$

Итак, мы построили обратный ANR-спектр $\mathbf{Y} = \{Y_\alpha, \mathbf{q}_{\alpha\alpha'}, A\}$, где $\dim Y_\alpha \leqslant n$ для всех $\alpha \in A$. Докажем, что этот обратный спектр ассоциирован с пространством X (см. определение 3).

Пусть $\alpha \in A$ — произвольный индекс. Определим $\mathbf{q}_\alpha\colon X \to Y_\alpha$ формулой

$$\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_\alpha. \tag{6}$$

Этот гомотопический класс удовлетворяет условию

$$\mathbf{q}_{\alpha\alpha'} \mathbf{q}_{\alpha'} = \mathbf{q}_\alpha, \tag{7}$$

где $\alpha \leqslant \alpha'$. В самом деле, в силу (3), (4) и (6) имеем

$$\mathbf{q}_{\alpha\alpha'}\mathbf{q}_{\alpha'} = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{g}_{\alpha'}\mathbf{f}_{\alpha'}\mathbf{p}_{\alpha'} = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{1}_{X_{\alpha'}}\mathbf{p}_{\alpha'} = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha.$$

Теперь проверим условие (ii) определения 3. Пусть P — произвольное ANR-пространство, $\mathbf{f}\colon X \to P$ — произвольный гомотопический класс. Тогда существуют индекс $\alpha \in A$ и такой гомотопический класс $\mathbf{h}_\alpha\colon X_\alpha \to P$, что

$$\mathbf{h}_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{f}. \tag{8}$$

Определим $\tilde{\mathbf{h}}_\alpha\colon Y_\alpha \to P$ формулой

$$\tilde{\mathbf{h}}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha \mathbf{g}_\alpha. \tag{9}$$

Покажем, что $\tilde{\mathbf{h}}_\alpha \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{f}$. Действительно, учитывая (3), (6), (8) и (9), получаем

$$\tilde{\mathbf{h}}_\alpha \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha \mathbf{g}_\alpha \mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha \mathbf{1}_{X_\alpha}\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{f}.$$

Осталось проверить условие (iii) определения 3. Пусть гомотопические классы $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\colon Y_\alpha \to P$ такие, что

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{q}_\alpha = \boldsymbol{\psi}\mathbf{q}_\alpha. \tag{10}$$

Из этого равенства по (6) следует, что

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \boldsymbol{\psi}\mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_\alpha. \tag{11}$$

Следовательно, существует такой $\alpha' \in A$, $\alpha' \geqslant \alpha$, что

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}. \tag{12}$$

Из (2) и (12) непосредственно следует, что

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{q}_{\alpha\alpha'} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{g}_{\alpha'} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{g}_{\alpha'} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{g}_{\alpha'} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{f}_\alpha \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}\mathbf{g}_{\alpha'} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{q}_{\alpha\alpha'}.$$

Достаточность утверждения теоремы очевидна. □

Следующая теорема [289] показывает, что для произвольного топологического пространства понятия деформационной размерности и шейповой размерности эквивалентны.

Теорема 59. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда $\operatorname{sd} X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{ddim} X \leqslant n$.*

Доказательство. Импликация $\operatorname{sd} X \leqslant n \implies \operatorname{ddim} X \leqslant n$ легко следует из теоремы 58.

Докажем импликацию $\operatorname{ddim} X \leqslant n \implies \operatorname{sd} X \leqslant n$. Рассмотрим ассоциированный с X обратный ANR-спектр $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$. Не теряя общности, можем предположить, что все пространства X_α являются CW-комплексами, а все отображения $p_{\alpha\alpha'}$ клеточные согласно теореме о клеточной аппроксимации.

Так как $\operatorname{ddim} X \leqslant n$, то для отображения $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$ существуют такой CW-комплекс P_α с $\dim P_\alpha \leqslant n$ и такие отображения $u_\alpha\colon X \to P_\alpha$ и $v_\alpha\colon P_\alpha \to X_\alpha$, что $p_\alpha \simeq v_\alpha \circ u_\alpha$. Причём согласно теореме о клеточной аппроксимации можно предположить, что $v_\alpha\colon P_\alpha \to X_\alpha$ — клеточное отображение, т. е. отображение в n-мерный остов $X_\alpha^n \subset X_\alpha$.

Теперь рассмотрим обратный спектр $\{X^n_\alpha, \mathbf{q}_{\alpha\alpha'}, A\}$, где X^n_α — n-мерный остов CW-комплекса X_α, а $q_{\alpha\alpha'} = p_{\alpha\alpha'}|X^n_{\alpha'}$. Для каждого $\alpha \in A$ определим отображение $q_\alpha \colon X \to X^n_\alpha$ формулой $q_\alpha = v_\alpha u_\alpha$. Несложно доказать, что этот обратный ANR-спектр ассоциирован с пространством X. Для завершения доказательства осталось применить теорему 58. □

Следующая теорема является следствием из теоремы 58.

Теорема 60. *Для произвольного топологического пространства X справедливо неравенство $\operatorname{sd} X \leqslant \dim X$.*

Доказательство. Пусть $\dim X \leqslant n$, $\{X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A\}$ — ассоциированный с X обратный спектр, состоящий из CW-комплексов X_α. Согласно теореме о клеточной аппроксимации мы можем предположить, что все отображения $p_{\alpha\alpha'}$ клеточные, т. е. $p_{\alpha\alpha'}(X^n_{\alpha'}) \subset X^n_\alpha$, где X^n_α — n-мерный остов CW-комплекса X_α. Рассмотрим обратный спектр $\{X^n_\alpha, \mathbf{q}_{\alpha\alpha'}, A\}$, где $q_{\alpha\alpha'} = p_{\alpha\alpha'}|X_{\alpha'}$. Так как $\dim X \leqslant n$, то существует отображение $q_\alpha \colon X \to X^n_\alpha$, такое что $i \circ q_\alpha \simeq p_\alpha$, где $i \colon X^n_\alpha \to X_\alpha$ — отображение вложения. Несложно доказать, что этот спектр с предельными проекциями $q_\alpha \colon X \to X^n_\alpha$, $\alpha \in A$, ассоциирован с пространством X. Теперь, применяя теорему 58, получаем $\operatorname{sd} X \leqslant n$. □

Теорема 61. *Пусть X и Y — произвольные пространства. Если $\operatorname{sh} X \leqslant \operatorname{sh} Y$, то $\operatorname{sd} X \leqslant \operatorname{sd} Y$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{sh} X \leqslant \operatorname{sh} Y$ и $\operatorname{sd} Y \leqslant n$. Рассмотрим произвольное отображение $f \colon X \to P$ в ANR-пространство P. По условию существуют такие шейповые морфизмы $F \colon X \to Y$ и $G \colon Y \to X$, что $G \circ F = 1_X$. Шейповый морфизм G отображению $f \colon X \to P$ ставит в соответствие некоторое отображение $G(f) \colon Y \to P$ (см. определение 9). Так как $\operatorname{sd} Y \leqslant n$, то существуют ANR-пространство P' с $\dim P' \leqslant n$ и такие отображения $u \colon Y \to P'$ и $v \colon P' \to P$, что $v \circ u \simeq G(f)$. Но тогда $v \circ F(u) \simeq F\bigl(G(f)\bigr) = f$. Значит, согласно теореме 59 $\operatorname{sd} X \leqslant n$. □

Следствие 6. *Если $\operatorname{sh} X = \operatorname{sh} Y$, то $\operatorname{sd} X = \operatorname{sd} Y$.*

Итак, размерность sd является шейповым инвариантом.

Из следствия 6 вытекает, что шейповая размерность стягиваемого пространства равна нулю. Так как шейповая размерность окружности S^1 равна 1, а шейповая размерность круга равна 0, то, значит, шейповая размерность $\operatorname{sd} X$ не является монотонной функцией от X. Однако, как показывает теорема 61, она является монотонной функцией от шейпа $\operatorname{sh} X$.

Теорема 62 (В. Голштыньский, см. [317]). *Пусть X — метризуемый компакт и $\operatorname{sd} X = n$. Тогда существует такой метризуемый компакт Y размерности $\dim Y = n$, что $\operatorname{sh} X = \operatorname{sh} Y$.*

Следствие 7. *Пусть X — метризуемый компакт. Тогда $\operatorname{sd} X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда существует такой метризуемый компакт Y, что $\operatorname{sh} X \leqslant \operatorname{sh} Y$ и $\dim Y \leqslant n$.*

Из этого следствия немедленно вытекает, что для метризуемых компактов справедливо равенство $\operatorname{sd} X = \operatorname{Fd} X$, т. е. понятия фундаментальной размерности Борсука (см. определение 9) и шейповой размерности Мардешича (см. определение 11) совпадают.

Замечание 3. Теорема 62 показывает, что в определении 9 фундаментальной размерности условие $\operatorname{sh} Y \geqslant \operatorname{sh} X$ можно заменить на $\operatorname{sh} Y = \operatorname{sh} X$.

Следующая теорема принадлежит К. Борсуку [76].

Теорема 63. *Пусть X и Y — метризуемые компакты. Тогда*

$$\operatorname{sd}(X \times Y) \leqslant \operatorname{sd} X + \operatorname{sd} Y. \tag{13}$$

С. Новак [318] показал, что существуют компактные связные полиэдры P и Q размерности $\dim P = m$, $\dim Q = n$, где $m, n \geqslant 3$, такие что $\dim(P \times Q) = \max\{m, n\}$. Из этого следует, что неравенство (13), вообще говоря, нельзя заменить на равенство

$$\operatorname{sd}(X \times Y) = \operatorname{sd} X + \operatorname{sd} Y. \tag{14}$$

С. Спиж [369, 370] доказал, что существует метризуемый континуум X шейповой размерности $\operatorname{sd} X = 2$, такой что

$$\operatorname{sd}(X \times S^n) < \operatorname{sd} X + n.$$

В частности, при $n = 1$

$$\operatorname{sd}(X \times S^1) = \operatorname{sd} X = 2. \tag{15}$$

Более того, если континуум X удовлетворяет условию (15), то для произвольного континуума Y, $\operatorname{sd} Y > 0$, справедливо также равенство

$$\operatorname{sd}(X \times Y) = \operatorname{sd}(S^1 \times Y). \tag{16}$$

Тем не менее справедлива следующая теорема Новака [322].

Теорема 64. *Пусть X и Y — такие метризуемые компакты, что $\operatorname{sd} X \neq 2$, $\dim Y = n$ и для произвольной нетривиальной абелевой группы G когомологическая группа $H^n(Y, G)$ нетривиальна. Тогда справедливо равенство* (14).

Дж. Кислинг [225] исследовал шейповую размерность топологических групп и, в частности, доказал следующую теорему.

Теорема 65. *Если X — компактная связная группа, то $\operatorname{sd} X = \dim X$.*

Шейповая размерность стоун-чеховской компактификации βX была изучена в [238]. Отметим следующий результат.

Теорема 66. *Пусть X — линделёфово пространство, а $K \subset \beta X \setminus X$ — некоторый континуум стоун-чеховского нароста. Тогда $\operatorname{sd} K = \dim K$.*

В связи с последней теоремой приведём следующий интересный результат А. Б. Уинслоу [414].

Теорема 67. *Стоун-чеховский нарост $\beta \mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{R}^3$ содержит $c = 2^{\aleph_0}$ континуумов с различными шейпами и 2^c континуумов с различными топологическими типами.*

Понятие шейповой размерности шейповых морфизмов и непрерывных отображений между топологическими пространствами было введёно в [189].

Скажем, что морфизм

$$(\mathbf{f}_\beta, \varphi)\colon \mathbf{X} = (X_\alpha, \mathbf{p}_{\alpha\alpha'}, A) \to \mathbf{Y} = (Y_\beta, \mathbf{q}_{\beta\beta'}, B)$$

обратных ANR-спектров имеет *размерность* $\dim(\mathbf{f}_\beta, \varphi) \leqslant n$, если для произвольного $\beta \in B$ существует такой индекс $\alpha \geqslant \varphi(\beta)$, что отображение $f_{\beta\alpha} := f_\beta p_{\varphi(\beta)\alpha}\colon X_\alpha \to Y_\beta$ гомотопически факторизуется через ANR-пространство P размерности $\dim P \leqslant n$, т. е. существуют отображения $u\colon X_\alpha \to P$ и $v\colon P \to Y_\beta$, такие что $f_{\beta\alpha} \simeq v \circ u$. Это свойство сохраняется при переходе к эквивалентным морфизмам обратных спектров. Следовательно, можно определить понятия *размерности морфизмов категории* pro-H-CW и *шейповой размерности* шейпового морфизма. Скажем, что шейповый морфизм $F\colon X \to Y$ имеет *шейповую размерность* $\operatorname{sd} F \leqslant n$, если соответствующий морфизм $\mathbf{f}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ категории pro-H-CW имеет размерность $\dim \mathbf{f} \leqslant n$. Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ условие $\operatorname{sd} f \leqslant n$ означает, что $\operatorname{sd} S(f) \leqslant n$.

Теорема 68. *Пространство X имеет шейповую размерность $\operatorname{sd} X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда тождественное отображение 1_X имеет шейповую размерность $\operatorname{sd} 1_X \leqslant n$.*

Теорема 69. *Пусть $F\colon X \to Y$ — шейповый морфизм. Тогда $\operatorname{sd} F \leqslant \min(\operatorname{sd} X, \operatorname{sd} Y)$.*

В частности, для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ справедливо неравенство $\operatorname{sd} f \leqslant \min(\operatorname{sd} X, \operatorname{sd} Y)$.

Из теоремы 69 следует, что отображения между шейпово конечномерными пространствами имеют конечную шейповую размерность. Возникает естественный вопрос: при шейпово конечномерном отображении может ли образ шейпово конечномерного пространства быть шейпово бесконечномерным? В [189] этот вопрос решается положительно, а также строится пример шейпово конечномерного сюръективного отображения $f\colon X \to Y$ между шейпово бесконечномерными пространствами X и Y.

Теорема 70. *Пусть $F\colon X \to Y$ — шейповая эквивалентность топологических пространств. Тогда если $\operatorname{sd} F = n$, то $\operatorname{sd} X = \operatorname{sd} Y = n$.*

Следующая теорема даёт важную характеризацию шейповой размерности отображения $f\colon X \to Y$.

Теорема 71. *Отображение $f\colon X \to Y$ имеет шейповую размерность $\operatorname{sd} f \leqslant n$ тогда и только тогда, когда для произвольного отображения $h\colon Y \to Q$ в ANR-пространство Q композиция $h \circ f$ гомотопически факторизуется через некоторое ANR-пространство P размерности $\dim P \leqslant n$, т. е. существуют такие отображения $u\colon X \to P$ и $v\colon P \to Q$, что $h \circ f \simeq v \circ u$.*

Теорема 72. *Пусть $F\colon X \to Y$ — шейповый морфизм размерности $\operatorname{sd} F \leqslant n$. Тогда для произвольной абелевой группы G и произвольного индекса $k > n$ гомоморфизмы $\check{F}_k\colon \check{H}_k(X; G) \to \check{H}_k(Y; G)$ являются тривиальными.*

9. Вложения в теории шейпов

Понятие *шейпового вложения* вводится по аналогии с топологическими и гомотопическими вложениями. Говорят, что метризуемый компакт X *шейпово вкладывается* в пространство Y, если существует такое компактное метризуемое подпространство $X' \subset Y$, что $\operatorname{sh} X = \operatorname{sh} X'$.

Сначала напомним классическую теорему вложения для конечномерных метризуемых компактов (см. [2]).

Теорема 73 (К. Менгер, Г. Нёбелинг, Л. С. Понтрягин). *Произвольный n-мерный метризуемый компакт X вкладывается в евклидово пространство $\mathbf{R}^{2n+1}$.*

Много работ было посвящено попыткам уменьшить размерность объемлющего евклидова пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$. А. Флорес [167] доказал, что без дополнительных условий это сделать невозможно, построив для произвольного n пример компактного n-мерного полиэдра, который не вкладывается в $\mathbf{R}^{2n}$. Однако произвольное n-мерное гладкое многообразие гладко вкладывается в $\mathbf{R}^{2n}$ (см. [413]).

Теперь напомним хорошо известный результат Дж. Столлингса о гомотопическом вложении конечных клеточных комплексов, который оказался весьма полезным при изучении шейповых вложений. Отметим, что простое доказательство теоремы Столлингса можно найти в [121].

Теорема 74 (Дж. Столлингс [371]). *Произвольный конечный n-мерный ($n > 0$) клеточный комплекс K гомотопически вкладывается в $\mathbf{R}^{2n}$, т. е. существует полиэдр M, имеющий гомотопический тип клеточного комплекса K, который вкладывается в $\mathbf{R}^{2n}$.*

В этой теореме уменьшить размерность пространства $\mathbf{R}^{2n}$ при $n = 2^k$, $k \geqslant 1$, невозможно, поскольку известно [326], что вещественная проективная плоскость $\mathbf{P}^n$ гомотопически не вкладывается в $\mathbf{R}^{2n-1}$.

В теории шейпов возникает естественный вопрос.

Проблема 1 (К. Борсук [10]). Всякий ли n-мерный метризуемый континуум шейпово вкладывается в $\mathbf{R}^{2n}$?

Ясно, что уже для $n = 1$ это не так, поскольку соленоиды, которые являются одномерными континуумами, шейпово не вкладываются в $\mathbf{R}^2$. Это следует из того, что соленоиды неподвижны, в то время как все плоские компакты подвижны. К. Борсуком [10] было доказано более общее утверждение, гласящее, что одномерный метризуемый континуум X шейпово вкладывается в $\mathbf{R}^2$ тогда и только тогда, когда X подвижен.

Проблема 1 имеет отрицательное решение и в случае метризуемых континуумов шейповой размерности $\operatorname{sd} X = n$. П. Ф. Дюваль и Л. С. Гуш [124] для произвольного $n = 2^k$, $k > 1$, построили метризуемый континуум X шейповой размерности $\operatorname{sd} X = n$, который шейпово не вкладывается в $\mathbf{R}^{2n}$. Тем не менее при некоторых дополнительных ограничениях проблема 1 решается положительно. Первые результаты в этом направлении были получены И. Иваншичем [215].

Теорема 75. *Пусть X — пунктированный 1-подвижный метризуемый континуум и* $\operatorname{sd} X = n \geqslant 3$. *Тогда X шейпово вкладывается в* $\mathbf{R}^{2n}$.

Эта теорема является следствием следующей более общей теоремы (см. [213]).

Теорема 76. *Пусть X — шейпово r-связный и $(r+1)$-подвижный метризуемый континуум,* $\operatorname{sd} X = n \geqslant 3$. *Тогда X шейпово вкладывается в* $\mathbf{R}^{2n-r}$.

В последней теореме можно отказаться от условия $(r+1)$-подвижности за счёт увеличения размерности пространства $\mathbf{R}^{2n-r}$ на один (см. [213]).

Теорема 77. *Пусть X — шейпово r-связный метризуемый континуум,* $\operatorname{sd} X = n$ *и* $n - r \geqslant 2$. *Тогда X шейпово вкладывается в* $\mathbf{R}^{2n-r+1}$.

Интересной является также следующая проблема, поставленная К. Борсуком [10].

Проблема 2. Пусть X и Y — метризуемые компакты, $\operatorname{sh} X \leqslant \operatorname{sh} Y$ и $Y \subset \mathbf{R}^n$. Верно ли, что X шейпово вкладывается в $\mathbf{R}^n$?

Л. С. Гуш и И. Иваншич [212] получили утвердительный ответ в этой проблеме при довольно сильных ограничениях.

Теорема 78. *Пусть X и Y — метризуемые континуумы,* $Y \subset \mathbf{R}^n$, $\dim Y = k$, *а X имеет шейп конечного комплекса и* $\operatorname{sh} X \leqslant \operatorname{sh} Y$. *Если* $3k < 2(n-1)$ *и* $k \geqslant 3$, *то X шейпово вкладывается в* $\mathbf{R}^n$.

Пример, построенный А. Кадлофом [220], показывает, что проблема 2 имеет отрицательный ответ. Точнее, существует компактный связный двумерный CW-комплекс X, который гомотопически доминируется компактным связным полиэдром $Y \subset \mathbf{R}^3$, однако шейпово не вкладывается в $\mathbf{R}^3$.

Напомним, что пространство X называется Π-*подобным*, где Π — семейство конечных полиэдров, если в каждое открытое конечное покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие, нерв которого гомеоморфен некоторому полиэдру P из Π. Если $\Pi = \{T^n,\ n \geqslant 0\}$, где $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ — n-мерный тор, то X называется T^n-*подобным*. Произвольный Π-подобный континуум является пределом обратного спектра, состоящего из элементов семейства Π. Вопросы шейпового вложения T^n-подобных континуумов в евклидовы пространства были исследованы Дж. Кислингом и Д. Уилсоном [239]. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 79. *Произвольная n-мерная компактная связная абелева топологическая группа A (топологически) вкладывается в* $\mathbf{R}^{n+2}$.

Теорема 80. *Пусть X — T^n-подобный континуум. Тогда X шейпово вкладывается в* $\mathbf{R}^{n+2}$.

Для доказательства последних теорем важными являются теорема М. Маккорда [296] о вложении предела обратного спектра в $\mathbf{R}^n$ и теорема Дж. Кислинга [225] (см. теорему 9) о характеризации T^n-подобных континуумов.

В [239] доказывается также, что произвольный T^n-подобный континуум вкладывается в $\mathbf{R}^{2n}$. Это утверждение для I^n-подобных континуумов было доказано Дж. Исбеллом [214].

10. Клеточноподобные отображения и теория шейпов

Клеточноподобные отображения (сокращённо CE-отображения) играют чрезвычайно важную роль в геометрической топологии. Они были определены С. Арментраутом [54] в терминах UV-свойств и интенсивно изучались до открытия теории шейпов. Здесь мы обсудим те аспекты клеточноподобных отображений, которые в первую очередь представляют интерес для теории шейпов. По другим вопросам существует довольно большой список литературы, в том числе обзорные статьи Р. Лачера [264], Р. Д. Эдвардса [161], Р. Гэгана [176], Л. Р. Рубина [343], А. Н. Дранишникова и Е. В. Щепина [18].

Определение 12. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *клеточноподобным*, если все слои $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, имеют тривиальные шейпы, т. е. $\mathrm{sh}\big(f^{-1}(y)\big) = 0$.

Если X, Y и Z — метризуемые ANR-компактны, а $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — клеточноподобные отображения, то композиция $g \circ f\colon X \to Z$ также является клеточноподобным отображением. Следовательно, метризуемые ANR-компакты и клеточноподобные отображения образуют категорию. Это утверждение не верно для компактов, не являющихся ANR-пространствами (см. [378]).

Теорема Смейла в теории шейпов была доказана Е. Дыдаком [128] (см. также [6, 242, 262]).

Теорема 81. *Пусть X и Y — метризуемые компакты, а $f\colon X \to Y$ — клеточноподобное отображение. Тогда индуцированный гомоморфизм гомотопических про-групп*

$$\text{pro-}\pi_n(f)\colon \text{pro-}\pi_n(X,*) \to \text{pro-}\pi_n(Y,*)$$

является изоморфизмом для всех n.

Следующая теорема является гомотопической характеризацией клеточноподобных отображений.

Теорема 82 (Р. Лачер [264]). *Отображение $f\colon X \to Y$ между компактными ANR-пространствами X и Y клеточноподобно тогда и только тогда, когда для произвольного открытого множества $V \subset Y$ отображение $f|f^{-1}(V)\colon f^{-1}(V) \to V$ является гомотопической эквивалентностью.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 83. *Клеточноподобное отображение $f\colon X \to Y$ между компактными ANR-пространствами X и Y является гомотопической эквивалентностью.*

Однако клеточноподобные отображения между произвольными компактами (без свойства быть абсолютным окрестностным ретрактом) уже не обладают похожим свойством, они не являются шейповыми эквивалентностями. Дж. Тейлор [378], основываясь на результате Дж. Адамса [38], построил клеточноподобное отображение из кановского компакта [221] X на гильбертов куб Q, которое не является шейповой эквивалентностью, поскольку кановский компакт X не имеет тривиального шейпа. Дж. Кислинг [230], используя пример Дж. Тейлора, построил клеточноподобное отображение гильбертова куба Q на неподвижный метризуемый компакт Y. Дж. Козловский и Дж. Сегал [256] и Е. Дыдак [128] построили примеры клеточноподобных отображений между подвижными метризуемыми компактами, которые также не являются шейповыми эквивалентностями. Я. ван Милл [300], развивая идею Дж. Кислинга [230], построил клеточноподобное отображение $f\colon Q \to X$, где X неподвижно, а все слои $f^{-1}(x)$, $x \in X$, гомеоморфны Q.

Тем не менее в некоторых случаях клеточноподобные отображения между метризуемыми компактами являются шейповыми эквивалентностями (см. [4, 6, 242, 362]).

Теорема 84. *Клеточноподобное отображение $f\colon X \to Y$ между конечномерными метризуемыми компактами X и Y является шейповой эквивалентностью.*

Действительно, в силу теоремы Смейла 81 отображение f индуцирует изоморфизм всех гомотопических про-групп, а так как $\dim X, \dim Y < \infty$, то по теореме Уайтхеда 48 f будет шейповой эквивалентностью. Так как кановский компакт и гильбертов куб бесконечномерны, то вышеупомянутый пример Дж. Тейлора показывает, что в последней теореме условие конечномерности метризуемых компактов существенно.

Итак, если X и Y конечномерны или являются ANR-пространствами, то клеточноподобное отображение $f\colon X \to Y$ является шейповой эквивалентностью.

Важным усилением клеточноподобных отображений является понятие *наследственной шейповой эквивалентности*, введённое Дж. Козловским [250, 251].

Определение 13. Сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ между метризуемыми компактами называется *наследственной шейповой эквивалентностью*, если для произвольного замкнутого подмножества $B \subset Y$ отображение $f|f^{-1}(B)\colon f^{-1}(B) \to B$ является шейповой эквивалентностью.

Очевидно, что наследственная шейповая эквивалентность $f\colon X \to Y$ является клеточноподобным отображением. Однако обратное неверно: отображение кановского компакта на гильбертов куб, построенное Дж. Тейлором [378], является клеточноподобным, но не является шейповой эквивалентностью.

Тем не менее существует широкий класс клеточноподобных отображений, которые являются наследственной шейповой эквивалентностью. Следующие две теоремы принадлежат Дж. Козловскому [250] (см. также [148]).

Теорема 85. *Клеточноподобное отображение $f\colon X \to Y$ между компактными ANR-пространствами является наследственной шейповой эквивалентностью.*

Теорема 86. *Пусть $f\colon X \to Y$ — клеточноподобное отображение между метризуемыми компактами. Если $\dim Y < \infty$, то f — наследственная шейповая эквивалентность.*

Дж. Козловский [250] доказал, что наследственная шейповая эквивалентность обладает следующим важным свойством.

Теорема 87. *Пусть $f\colon X \to Y$ — наследственная шейповая эквивалентность метризуемых компактов. Если X является ANR-пространством, то Y также является ANR-пространством.*

В последней теореме условие наследственной шейповой эквивалентности отображения $f\colon X \to Y$ нельзя заменить на более слабое условие клеточноподобности. Действительно, клеточноподобное отображение Кислинга [230] гильбертов куб Q отображает на неподвижный метризуемый компакт Y, который не является ANR-пространством.

Итак, образ ANR-компакта при клеточноподобном отображении не обязан быть ANR-компактом.

Следующая теорема Дж. Веста [408] показывает, что метризуемые ANR-компакты являются образами Q-многообразий при клеточноподобных отображениях.

Теорема 88. *Для произвольного метризуемого ANR-компакта X существует Q-многообразие M и клеточноподобное отображение $f\colon M \to X$.*

Эта теорема решает проблему Борсука [74] о конечномерности гомотопического типа ANR-компакта, поскольку Q-многообразие имеет гомотопический тип конечного CW-комплекса [106], а клеточноподобное отображение между ANR-компактами является гомотопической эквивалентностью (теорема 83).

В связи с теоремой 87 мы уже заметили, что образ ANR-компакта при клеточноподобном отображении не обязан быть ANR-компактом. Возникает вопрос: является ли образ конечномерного ANR-компакта при клеточноподобном отображении ANR-компактом? Из результатов Дж. Козловского [250] следует, что этот вопрос эквивалентен следующему вопросу: является ли образ конечномерного ANR-компакта при клеточноподобном отображении конечномерным?

Все эти вопросы тесно связаны с *проблемой повышения размерности клеточноподобными отображениями*:

(i) будет ли образ конечномерного метризуемого компакта при клеточноподобном отображении также конечномерным компактом?

В связи с этим заметим, что клеточноподобные отображения метризуемых компактов не повышают когомологическую размерность, а отображения метризуемых компактов, являющиеся наследственными шейповыми эквивалентностями, не повышают размерность $\dim$ (см. [250]).

Отметим, что в теории шейпов проблему (i) можно сформулировать также в следующей эквивалентной форме (см. [250]): пусть X — конечномерный метризуемый компакт, а $f\colon X \to Y$ — клеточноподобное отображение. Верно ли, что f является шейповой эквивалентностью?

Проблема (i) повышения размерности клеточноподобными отображениями оказалась достаточно сложной и содержательной. В течение долгих лет на её решение были направлены усилия многих топологов. Р. Д. Эдвардс [159] и Дж. Уолш [394] доказали, что отрицательное решение вопроса (i) эквивалентно положительному решению известной проблемы Александрова [45, 46]:

(ii) существует ли бесконечномерной метризуемый компакт, имеющий конечную когомологическую размерность?

Данная проблема была поставлена П. С. Александровым после того, как им был доказан следующий фундаментальный результат гомологической теории размерности.

Теорема 89 (П. С. Александров [45]). *Для любого конечномерного метризуемого компакта размерность совпадает с когомологической размерностью.*

Суть проблемы (ii) в следующем: верна ли последняя теорема без предположения конечномерности метризуемого компакта. В 1988 г. А. Н. Дранишников [16, 17] решил проблему Александрова, построив пример бесконечномерного компакта X, имеющего конечную когомологической размерность $\text{c-}\dim_{\mathbb{Z}} X \leqslant 3$.

Литература

[1] Александров П. С. Вступительное слово // УМН. — 1979. — Т. 34. — С. 11—13.

[2] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности: введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. — М.: Наука, 1973.

[3] Александров П. С., Федорчук В. В. Основные моменты в развитии теоретико-множественной топологии // УМН. — 1978. — Т. 33. — С. 3—48.

[4] Богатый С. А. О теореме Виеториса для шейпов, обратных пределах и одной задаче Ю. М. Смирнова // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211. — С. 764—767.

[5] Богатый С. А. Аппроксимационные и фундаментальные ретракты // Матем. сб. — 1974. — Т. 93. — С. 90—102.

[6] Богатый С. А. О теореме Виеториса в категории гомотопий и одной проблеме К. Борсука // Fund. Math. — 1974. — Vol. 84. — P. 209—228.

[7] Богатый С. А. Об n-подвижности в смысле Борсука // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1974. — Vol. 22. — P. 821—825.

[8] Богатый С. А. О сохранении шейпов при отображениях // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 224. — С. 261—264.

[9] Богатый С. А., Федорчук В. В. Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1986. — Т. 24. — С. 195—270.

[10] Борсук К. Теория шейпов. — М.: Мир, 1976.

[11] Бухштабер В. М., Мищенко А. С. K-теория на категории бесконечных клеточных комплексов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1968. — Т. 32. — С. 560—604.

[12] Геворкян П. С. О G-подвижности G-пространств // УМН. — 1988. — Т. 43. — С. 177—178.

[13] Геворкян П. С. Мажоранты для G-подвижных компактов // УМН. — 1989. — Т. 44. — С. 191—192.

[14] Геворкян П. С. Эквивариантная теорема Фрейденталя и эквивариантная n-подвижность // УМН. — 2001. — Т. 56. — С. 159—160.

[15] Геворкян П. С. Об одном критерии подвижности // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71. — С. 311—315.

[16] Дранишников А. Н. Гомологическая теория размерности // УМН. — 1988. — Т. 43, № 4 (262). — С. 11—55.

[17] Дранишников А. Н. О проблеме П. С. Александрова // Матем. сб. — 1988. — Т. 135 (177), № 4. — С. 551—557.

[18] Дранишников А. Н., Щепин Е. В. Клеточноподобные отображения. Проблема повышения размерности // УМН. — 1986. — Т. 41. — С. 49—90.

[19] Левшенко Б. Т. О классификационной теореме в теории шейпов // Сообщ. АН ГрузССР. — 1979. — Т. 93. — С. 26—28.

[20] Лисица Ю. Т. Продолжение непрерывных отображений и факторизационная теорема // Сиб. матем. журн. — 1973. — Т. 14. — С. 128—139.

[21] Лисица Ю. Т. Классификационная теорема Хопфа в теории шейпов // Сиб. матем. журн. — 1977. — Т. 18. — С. 143—160.

[22] Лисица Ю. Т. Теоремы Гуревича и Уайтхеда в сильной теории шейпов // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 283. — С. 38—43.

[23] Смирнов Ю. М. Об эквивариантных вложениях G-пространств // УМН. — 1976. — Т. 31. — С. 137—147.

[24] Смирнов Ю. М. Теория шейпов и непрерывные группы преобразований // УМН. — 1979. — Т. 34. — С. 119—123.

[25] Смирнов Ю. М. Теория шейпов. I // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1981. — Т. 19. — С. 181—207.

[26] Смирнов Ю. М. Теория шейпов для G-пар // УМН. — 1985. — Т. 40. — С. 151—165.

[27] Чепмен Т. Лекции о Q-многообразиях. — М.: Мир, 1981.

[28] Чигогидзе А. Ч. n-шейпы и n-когомотопические группы компактов // Матем. сб. — 1989. — Т. 180. — С. 322—335.

[29] Чигогидзе А. Ч. Теория n-шейпов // УМН. — 1989. — Т. 44. — С. 117—140.

[30] Чигогидзе А. Ч. n-Шейповый функтор на категории компактов // Тр. МИАН СССР. — 1992. — Т. 193. — С. 217—221.

[31] Шостак А. П. Шейповая эквивалентность в классах компактности // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 217. — С. 67—70.

[32] Шостак А. П. Шейпы в классах компактности: ретракты, экстензоры, подвижность // Уч. зап. Латв. ун-та. — 1975. — Т. 236. — С. 108—128.

[33] Щепин Е. В. Топология предельных пространств несчётных обратных спектров // УМН. — 1976. — Т. 31. — С. 191—226.

[34] Щепин Е. В. Конечномерный бикомпактный абсолютный окрестностный ретракт метризуем // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 233. — С. 304—307.

[35] Щепин Е. В. О тихоновских многообразиях // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246. — С. 551—554.

[36] Щепин Е. В. Метод обратных спектров в топологии бикомпактов // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31. — С. 299—315.

[37] Adams J. F. Lectures on $K(X)$: Mimeographed notes. — Univ. Manchester, 1962.

[38] Adams J. F. On the groups $J(X)$. IV // Topology. — 1966. — Vol. 5. — P. 21—71.

[39] Ageev S., Jimenez R., Rubin L. R. Cell-like resolutions in the strongly countable Z-dimensional case // Topology Its Appl. — 2004. — Vol. 140. — P. 5—14.

[40] Alexander J. W. A proof of the invariance of certain constants of analysis situs // Trans. Amer. Math. Soc. — 1915. — Vol. 16. — P. 148—154.

[41] Alexandroff P. S. Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie // Math. Ann. — 1926. — Vol. 96. — P. 489—511.

[42] Alexandroff P. S. Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1927. — Vol. 184. — P. 317—319.

[43] Alexandroff P. S. Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung // Math. Ann. — 1928. — Vol. 98. — P. 617—635.

[44] Alexandroff P. S. Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension // Ann. Math. — 1929. — Vol. 30. — P. 101—187.

[45] Alexandroff P. S. Dimensionstheorie, ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen // Math. Ann. — 1932. — B. 106. — S. 161—238.

[46] Alexandroff P. S. Einige Problemstellungen in der mengentheoretischen Topologie // Math. Sb. — 1936. — Vol. 43. — P. 619—634.

[47] Anderson R. D. On topological infinite deficiency // Michigan J. Math. — 1967. — Vol. 14. — P. 365—383.

[48] Anderson R. D. Strongly negligible sets in Fréchet manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 75. — P. 64—67.

[49] Anderson R. D., Henderson D. W., West J. E. Negligible subsets of infinite-dimensional manifolds // Compositio Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 143—150.

[50] Anderson R. D., Schori R. M. Factors of infinite-dimensional manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 142. — P. 315—330.

[51] Antonian S. A., Jimenez R., de Neymet S. Fiberwise retraction and shape properties of the orbit space // Glas. Mat. — 2000. — Vol. 35. — P. 191—210.

[52] Antonian S. A., Mardešić S. Equivariant shape // Fund. Math. — 1987. — Vol. 127. — P. 213—224.

[53] Armentrout S. Homotopy properties of decomposition spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 143. — P. 499—507.

[54] Armentrout S. UV properties of compact sets // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 143. — P. 487—498.

[55] Artin M., Mazur B. Etale Homotopy. — Berlin: Springer, 1969. — (Lect. Notes Math.; Vol. 100).

[56] Avakyan T. A., Gevorgyan P. S. Strong movable categories and strong movability of topological spaces // J. Contemp. Math. Anal. — 2010. — Vol. 45. — P. 52—59.

[57] Baladze V. Characterization of precompact shape and homology properties of remainders // Topology Its Appl. — 2004. — Vol. 142. — P. 73—88.

[58] Baladze V. On coshapes of topological spaces and continuous maps // Georgian Math. J. — 2009. — Vol. 16. — P. 229—242.

[59] Baladze V. The (co) shape and (co) homological properties of continuous maps // Matem. Vesnik. — 2014. — Vol. 66. — P. 235—247.

[60] Ball B. J. Alternative approaches to proper shape theory // Studies in Topology. — New York: Academic Press, 1975. — P. 1—27.

[61] Ball B. J., Sher R. B. A theory of proper shape for locally compact metric spaces // Fund. Math. — 1974. — Vol. 86. — P. 163—192.

[62] Bauer F. W. A shape theory with singular homology // Pacific J. Math. — 1976. — Vol. 64. — P. 25—65.

[63] Bauer F. W. A characterization of movable compacta // J. Reine Angew. Math. — 1977. — Vol. 293. — P. 394—417.

[64] Bauer F. W. Bordism groups and shape theory // Topology Its Appl. — 1984. — Vol. 17. — P. 115—122.

[65] Bauer F. W. Extensions of generalized homology theories // Pacific J. Math. — 1987. — Vol. 128. — P. 25—61.

[66] Bauer F. W. A strong-shape theoretical version of a result due to E. Lima // Topology Its Appl. — 1991. — Vol. 40. — P. 17—21.

[67] Bauer F. W. A strong shape theory admitting an S-dual // Topology Its Appl. — 1995. — Vol. 62. — P. 207—232.

[68] Bestvina M. Characterizing k-dimensional universal Menger compacta // Mem. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 71 (380). — P. 1—110.

[69] Bilan N. K. On some coarse shape invariants // Topology Its Appl. — 2010. — Vol. 157. — P. 2679—2685.

[70] Bilan N. K. The coarse shape groups // Topology Its Appl. — 2010. — Vol. 157. — P. 894—901.

[71] Bilan N. K. Towards the algebraic characterization of (coarse) shape path connectedness // Topology Its Appl. — 2013. — Vol. 160. — P. 538—545.

[72] Bilan N. K., Uglešić N. The coarse shape // Glas. Mat. — 2007. — Vol. 42. — P. 145—187.

[73] Blankinship W. A. Generalization of a construction of Antoine // Ann. Math. — 1951. — Vol. 53. — P. 276—297.

[74] Borsuk K. Sur l'élimination de phenomènes paradoxaux en topologie générale // Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam, 1954. — Amsterdam: North-Holland, 1957. — P. 197—208.

[75] Borsuk K. Concerning homotopy properties of compacta // Fund. Math. — 1968. — Vol. 62. — P. 223—254.

[76] Borsuk K. Concerning the notion of the shape of compacta // Proc. Int. Symp. Topology Ists Appl. (Herceg-Novi, 1968). — Savez Društava Mat. Fiz. Astronom., Beograd, 1969. — P. 98—104.

[77] Borsuk K. Fundamental retracts and extensions of fundamental sequences // Fund. Math. — 1969. — Vol. 64. — P. 55—85.

[78] Borsuk K. On movable compacta // Fund. Math. — 1969. — Vol. 66. — P. 137—146.

[79] Borsuk K. A note on the theory of shape of compacta // Fund. Math. — 1970. — Vol. 67. — P. 265—278.

[80] Borsuk K. On the concept of shape for metrizable spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1970. — Vol. 18. — P. 127—132.

[81] Borsuk K. On the homotopy types of some decomposition spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1970. — Vol. 18. — P. 235—239.

[82] Borsuk K. On the shape of the suspension // Colloq. Math. — 1970. — Vol. 21. — P. 247—252.

[83] Borsuk K. On the n-movability // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1972. — Vol. 20. — P. 859—864.

[84] Borsuk K. On several problems in the theory of shape // Studies in Topology. — New York: Academic Press, 1975. — P. 67—79.

[85] Borsuk K. Theory of Shape. — Warszawa: Polish Sci. Publ., 1975.

[86] Borsuk K., Dydak J. What is the theory of shape? // Bull. Austr. Math. Soc. — 1980. — Vol. 22. — P. 161—198.

[87] Borsuk K., Holsztyński W. Concerning the ordering of shapes of compacta // Fund. Math. — 1970. — Vol. 68. — P. 107—115.

[88] Brown E. M. Cohomology theories // Ann. Math. — 1962. — Vol. 75. — P. 467—484.

[89] Bykov A., Montiel A. L. K. Strong G-fibrations and orbit projections // Topology Its Appl. — 2014. — Vol. 163. — P. 46—65.

[90] Bykov A., Texis M. Equivariant strong shape // Topology Its Appl. — 2007. — Vol. 154. — P. 2026—2039.

[91] Bykov A., Zerkalov L. G. Cotelescopes and approximate lifting properties in shape theory // Topology Its Appl. — 1996. — Vol. 73. — P. 197—212.

[92] Calder A., Hastings H. M. Realizing strong shape equivalences // J. Pure Appl. Algebra. — 1981. — Vol. 20. — P. 129—156.

[93] Case J. H., Chamberlin R. Characterizations of tree-like continua // Pacific J. Math. — 1960. — Vol. 10. — P. 73—84.

[94] Cathey F. W. Strong shape theory // Shape Theory Geom. Topology. — 1981. — Vol. 870. — P. 215—238.

[95] Cathey F. W. Shape fibrations and strong shape theory // Topology Its Appl. — 1982. — Vol. 14. — P. 13—30.

[96] Cathey F. W., Segal J. Strong shape theory and resolutions // Topology Its Appl. — 1983. — Vol. 15. — P. 119—130.

[97] Cathey F. W., Segal J. Homotopical approach to strong shape or completion theory // Topology Its Appl. — 1985. — Vol. 21. — P. 167—192.

[98] Čech E. Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque // Fund. Math. — 1932. — Vol. 19. — P. 149—183.

[99] Čerin Z. On various relative proper homotopy groups // Tsukuba J. Math. — 1980. — Vol. 4. — P. 177—202.

[100] Čerin Z. Lefschetz movable maps // J. Math. Pures Appl. — 1993. — Vol. 72. — P. 81—103.

[101] Čerin Z. Equivariant shape theory // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1995. — Vol. 117. — P. 303—320.

[102] Čerin Z. Shape via multi-nets // Tsukuba J. Math. — 1995. — Vol. 19. — P. 245—268.

[103] Čerin Z. Equivalence of shape fibrations and approximate fibrations // Topology Its Appl. — 1997. — Vol. 76. — P. 9—26.

[104] Chapman T. A. On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape // Fund. Math. — 1972. — Vol. 76. — P. 181—193.

[105] Chapman T. A. Shapes of finite-dimensional compacta // Fund. Math. — 1972. — Vol. 76. — P. 261—276.

[106] Chapman T. A. Compact Hilbert cube manifolds and the invariance of Whitehead torsion // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 79. — P. 52—56.

[107] Chapman T. A. Simple homotopy theory for ANR's // Topology Its Appl. — 1977. — Vol. 7. — P. 165—174.

[108] Chapman T. A. Topological invariance of Whitehead torsion // Amer. J. Math. — 1974. — Vol. 96. — P. 488—497.

[109] Chigogidze A. Shape properties of nonmetrizable spaces // Topology Its Appl. — 1993. — Vol. 53. — P. 259—269.

[110] Chigogidze A. Infinite dimensional topology and shape theory. — Handbook of Geometric Topology / R. Daverman, R. Sher, eds. — Amsterdam: North-Holland, 2001. — P. 307—371.

[111] Christie D. E. Net homotopy for compacta // Trans. Amer. Math. Soc. — 1944. — Vol. 56. — P. 275—308.

[112] Coram D., Daverman R., Duvall P. A loop condition for embedded compacta // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 53. — P. 205—212.

[113] Coram D. S., Duvall P. F. Approximate fibrations // Rocky Mountain J. Math. — 1977. — - Vol. 7. — P. 275—288.

[114] Cordier J. M., Porter T. Vogt's theorem on categories of homotopy coherent diagrams // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1986. — Vol. 100. — P. 65—90.

[115] Cordier J. M., Porter T. Pattern recognition and categorical shape theory // Pattern Recognition Letters. — 1988. — Vol. 7. — P. 73—76.

[116] Cordier J. M., Porter T. Shape Theory: Categorical Methods of Approximation. — Dover, 2008.

[117] Cox C. Three questions of Borsuk concerning movability and fundamental retraction // Fund. Math. — 1973. — Vol. 80. — P. 169—179.

[118] Dadarlat M. Shape theory and asymptotic morphismsfor C^*-algebras // Duke Math. J. — 1993. — Vol. 73. — P. 687—711.

[119] Deleanu A., Hilton P. Borsuk shape and a generalization of Grothendieck's definition of pro-category // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1976. — Vol. 79. — P. 473—482.

[120] Demers L. On spaces which have the shape of CW-complexes // Fund. Math. — 1975. — Vol. 90. — P. 1—9.

[121] Dranišnikov A. N., Repovš D. Embedding up to homotopy type in Euclidean space // Bull. Austr. Math. Soc. — 1993. — Vol. 47. — P. 145—148.

[122] Draper J., Keesling J. E. An example concerning the Whitehead theorem in shape theory // Fund. Math. — 1976. — Vol. 92. — P. 255—259.

[123] Duvall P. F., Husch L. S. A continuum of dimension n which does not embed up to shape in $2n$-space // Proc. Int. Conf. on Geom. Topology. — 1980. — P. 113—119.

[124] Duvall P. F., Husch L. S. Embedding Coverings into Bundles with Applications. — Providence: Amer. Math. Soc., 1982. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 263).

[125] Dydak J. Movability and the shape of decomposition spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1975. — Vol. 23. — P. 447—452.

[126] Dydak J. On the Whitehead theorem in pro-homotopy and on question of Mardešić // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1975. — Vol. 23. — P. 775—779.

[127] Dydak J. Some remarks concerning the Whitehead theorem in shape theory // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1975. — Vol. 23. — P. 437—445.

[128] Dydak J. Some remarks on the shape of decomposition spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1975. — Vol. 23. — P. 561—563.

[129] Dydak J. An algebraic condition characterizing FANR-spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1976. — Vol. 24. — P. 501—503.

[130] Dydak J. Concerning the abelization of the first shape group of pointed continua // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1976. — Vol. 24. — P. 615—620.

[131] Dydak J. 1-movable continua need not be pointed 1-movable // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 559—562.

[132] Dydak J. A simple proof that pointed FANR-spaces are regular fundamental retracts of ANR's // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 55—62.

[133] Dydak J. On a paper of Y. Kodama // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 165—170.

[134] Dydak J. Some properties of nearly 1-movable continua // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 685—689.

[135] Dydak J. On LC^n-divisors // Topology Proc. — 1978. — Vol. 3. — P. 319—333.

[136] Dydak J. On unions of movable spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1978. — Vol. 26. — P. 57—60.

[137] Dydak J. On algebraic properties of continua // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. — 1979. — Vol. 21. — P. 717—721.

[138] Dydak J. On algebraic properties of continua, II // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. — 1979. — Vol. 21. — P. 723—729.

[139] Dydak J. On internally movable compacta // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1979. — Vol. 27. — P. 107—110.

[140] Dydak J. On maps preserving LC^n-divisors // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. — 1979. — Vol. 21. — P. 889—893.

[141] Dydak J. The Whitehead and Smale theorems in shape theory // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) — 1979. — Vol. 156. — P. 1—50.

[142] Dydak J. Pointed and unpointed shape and pro-homotopy // Fund. Math. — 1980. — Vol. 107. — P. 57—69.

[143] Dydak J. Local n-connectivity of quotient spaces and one-point compactifications // Shape Theory and Geometric Topology (Dubrovnik, Yugoslavia, 1981) / S. Mardešić, J. Segal, eds. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 870). — P. 48—72.

[144] Dydak J. Extension theory: The interface between set-theoretic and algebraic topology // Topology Appl. — 1996. — Vol. 74. — P. 225—258.

[145] Dydak J., Jimenez R. Movability in the sense of n-shape // Topology Its Appl. — 2005. — Vol. 146. — P. 51—56.

[146] Dydak J., Nowak S. Strong shape for topological spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 323. — P. 765—796.

[147] Dydak J., Nowak S., Strok S. On the union of two FANR-sets // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1976. — Vol. 24. — P. 485—489.

[148] Dydak J., Segal J. Shape theory: An introduction. — Berlin: Springer, 1978. — (Lect. Notes Math.; Vol. 688).

[149] Eberhart C., Gordh G. R., Mack J. The shape classification of torus-like and (n-sphere)-like continua // General Topology Appl. — 1974. — Vol. 4. — P. 85—94.

[150] Edwards D. A. Etale homotopy theory and shape // Algebraic and Geometrical Methods in Topology. — Berlin: Springer, 1974. — (Lect. Notes Math.; Vol 428). — P. 58—107.

[151] Edwards D. A., Geoghegan R. Shapes of complexes, ends of manifolds, homotopy limits and the Wall obstruction // Ann. Math. — 1975. — Vol. 101. — P. 521—535. Correction: 1976. — Vol. 104. — P. 379.

[152] Edwards D. A., Geoghegan R. The stability problem in shape, and a Whitehead theorem in pro-homotopy // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 214. — P. 261—277.

[153] Edwards D. A., Geoghegan R. Compacta weak shape equivalent to ANR's // Fund. Math. — 1976. — Vol. 90. — P. 115—124.

[154] Edwards D. A., Geoghegan R. Infinite-dimensional Whitehead and Vietoris theorems in shape and pro-homotopy // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 219. — P. 351—360.

[155] Edwards D. A., Geoghegan R. Stability theorems in shape and pro-homotopy // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 222. — P. 389—403.

[156] Edwards D. A., Hastings H. M. Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology. — Berlin: Springer, 1976. — (Lect. Notes Math.; Vol. 542).

[157] Edwards D. A., Hastings H. M. Čech theory, its past, present and future // Rocky Mountain J. Math. — 1980. — Vol. 10. — P. 429—468.

[158] Edwards D. A., McAuley P. T. The shape of a map // Fund. Math. — 1977. — Vol. 96. — P. 195—210.

[159] Edwards R. D. A theorem and a question related to cohomological dimension and cell-like maps // Notices Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 25. — A-259—A-260.

[160] Edwards R. D. Characterizing infinite dimensional manifolds topologically (after Henryk Toruńczyk) // Sém. Bourbaki No. 540, 1978/79. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Math.; Vol. 842). — P. 278—302.

[161] Edwards R. D. The topology of manifolds and cell-like maps // Proc. Int. Congress Math. (Helsinki, 1978). — Helsinki: Acad. Sci. Fennica, 1980. — P. 111—127.

[162] Edwards R. D., Kirby R. C. Deformations of spaces of imbeddings // Ann. Math. — 1971. — Vol. 93. — P. 63—88.

[163] Ferry S. A stable converse to the Vietoris-Smale theorem with applications to shape theory // Trans. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 261. — P. 369—386.

[164] Ferry S. Homotopy, simple homotopy and compacta // Topology. — 1980. — Vol. 19. — P. 101—110.

[165] Ferry S. Shape equivalence does not imply CE equivalence // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 80. — P. 154—156.

[166] Fischer H., Zastrow A. Generalized universal covering spaces and the shape group // Fund. Math. — 2007. — Vol. 197. — P. 167—196.

[167] Flores A. Über die Existenz n-dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n} topologisch einbettbar sind // Erg. Math. Kolloq. — 1932. — Vol. 5. — P. 17—24.

[168] Fox R. H. On shape // Fund. Math. — 1972. — Vol. 74. — P. 47—71.

[169] Frei A. On categorical shape theory // Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques. — 1976. — Vol. 17. — P. 261—294.

[170] Freudenthal H. Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen // Compositio Math. — 1937. — Vol. 4. — P. 145—234.

[171] Freyd P. Splitting homotopy idempotents // Proc. Conf. on Categorical Algebra (La Jolla 1965) / S. Eilenberg, G. M. Kelley, eds. — Berlin: Springer, 1966. — P. 173—176.

[172] Freyd P., Heller A. Splitting homotopy idempotents. II // J. Pure Appl. Algebra. — 1993. — Vol. 89. — P. 93—106.

[173] Gaszak A. The Whitehead theorem in equivariant shape theory // Glas. Mat. — 1989. — Vol. 234. — P. 417—425.

[174] Geoghegan R. Elementary proofs of stability theorems in pro-homotopy and shape // General Topology Appl. — 1978. — Vol. 8. — P. 265—281.

[175] Geoghegan R. The problem of pointed versus unpointed domination in shape theory // Topology Proc. — 1978. — Vol. 3. — P. 95—107.

[176] Geoghegan R. Open problems in infinite-dimensional topology // Topology Proc. — 1979. — Vol. 4. — P. 287—338.

[177] Geoghegan R. The shape of a group — connections between shape theory and the homology of groups // Geometric Algebraic Topology. — 1986. — Vol. 18. — P. 271—280.

[178] Geoghegan R., Krasinkiewicz J. Empty components in strong shape theory // Topology Its Appl. — 1991. — Vol. 41. — P. 213—233.

[179] Geoghegan R., Lacher R. C. Compacta with the shape of finite complexes // Fund. Math. — 1976. — Vol. 92. — P. 25—27.

[180] Geoghegan R., Summerhill R. Infinite-dimensional methods in finite-dimensional geometric topology // Bull. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 78. — P. 1009—1014.

[181] Geoghegan R., Summerhill R. Concerning the shapes of finite-dimensional compacta // Trans. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 179. — P. 281—292.

[182] Gevorgyan P. S. Movable categories // Glas. Mat. — 2003. — Vol. 38. — P. 177—183.

[183] Gevorgyan P. S. Some questions of equivariant movability // Glas. Mat. — 2004. — Vol. 39. — P. 185—198.

[184] Gevorgyan P. S. Equivariant movability of topological groups // Topology Its Appl. — 2012. — Vol. 159. — P. 1761—1766.

[185] Gevorgyan P. S. Yu. M. Smirnov's general equivariant shape theory // Topology Its Appl. — 2013. — Vol. 160. — P. 1232—1236.

[186] Gevorgyan P. S., Pop I. Uniformly movable categories and uniform movability of topological spaces // Bull. Polon. Acad. Sci. Math. — 2007. — Vol. 55. — P. 229—242.

[187] Gevorgyan P. S., Pop I. Movability and uniform movability of shape morphisms // Bull. Polon. Acad. Sci. Math. — 2016. — Vol. 64. — P. 69—83.

[188] Gevorgyan P. S., Pop I. On the n-movability of maps // Topology Its Appl. — 2017. — Vol. 221. — P. 309—325.

[189] Gevorgyan P. S., Pop I. Shape dimension of maps // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2018. — P. 3—11.

[190] Gevorkian P. S. An equivariant generalization of Arens—Ellis theorem // J. Contemp. Math. Analysis. — 1996. — Vol. 31. — P. 70—75.

[191] Ghanei F., Mirebrahimi H., Mashayekhy B., Nasri T. Topological coarse shape homotopy groups // Topology Its Appl. — 2017. — Vol. 219. — P. 17—28.

[192] Giraldo A., Jiménez R., Morón M. A., Ruiz del Portal F. R., Sanjurjo J. M. R. Pointed shape and global attractors for metrizable spaces // Topology Its Appl. — 2011. — Vol. 158. — P. 167—176.

[193] Godlewski S. On the shape of solenoids // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1969. — Vol. 17. — P. 623—627.

[194] Godlewski S. Solenoids of comparable shapes are homeomorphic // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1970. — Vol. 18. — P. 565—566.

[195] Godlewski S. An example resolving some Borsuk's problems concerning shapes of metric spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1975. — Vol. 23. — P. 213.

[196] Grothendieck A. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. II // Sém. Bourbaki, 12 eme année, 1959-60, exposé 190—195.

[197] Günther B. Strong shape of compact Hausdorff spaces // Topology Its Appl. — 1991. — Vol. 42. — P. 165—174.

[198] Günther B. The use of semisimplicial complexes in strong shape theory // Glas. Mat. — 1992. — Vol. 27. — P. 101—144.

[199] Günther B. The Vietoris system in strong shape and strong homology // Fund. Math. — 1992. — Vol. 141. — P. 147—168.

[200] Günther B., Segal J. Every attractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedron // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 119. — P. 321—329.

[201] Handel D., Segal J. An acyclic continuum with non-movable suspensions // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1973. — Vol. 21. — P. 171—172.

[202] Handel D., Segal J. Finite shape classifications // Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1973. — Vol. 24. — P. 37—45.

[203] Handel D., Segal J. Shape classification of (projective m-space)-like continua // General Topology Appl. — 1973. — Vol. 3. — P. 111—119.

[204] Handel D., Segal J. On shape classifications and invariants // General Topology Appl. — 1974. — Vol. 4. — P. 109—124.

[205] Hastings H. M. Suspensions of strong shape eqUIvalences are CE equivalences // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 87. — P. 743—749.

[206] Hastings H. M., Heller A. Splitting homotopy idempotents // Shape Theory and Geometric Topology (Dubrovnik, Yugoslavia, 1981) / S. Mardešić, J. Segal, eds. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 870). — P. 23—36.

[207] Hastings H. M., Heller A. Homotopy idempotents on finite-dimensional complexes split // Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 85. — P. 619—622.

[208] Heller A. On the representability of homotopy functors // J. London Math. Soc. — 1981. — Vol. 23. — P. 551—562.

[209] Henderson D. W. Applications of infinite-dimensional manifolds to quotient spaces of complete ANR's // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1971. — Vol. 19. — P. 747—753.

[210] Hollingsworth J. G., Rushing T. B. Embeddings of shape classes of compacta in the trivial range // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 60. — P. 103—110.

[211] Holsztyński W. An extension and axiomatic characterization of the Borsuk's theory of shape // Fund. Math. — 1971. — Vol. 70. — P. 157—168.

[212] Husch L. S., Ivanšić I. Shape domination and imbedding up to shape // Compositio Math. — 1980. — Vol. 40. — P. 153—166.

[213] Husch L. S., Ivanšić I. Embedding compacta up to shape. — Shape Theory and Geometric Topology. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 870). — P. 119—134.

[214] Isbell J. R. Embeddings of inverse limits // Ann. Math. — 1959. — Vol. 70. — P. 73—84.

[215] Ivanšić I. Embedding compacta up to shape // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 471—475.

[216] Ivanšić I., Rubin L. R. Borsuk's index and pointed movability for projective movable continua // Topology Its Appl. — 1999. — Vol. 94. — P. 147—153.

[217] Ivanšić I., Sher R. B., Venema G. A. Complement theorems beyond the trivial range // Illinois J. Math. — 1981. — Vol. 25. — P. 209—220.

[218] Iwamoto Y., Sakai K. Strong n-shape theory // Topology Its Appl. — 2002. — Vol. 122. — P. 253—267.

[219] Kadlof A. Remarks on Borsuk's problems concerning the operation of the addition of pointed shapes // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1976. — Vol. 24. — P. 1001—1006.

[220] Kadlof A. An example resolving Borsuk's problem concerning the index $e(X)$ // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1978. — Vol. 26. — P. 905—907.

[221] Kahn D. S. An example in Čech cohomology // Proc. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 16. — P. 584.

[222] Kato H. Fiber shape categories // Tsukuba J. Math. — 1981. — Vol. 5. — P. 247—265.

[223] Kato H. Shape properties of Whitney maps for hyperspaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 297. — P. 529—546.

[224] Keesling J. E. Continuous functions induced by shape morphisms // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 41. — P. 315—320.

[225] Keesling J. E. On the shape of torus-like continua and compact connected topological groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 40. — P. 297—302.

[226] Keesling J. E. An algebraic property of Čech cohomology groups which prevents local connectivity and movability // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 190. — P. 151—162.

[227] Keesling J. E. On movability and local connectivity // Topology Conference. Virginia Polytechnic Inst. and State Univ., March 22—24, 1973 / R. F. Dickman Jr., P. Fletcher, eds. — (Lect. Notes Math.; Vol. 375). — Berlin: Springer, 1974. — P. 158—167.

[228] Keesling J. E. Products in the shape category and some applications // Sym. Math. Istituto Nazionale di Alta Matematica 16 (Roma, 1973). — New York: Academic Press, 1974. — P. 133—142.

[229] Keesling J. E. Shape theory and compact connected abelian topological groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 194. — P. 349—358.

[230] Keesling J. E. A non-movable trivial-shape decomposition of the Hilbert cube // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1975. — Vol. 23. — P. 997—998.

[231] Keesling J. E. The Čech cohomology of compact connected Abelian topological groups with application to shape theory // Geometric Topology / Glaser L. C., Rushing T. B., eds. — (Lect. Notes Math.; Vol. 438). — Berlin: Springer, 1975. — P. 325—331.

[232] Keesling J. E. On the Whitehead theorem in shape theory // Fund. Math. — 1976. — Vol. 92. — P. 247—253.

[233] Keesling J. E. Some examples in shape theory using the theory of compact connected Abelian topological groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 219. — P. 169—188.

[234] Keesling J. E. The Čech cohomology of movable and n-movable spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 219. — P. 149—167.

[235] Keesling J. E. Algebraic invariants in shape theory // Topology Proc. — 1977. — Vol. 1. — P. 115—124.

[236] Keesling J. E. The Stone—Čech compactification and shape dimension // Topology Proc. — 1977. — Vol. 2. — P. 483—508.

[237] Keesling J. E. Decompositions of the Stone—Čech compactification which are shape equivalences // Pacific J. Math. — 1978. — Vol. 75. — P. 455—466.

[238] Keesling J. E. Shape theory and the Stone—Čech compactification // Proc. Int. Conf. on Geom. Top. (Warszawa, 1978). — Warszawa: Polish Sci. Publ., 1980. — P. 235—240.

[239] Keesling J. E., Wilson D. C. Embedding T^n-like continua in Euclidean space // Topology Appl. — 1985. — Vol. 21. — P. 241—249.

[240] Klee V. L. Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 74. — P. 10—43.

[241] Kodama Y. Note on an absolute neighborhood extensor for metric spaces // J. Math. Soc. Jap. — 1956. — Vol. 8. — P. 206—215.

[242] Kodama Y. On the shape of decomposition spaces // J. Math. Soc. Jap. — 1974. — Vol. 26. — P. 636—646.

[243] Kodama Y. Fine movability // J. Math. Soc. Jap. — 1978. — Vol. 30. — P. 101—116.

[244] Kodama Y., Koyama A. Hurewicz isomorphism theorem for Steenrod homology // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 74. — P. 363—367.

[245] Kodama Y., Ono J. On fine shape theory // Fund. Math. — 1979. — Vol. 105. — P. 29—39.

[246] Kołodziejczyk D. Simply-connected polyhedra dominate only finitely many different shapes // Topology Its Appl. — 2001. — Vol. 112. — P. 289—295.

[247] Kołodziejczyk D. A continuum with no prime shape factors // Topology Its Appl. — 2009. — Vol. 156. — P. 1002—1007.

[248] Kołodziejczyk D. On some problem of Borsuk concerning decompositions of shapes into prime factors // Topology Its Appl. — 2016. — Vol. 201. — P. 452—456.

[249] Kołodziejczyk D. Cartesian powers of shapes of FANR's and polyhedra // Topology Its Appl. — 2017. — Vol. 232. — P. 39—44.

[250] Kozlowski G. Images of ANR's: Mimeographed notes. — Seattle: Univ. of Washington, 1974.

[251] Kozlowski G. Maps of ANR's determined on null sequences of AR's // Studies in Topology / N. M. Stavrakas, K. R. Allen, eds. — New York: Academic Press, 1975. — P. 277—284.

[252] Kozlowski G., Segal J. n-movable compacta and ANR-systems // Fund. Math. — 1974. — Vol. 85. — P. 235—243.

[253] Kozlowski G., Segal J. On the shape of 0-dimensional paracompacta // Fund. Math. — 1974. — Vol. 83. — P. 151—154.

[254] Kozlowski G., Segal J. Movability and shape connectivity // Fund. Math. — 1976. — Vol. 93. — P. 145—154.

[255] Kozlowski G., Segal J. Locally well-behaved paracompacta in shape theory // Fund. Math. — 1977. — Vol. 95. — P. 55—71.

[256] Kozlowski G., Segal J. Local behavior and the Vietoris and Whitehead theorems in shape theory // Fund. Math. — 1978. — Vol. 99. — P. 213—225.

[257] Krasinkiewicz J. Local connectedness and pointed 1-movability // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 1265—1269.

[258] Krasinkiewicz J. Continuous images of continua and 1-movability // Fund. Math. — 1978. — Vol. 98. — P. 141—164.

[259] Krasinkiewicz J., Minc P. Generalized paths and 1-movability // Fund. Math. — 1979. — Vol. 104. — P. 141—153.

[260] Kuperberg K. An isomorphism theorem of the Hurewicz-type in Borsuk's theory of shape // Fund. Math. — 1972. — Vol. 77. — P. 21—32.

[261] Kuperberg K. A note on the Hurewicz isomorphism theorem in Borsuk's theory of shape // Fund. Math. — 1976. — Vol. 90. — P. 173—175.

[262] Kuperberg K. Two Vietoris-type isomorphism theorems in Borsuk's theory of shape concerning the Vietoris—Čech homology and Borsuk's fundamental groups // Studies in Topology / N. M. Stavrakas, K. R. Allen, eds. — New York: Academic Press, 1975. — P. 285—313.

[263] Lacher R. C. Cellularity criteria for maps // Michigan Math. J. — 1970. — Vol. 17. — P. 385—396.

[264] Lacher R. C. Cell-like mapping and their generalizations // Bull. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 83. — P. 495—552.

[265] Lefschetz S. On compact spaces // Ann. Math. — 1931. — Vol. 32. — P. 521—538.

[266] Lefschetz S. Algebraic Topology. — New York, 1942. — (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; Vol. 27).

[267] Lisica Ju. T., Mardesic S. Steenrod—Sitnikov homology for arbitrary spaces // Bull. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 9. — P. 207—210.

[268] Lisica Ju. T., Mardesic S. Coherent prohomotopy and strong shape theory // Glas. Mat. — 1984. — Vol. 19. — P. 335—399.

[269] Lisica Ju.T., Mardesic S. Strong homology of inverse systems of spaces. I // Topology Its Appl. — 1985. — Vol. 19. — P. 29—43.

[270] Lisica Ju.T., Mardesic S. Strong homology of inverse systems of spaces. II // Topology Appl. — 1985. — Vol. 19. — P. 45—64.

[271] Mardešić S. Retracts in shape theory // Glas. Mat. — 1971. — Vol. 6. — P. 153—163.

[272] Mardešić S. Shapes for topological spaces // General Topology Appl. — 1973. — Vol. 3. — P. 265—282.

[273] Mardešić S. Strongly movable compacta and shape retracts // Proc. Int. Symp. Topol. Appl., Budva, 1972. — Beograd, 1973. — P. 163—166.

[274] Mardešić S. On the Whitehead theorem in shape theory. I // Fund. Math. — 1976. — Vol. 91. — P. 51—64.

[275] Mardešić S. On the Whitehead theorem in shape theory. II // Fund. Math. — 1976. — Vol. 91. — P. 93—103.

[276] Mardešić S. Approximate polyhedra, resolutions of maps and shape fibrations // Fund. Math. — 1981. — Vol. 114. — P. 53—78.

[277] Mardešić S. Strong expansions and strong shape theory // Topology Appl. — 1991. — Vol. 38. — P. 275—291.

[278] Mardešić S. Nonvanishing derived limits in shape theory // Topology. — 1996. — Vol. 35. — P. 521—532.

[279] Mardešić S. Thirty years of shape theory // Math. Commun. — 1997. — Vol. 2. — P. 1—12.

[280] Mardešić S. Absolute neighborhood retracts and shape theory // History Topology. — 1999. — Vol. 9. — P. 241—269.

[281] Mardešić S. Strong expansions of products and products in strong shape // Topology Its Appl. — 2004. — Vol. 140. — P. 81—110.

[282] Mardešić S. The Cartesian product of a compactum and a space is a bifunctor in shape // Topology Its Appl. — 2009. — Vol. 156. — P. 2326—2345.

[283] Mardešić S. Phantom mappings and a shape-theoretic problem concerning products // Topology Its Appl. — 2014. — Vol. 178. — P. 248—264.

[284] Mardešić S., Prasolov A. V. On strong homology of compact spaces // Topology Appl. — 1998. — Vol. 82. — P. 327—354.

[285] Mardešić S., Rushing T. B. Shape fibrations. I // General Topology Appl. — 1978. — Vol. 9. — P. 193—215.

[286] Mardešić S., Segal J. Movable compacta and ANR-systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1970. — Vol. 18. — P. 649—654.

[287] Mardešić S., Segal J. Equivalence of Borsuk and the ANR-system approach to shapes // Fund. Math. — 1971. — Vol. 72. — P. 61—68.

[288] Mardešić S., Segal J. Shapes of compacta and ANR-systems // Fund Math. — 1971. — Vol. 72. — P. 41—59.

[289] Mardešić S., Segal J. Shape Theory. The Inverse System Approach. — Amsterdam: North-Holland, 1982.

[290] Mardešić S., Uglešić N. A category whose isomorphisms induce an equivalence relation coarser than shape // Topology Its Appl. — 2005. — Vol. 153. — P. 448—463.

[291] Mardešić S., Ungar S. The relative Hurewicz theorem in shape theory // Glas. Mat. — 1974. — Vol. 9. — P. 317—328.

[292] Mardešić S., Watanabe T. Approximate resolutions of spaces and mappings // Glas. Mat. — 1989. — Vol. 24. — P. 587—637.

[293] Matumoto T. Equivariant CW complexes and shape theory // Tsukuba J. Math. — 1989. — Vol. 13. — P. 157—164.

[294] Mazurkiewicz S., Sierpiński W. Contribution à la topologie des ensembles dénombrables // Fund. Math. — 1920. — Vol. 1. — P. 17—27.

[295] McCord M. C. Universal $\mathcal{P}$-like compacta // Michigan Math. J. — 1966. — Vol. 13. — P. 71—87.

[296] McCord M. C. Embedding $\mathcal{P}$-like compacta in manifolds // Canad. J. Math. — 1967. — Vol. 19. — P. 321—332.

[297] McMillan D. R. A criterion for cellularity in a manifold // Ann. Math. — 1964. — Vol. 79. — P. 327—337.

[298] McMillan D. R. One dimensional shape properties and three-manifolds. — Studies in Topology / N. M. Stavrakas, K. R. Allen, eds. — New York: Academic Press, 1975. — P. 367—381.

[299] Mihalik M. L. Ends of fundamental groups in shape and proper homotopy // Pacific J. Math. — 1980. — Vol. 90. — P. 431—458.

[300] Mill van J. A counterexample in ANR theory // Topology Its Appl. — 1981. — Vol. 12. — P. 315—320.

[301] Miller R. T. Mapping cylinder neighborhoods of some ANR's // Ann. Math. — 1976. — Vol. 103. — P. 411—421.

[302] Miminoshvili Z. On a strong spectral shape theory // Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk Gruzin. SSR. — 1982. — Vol. 68. — P. 79—102.

[303] Miyata T. Uniform shape theory // Glas. Mat. — 1994. — Vol. 29. — P. 123—168.

[304] Miyata T. Generalized stable shape and duality // Topology Its Appl. — 2001. — Vol. 109. — P. 75—88.

[305] Miyata T., Segal J. Generalized stable shape and the Whitehead theorem // Topology Its Appl. — 1995. — Vol. 63. — P. 139—164.

[306] Morita K. The Hurewicz and the Whitehead theorems in shape theory // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. — 1974. — Vol. 12. — P. 246—258.

[307] Morita K. Another form of the Whitehead theorem in shape theory // Proc. Jap. Acad. — 1975. — Vol. 51. — P. 394—398.

[308] Morita K. Čech cohomology and covering dimension for topological spaces // Fund. Math. — 1975. — Vol. 87. — P. 31—52.

[309] Morita K. On generalizations of Borsuk's homotopy extension theorem // Fund. Math. — 1975. — Vol. 88. — P. 1—6.

[310] Morita K. On shapes of topological spaces // Fund. Math. — 1975. — Vol. 86. — P. 251—259.

[311] Morón M. A., Ruiz del Portal F. R. On weak shape equivalences // Topology Its Appl. — 1999. — Vol. 92. — P. 225—236.

[312] Moszynska M. Uniformly movable compact spaces and their algebraic properties // Fund. Math. — 1972. — Vol. 77. — P. 125—144.

[313] Moszynska M. The Whitehead theorem in the theory of shapes // Fund. Math. — 1973. — Vol. 80. — P. 221—263.

[314] Mrozik P. Chapman's complement theorem in shape theory: A version for the infinite poroduct of lines // Arch. Math. — 1984. — Vol. 42. — P. 564—567.

[315] Mrozik P. Hereditary shape equivalences and complement theorems // Topology Appl. — 1986. — Vol. 22. — P. 61—65.

[316] Nasri T., Ghanei F., Mashayekhy B., Mirebrahimi H. On topological shape homotopy groups // Topology Its Appl. — 2016. — Vol. 198. — P. 22—33.

[317] Nowak S. Some properties of fundamental dimension // Fund. Math. — 1974. — Vol. 85. — P. 211—227.

[318] Nowak S. On the fundamental dimension of approximately 1-connected compacta // Fund. Math. — 1975. — Vol. 89. — P. 61—79.

[319] Nowak S. On the fundamental dimension of the Cartesian product of two compacta // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1976. — Vol. 24. — P. 1021—1028.

[320] Nowak S. An example of finite dimensional movable continuum with an infinite family of shape factors // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 24. — P. 1019—1020.

[321] Nowak S. Remarks on some shape properties of the components of movable continua // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1979. — Vol. 27. — P. 315—319.

[322] Nowak S. Some remarks concerning the fundamental dimension of the Cartesian product of two compacta // Fund. Math. — 1979. — Vol. 103. — P. 31—41.

[323] Nowak S. Algebraic theory of the fundamental dimension // Disser. Math. — 1981. — Vol. 187. — P. 1—59.

[324] Nowak S. On the relationship between shape properties of subcompacta of S^n and homotopy properties of their complements // Fund. Math. — 1987. — Vol. 128. — P. 47—60.

[325] Pavel M. Shape theory and pattern recognition // Pattern Recognition. — 1983. — Vol. 16. — P. 349—356.

[326] Peterson P. Some non-embedding problems // Bol. Soc. Mat. Mexicana. — 1957. — Vol. 2. — P. 9—15.

[327] Poincaré H. Analysis situs // J. École Polytech. — 1895. — Vol. 2. — P. 1—121.

[328] Poincaré H. Complément à l'analysis situs // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1899. — Vol. 13. — P. 285—343.

[329] Pontryagin L. The theory of topological commutative groups // Ann. Math. — 1934. — Vol. 35. — P. 361—388.

[330] Pop I. An equivariant shape theory // Ann. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Sect. I Mat. — 1984. — Vol. 30. — P. 53—67.

[331] Pop I. A categorical notion of movability // Anal. Sci. Univ. Al. I. Cuza. — 2003. — Vol. 49. — P. 327—341.

[332] Porter T. A Čech-Hurewicz isomorphism theorem for movable metric compacts // Math. Scand. — 1973. — Vol. 33. — P. 90—96.

[333] Porter T. Čech homotopy. I // J. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 6. — P. 429—436.

[334] Porter T. Generalised shape theory // Proc. Roy. Irish Acad. — 1974. — Vol. 74. — P. 33—48.

[335] Porter T. Stability results for topological spaces // Math. Z. — 1974. — Vol. 140. — P. 1—21.

[336] Porter T. Stability of algebraic inverse systems. II // J. Pure Appl. Algebra. — 1976. — Vol. 7. — P. 133—143.

[337] Porter T. Stability of algebraic inverse systems. I // Fund. Math. — 1978. — Vol. 100. — P. 17—33.

[338] Porter T. Proper homotopy theory // Handbook of Algebraic Topology / I. M. James, ed. — Amsterdam: Elsevier, 1995. — P. 127—167.

[339] Prasolov A. V. On the universal coefficients formula for shape homology // Topology Its Appl. — 2013. — Vol. 160. — P. 1918—1956.

[340] Quigley J. Shape theory, approaching theory and a Hurewicz theorem: Doct. Diss. — Ind. Univ., 1970.

[341] Quigley J. An exact sequence from the n-th to $(n-1)$-st fundamental group // Fund. Math. — 1973. — Vol. 77. — P. 195—210.

[342] Raussen M. Hurewicz isomorphism and Whitehead theorem in pro-categories // Arch. Math. — 1978. — Vol. 30. — P. 153—164.

[343] Rubin L. R. Cell-like maps, dimension and cohomological dimension: a survey // Banach Center Publ. — 1986. — Vol. 18. — P. 371—376.

[344] Rudin M. E. A normal space X for which $X \times I$ is not normal // Fund. Math. — 1971. — Vol. 73. — P. 179—186.

[345] Sanjurjo J. On limits of shape maps // Topology Its Appl. — 1986. — Vol. 23. — P. 173—181.

[346] Sanjurjo J. On the shape category of compacta // J. London Math. Soc. — 1986. — Vol. 2. — P. 559—567.

[347] Sanjurjo J. A non-continuous description of the shape category of compacta // Quart. J. Math. — 1989. — Vol. 40. — P. 351—359.

[348] Sanjurjo J. An intrinsic description of shape // Trans. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 329. — P. 625—636.

[349] Sanjurjo J. Multihomotopy, Čech spaces of loops and shape groups // Proc. London Math. Soc. — 1994. — Vol. 3. — P. 330—344.

[350] Sanjurjo J. On the structure of uniform attractors // J. Math. Anal. Appl. — 1995. — Vol. 152. — P. 519—528.

[351] Segal J. Shape classification of projective plane-like continua // Glas. Mat. Ser. III. — 1971. — Vol. 6. — P. 365—371.

[352] Segal J. On the shape classification of manifold-like continua // General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra III. Proc. Third Prague Topological Symp. Prague, 1971 / J. Novák, ed. — Prague: Academia, 1972. — P. 389—391.

[353] Segal J. Shape classifications // Proc. of Int. Symp. on Topology and Its Applications, Budva, 25—31, 8, 1972, Yugoslavia, Beograd: Savez Društ. Mat. Fiz. Astronom. Jugoslav., 1973. — P. 225—228.

[354] Segal J. Movable shapes // Topology Conf. Blackburg, VA, USA 1973. — Berlin: Springer, 1974. — (Lect. Notes Math.; Vol. 375). — P. 236—241.

[355] Segal J. Movable continua and shape retracts // Studies in Topology. — New York: Academic Press, 1975. — P. 539—544.

[356] Segal J. Local behavior in shape theory // Gen. Topol. Relat. Modern Anal. Algebra. IV. Proc. 4-th Prague Topol. Symp., 1976. Part B. — Prague, 1977. — P. 413—419.

[357] Segal J. An introduction to shape theory // Alg. Top. Conf. (Vancouver, 1977). — Berlin: Springer, 1978. — (Lect. Notes Math.; Vol. 673). — P. 225—242.

[358] Segal J., Spież S., Günther B. Strong shape of uniform spaces // Topology Appl. — 1993. — Vol. 49. — P. 237—249.

[359] Segal J., Watanabe T. Cosmic approximate limits and fixed points // Trans. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 333. — P. 1—61.

[360] Šekutkovski N. Category of coherent inverse systems // Glas. Mat. — 1988. — Vol. 23. — P. 373—396.

[361] Šekutkovski N., Markoski G. Proper shape over finite coverings // Topology Its Appl. — 2011. — Vol. 158. — P. 2016—2021.

[362] Sher R. B. Realizing cell-like maps in Euclidean space // General Topology Appl. — 1972. — Vol. 2. — P. 75—89.

[363] Sher R. B. Complement theorems in shape theory // Shape Theory and Geometric Topology (Dubrovnik, Yugoslavia, 1981) / S. Mardešić, J. Segal, eds. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 870). — P. 150—168.

[364] Sher R. B. Complement theorems in shape theory. II // Geometric Topology and Shape Theory. — Berlin: Springer, 1987. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1283). — P. 212—220.

[365] Siebenmann L. C. Approximating cellular maps by homeomorphisms // Topology. — 1972. — Vol. 11. — P. 271—294.

[366] Siebenmann L. C. Chapman's classification of shapes, a proof using collapsing // Manuscripta Math. — 1975. — Vol. 16. — P. 373—384.

[367] Spież S. A majorant for the family of all movable shapes // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1973. — Vol. 21. — P. 615—620.

[368] Spież S. Movablllty and uniform movability // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1974. — Vol. 22. — P. 43—45.

[369] Spież S. An example of a continuum X with $\mathrm{Fd}(X \times S^1) = \mathrm{Fd}(X) = 2$ // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. — 1979. — Vol. 27. — P. 923—927.

[370] Spież S. On the fundamental dimension of the cartesian product of compacta with fundamental dimension 2 // Fund. Math. — 1983. — Vol. 116. — P. 17—32.

[371] Stallings J. The embedding of homotopy types into manifolds: Mimeographed notes. — Princeton Univ., 1965.

[372] Stramaccia L. On the definition of the strong shape category // Glas. Mat. — 1997. — Vol. 32. — P. 141—152.

[373] Stramaccia L. Characterizing shape theories by Kan extensions // Topology Its Appl. — 2002. — Vol. 120. — P. 355—363.

[374] Stramaccia L. Shape and strong shape equivalences // Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques. — 2002. — Vol. 43. — P. 242—256.

[375] Stramaccia L. P-embeddings, AR and ANR spaces // Homology, Homotopy Appl. — 2003. — Vol. 5. — P. 213—218.

[376] Stramaccia L. Groupoids and strong shape // Topology Its Appl. — 2005. — Vol. 153. — P. 528—539.

[377] Stramaccia L. 2-categorical aspects of strong shape // Topology Its Appl. — 2006. — Vol. 153. — P. 3007—3018.

[378] Taylor J. L. A counterexample in shape theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 81. — P. 629—632.

[379] Toda H. On unstable homotopy of spheres and classical groups // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1960. — Vol. 46. — P. 1102—1105.

[380] Toda H. Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1962.

[381] Toruńczyk H. Compact absolute retracts as factors of the Hilbert space // Fund. Math. — 1973. — Vol. 83. — P. 75—84.

[382] Toruńczyk H. On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds // Fund. Math. — 1980. — Vol. 106. — P. 31—40.

[383] Toruńczyk H. Characterizing Hilbert space topology // Fund. Math. — 1981. — Vol. 111. — P. 247—262.

[384] Trybulec A. On shapes of movable curves // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1973. — Vol. 21. — P. 727—733.

[385] Ungar Š. n-connectedness of inverse systems and applications to shape theory // Glas. Mat. — 1978. — Vol. 13. — P. 371—398.

[386] Ungar Š. Shape bundles // Topology Its Appl. — 1981. — Vol. 12. — P. 89—99.

[387] Veblen O. Analysis Situs. — New York: Amer. Math. Soc., 1922. — (Colloq. Lect. Amer. Math. Soc.; Vol. 5).

[388] Venema G. A. Embeddings of compacta with shape dimension in the trivial range // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 55. — P. 443—448.

[389] Venema G. A. Embeddings in shape theory // Shape Theory and Geometric Topology (Dubrovnik, Yugoslavia, 1981) / S. Mardešić, J. Segal, eds. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 870). — P. 169—185.

[390] Venema G. A. An approximation theorem in shape theory // Topology Its Appl. — 1982. — Vol. 14. — P. 111—116.

[391] Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen // Math. Ann. — 1927. — Vol. 97. — P. 454—72.

[392] Vogt R. M. Homotopy limits and colimits // Math. Z. — 1973. — Vol. 134. — P. 11—52.

[393] Wall C. T. C. Finiteness conditions for CW-complexes // Ann. Math. — 1965. — Vol. 81. — P. 56—69.

[394] Walsh J. J. Dimension, cohomological dimension, and cell-like mappings // Shape Theory and Geometric Topology (Dubrovnik, Yugoslavia, 1981) / S. Mardešić, J. Segal, eds. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 870). — P. 105—118.

[395] Walsh J. J. Characterization of Hilbert cube manifolds: an alternate proof // Banach Center Publ. — 1986. — Vol. 18. — P. 153—160.

[396] Watanabe T. Shape classifications for complex projective space-like and wedges of n-spheres-like continua // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A. — 1974. — Vol. 12. — P. 233—245.

[397] Watanabe T. A note on the Hurewicz theorem in shape theory // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 61. — P. 137—140.

[398] Watanabe T. On the characterization of uniform movability for compact connected Abelian groups // Glas. Mat. — 1976. — Vol. 11. — P. 347—354.

[399] Watanabe T. On a problem of Y. Kodama // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 981—985.

[400] Watanabe T. On Čech homology and a stability theorem in shape theory // J. Math. Soc. Jap. — 1977. — Vol. 29. — P. 655—664.

[401] Watanabe T. On strong movability // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 813—816.

[402] Watanabe T. On spaces which have the shape of compact metric spaces // Fund. Math. — 1979. — Vol. 104. — P. 1—11.

[403] Watanabe T. Approximative shape. I // Tsukuba J. Math. — 1987. — Vol. 11. — P. 17—59.

[404] Watanabe T. Some relations between shape density and shape length // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 1133—1139.

[405] Watanabe T. Some strange examples of shape fibrations // Topology Its Appl. — 1994. — Vol. 60. — P. 23—32.

[406] West J. E. Mapping cylinders of Hilbert cube factors // General Topology Its Appl. — 1971. — Vol. 1. — P. 111—125.

[407] West J. E. Compact ANR's have finite type // Bull. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 81. — P. 163—165.

[408] West J. E. Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution of a conjecture of Borsuk // Ann. Math. — 1977. — Vol. 106. — P. 1—18.

[409] West J. E. Open problems in infinite dimensional topology // Open Problems in Topology / J. van Mill, G. M. Reed, eds. — Amsterdam: North-Holland, 1990. — P. 523—597.

[410] Whitehead J. H. C. Note on a theorem due to Borsuk // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54. — P. 1125—1132.

[411] Whitehead J. H. C. On the homotopy type of ANR's // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54. — P. 1133—1145.

[412] Whitehead J. H. C. Combinatorial homotopy. I // Bull. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 55. — P. 213—245.

[413] Whitney H. Differentiable manifolds // Ann. Math. — 1936. — Vol. 37. — P. 645—680.

[414] Winslow A. B. There are 2^c nonhomeomorphic continua in $\beta\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{R}^n$ // Pacific J. Math. — 1979. — Vol. 84. — P. 233—239.

[415] Wong B. Y. T. Extending homeomorphisms by means of collarings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 19. — P. 1443—1447.

[416] Yagasaki T. Fiber shape theory // Tsukuba J. Math. — 1985. — Vol. 9. — P. 261—277.

[417] Yagasaki T. Movability of maps and shape fibrations // Glas. Mat. — 1986. — Vol. 21. — P. 153—177.