Классификация матриц склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр

А. И. ЖИЛА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: saffeya@yandex.ru

УДК 515.162

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, слоение Лиувилля, инварианты Фоменко—Цишанга, точки типа центр-центр.

Аннотация

В теории топологических инвариантов Фоменко—Цишанга для точек типа центр-центр r-метка на круговой молекуле всегда равна 0. Про ε-метку известно, что она зависит от ориентации многообразия Q^3, ориентации критических окружностей дополнительного интеграла F интегрируемой системы и ориентации рёбер молекулы. В данной работе рассмотрен способ явного задания ориентации базисных циклов и найдены матрицы склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр в зависимости от расположения дуг бифуркационной диаграммы.

Abstract

A. I. Zhila, Classification of the gluing matrices on the loop molecules of the points of centre-centre type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 85—94.

The Fomenko–Zieschang theory of topological invariants says that the mark r is zero for the points of centre-centre type. The mark ε is known to be dependent on the orientation of the Q^3 manifold, the orientation of the critical circumferences of the Liouville system's additional integral F, and the orientation of the molecule's ribs. This article investigates the method of the explicit setting of the basis cycles' orientation and suggests a way of finding the gluing matrices on the loop molecules of the points of centre-centre type depending on the allocation of the arcs of the bifurcation diagram.

1. Введение

Исследования в области механики твёрдого тела включают в себя изучение топологии фазового пространства интегрируемых систем, классификацию особенностей, построение бифуркационных диаграмм и определение типов бифуркаций, вычисление глобальных и локальных инвариантов слоения Лиувилля, траекторных инвариантов. С помощью топологических инвариантов можно выявлять эквивалентные и неэквивалентные интегрируемые системы. Все исследования проводятся в рамках теории Фоменко—Цишанга классификации интегрируемых систем, основанной на инвариантах Фоменко (называемых грубыми молекулами) и инвариантах Фоменко—Цишанга (называемых мечеными молекулами), использующих бифуркационные комплексы (подробности см. в [1, 3—5]).

Одним из способов построения меченой молекулы произвольной допустимой кривой является извлечение информации о метках и базисных циклах из круговых молекул особых точек (про круговые молекулы подробнее см. [2]). Особые точки типа центр-центр встречаются почти в каждой интегрируемой системе, но, тем не менее, на данный момент точно известны только r-метки на их круговых молекулах. В данной работе вычислены различные матрицы склейки в случае точек типа центр-центр, на основе которых в дальнейшем можно будет вычислять ε-метки произвольных молекул.

2. Базисные циклы и правила задания ориентации

Круговая молекула для точки типа центр-центр имеет вид A-A. Мы хотим явно построить базисные циклы и выписать соответствующие матрицы склейки для торов, лежащих в прообразе точек допустимой кривой, соединяющей дуги бифуркационной диаграммы, отвечающие перестройкам типа A.

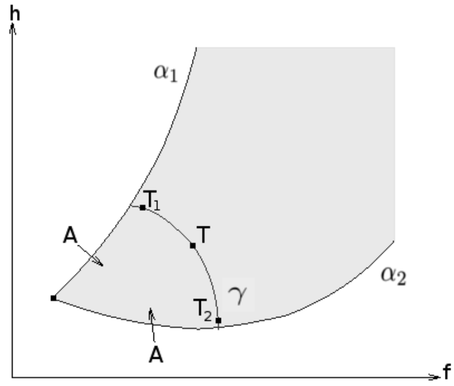

Рис. 1. Допустимая кривая γ

Пусть кривые α_1 и α_2 на бифуркационной диаграмме, каждая из которых отвечает перестройкам типа A, пересекаются в точке, прообраз которой содержит точку ранга 0 типа центр-центр (рис. 1). Проведём допустимую кривую γ и рассмотрим тор T, лежащий в прообразе одной из её точек. На этот тор приходят базисные циклы с торов T_1 и T_2, расположенных около кривых α_1 и α_2:

$$A_{\alpha_1} \to (\lambda_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1}), \quad A_{\alpha_2} \to (\lambda_{\alpha_2}, \mu_{\alpha_2}).$$

Эти циклы λ_{α_i}, μ_{α_i} выбираются на торах T_1 и T_2 так, чтобы были выполнены следующие условия:

1) направление цикла μ_{α_i} совпадает с направлением $\operatorname{sgrad} H$ на соответствующей критической окружности;
2) цикл λ_{α_i} стягивается в точку при приближении к соответствующей дуге α_i,
3) пара циклов $(\lambda_{\alpha_i}, \mu_{\alpha_i})$ положительно ориентирована на торе T_i.

Рассматривая пары циклов $(\lambda_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1})$ и $(\lambda_{\alpha_2}, \mu_{\alpha_2})$, приходящие на тор T с торов T_1 и T_2 соответственно, как базисы в группе одномерных гомологий, мы получаем матрицу склейки:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \mu_{\alpha_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \mu_{\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

Как указано выше, на граничном торе полнотория в качестве первого базисного цикла λ берётся меридиан полнотория, т. е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория, а в качестве второго цикла μ — произвольный цикл, дополняющий λ до базиса. Ориентация цикла μ задаётся потоком $\operatorname{sgrad} H$, после чего ориентация цикла λ однозначно определяется ориентацией на граничном торе. Зафиксируем правила, с помощью которых мы будем задавать ориентацию на граничном торе полнотория.

Пусть H — гамильтониан, а F — дополнительный интеграл гамильтоновой системы на симплектическом многообразии M^4. Рассмотрим отображение момента

$$\mathcal{F} = H \times F \colon M^4 \to \mathbb{R}^2(h, f).$$

Образ отображения момента в окрестности точки типа центр-центр на плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$ выглядит как «угол», ограниченный двумя дугами бифуркационной диаграммы (см. рис. 1). Прообраз кривой γ с концами на этих дугах является трёхмерным многообразием $Q^3_\gamma = \{x \in M^4 \mid \mathcal{F}(x) \in \gamma\}$, гомеоморфным трёхмерной сфере S^3. При этом прообразами концов кривой γ являются критические окружности (на которых $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} F$ зависимы), а прообразами внутренних точек кривой — торы Лиувилля. Любой такой тор T^2 разбивает Q^3_γ на два полнотория, т. е. является граничным тором для каждого из них. Ориентация на торе T^2 зависит от того, для какого из двух полноторий мы рассматриваем его как граничный тор, и определяется следующим образом.

1. На симплектическом многообразии M^4 ориентация задана формой $\omega \wedge \omega$.
2. Ориентация на многообразии Q^3_γ задаётся нормалью к Q^3_γ в M^4, т. е. тройка векторов e_1, e_2, e_3 в касательном пространстве к Q^3_γ будет положительно ориентирована, если четвёрка векторов e_1, e_2, e_3, $\bar{n}$ положительно ориентирована в M^4. При этом нормаль $\bar{n}$ будем выбирать так, чтобы при отображении момента она переходила в нормаль к кривой γ, направленную во внешнюю сторону по отношению к треугольнику, образованному двумя дугами бифуркационной диаграммы и кривой γ.

3. Ориентация на торе $T^2 \subset Q^3_\gamma$ задаётся нормалью $\bar{N}$ к тору T^2 в Q^3_γ, т. е. пара векторов e_1, e_2 в касательном пространстве к T^2 будет положительно ориентирована, если тройка векторов e_1, e_2, $\bar{N}$ положительно ориентирована в Q^3_γ. При этом нормаль $\bar{N}$ будем выбирать так, чтобы она была внешней нормалью для полнотория, граничным тором которого является рассматриваемый тор T^2.

Итог: положительная ориентированность пары векторов e_1, e_2 на торе T^2 задаётся условием

$$\omega \wedge \omega(e_1, e_2, \bar{N}, \bar{n}) > 0. \tag{1}$$

Отметим, что в случае, когда кривая γ задана уравнением $H = \mathrm{const}$ (в этом случае Q^3_γ называется изоэнергетической поверхностью) в качестве нормалей $\bar{n}$ и $\bar{N}$ можно брать $\pm \operatorname{grad} H$ и $\pm \operatorname{grad} F$ соответственно.

3. Классификация круговых молекул точек типа центр-центр

Пусть $P \in M^4$ — особая точка типа центр-центр. Тогда образ окрестности точки P при отображении момента $\mathcal{F} = H \times F$ есть часть плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$, ограниченная дугами бифуркационных кривых α и δ, выходящими из точки $\mathcal{F}(P) = \big(H(P), F(P)\big)$. Мы хотим описать базисные циклы и матрицы склейки для кривых γ с концами на дугах α и δ (см. рис. 1). Это даст нам возможность по виду дуг α и δ легко определять ε-метку в дальнейшем.

Если мы заменим гамильтониан H и интеграл F на функции $\tilde{H} = \tilde{h}(H, F)$ и $\tilde{F} = \tilde{f}(H, F)$, то для новой интегрируемой системы с гамильтонианом $\tilde{H}$ и интегралом $\tilde{F}$ критические точки (где гамильтониан и интеграл зависимы) не изменятся, а дуги α и δ бифуркационной диаграммы перейдут в новые дуги $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\delta}$ под действием диффеоморфизма $(h, f) \to \big(\tilde{h}(h, f), \tilde{f}(h, f)\big)$. Действуя таким образом, можно менять вид дуг α и δ. Для простоты будем считать, что образ точки P при этом диффеоморфизме не меняется, т. е. все дуги (старые и новые) выходят из одной и той же точки $\big(H(P), F(P)\big) = \big(\tilde{H}(P), \tilde{F}(P)\big)$.

Для любой критической окружности S^1, лежащей в прообразе некоторой точки дуги α или дуги δ, во всех её точках $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} \tilde{H}$ будут пропорциональны. Так как ориентация на цикле μ определяется направлением $\operatorname{sgrad} H$ на критической окружности, то для того чтобы понять, как изменится матрица склейки при замене H и F на $\tilde{H}$ и $\tilde{F}$, нужно знать знак коэффициента пропорциональности между $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} \tilde{H}$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha(t) = \big(h(t), f(t)\big)$ — одна из дуг бифуркационной диаграммы, выходящая из точки типа центр-центр, для системы с гамильтонианом H и интегралом F, $\tilde{\alpha}(t) = \Big(\tilde{h}\big(h(t), f(t)\big), \tilde{f}\big(h(t), f(t)\big)\Big)$ — соответствующая ей дуга бифуркационной диаграммы для системы с гамильтонианом $\tilde{H} = \tilde{h}(H, F)$ и* *интегралом* $\tilde{F} = \tilde{f}(H, F)$. *Тогда в точках критической окружности, лежащей в прообразе точки* $\alpha(t)$,

$$\operatorname{sgrad} \tilde{H} = \frac{d\tilde{h}/dt}{dh/dt} \operatorname{sgrad} H.$$

Доказательство. Пусть $\beta(t)$ — кривая в M^4, образ которой при отображении момента $\mathcal{F}$ — бифуркационная кривая $\alpha(t)$. Тогда

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(H\big(\beta(t)\big)\Big) = dH\left(\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Аналогично для функции $\tilde{H}$

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\tilde{H}\big(\beta(t)\big)\Big) = d\tilde{H}\left(\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Если $\operatorname{sgrad} \tilde{H} = k \cdot \operatorname{sgrad} H$, то $d\tilde{H} = k \cdot dH$, а значит,

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = k \cdot \frac{dh}{dt}. \qquad \square$$

Из леммы 1 следует, что направления потоков $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} \tilde{H}$ на критических окружностях, лежащих в прообразе бифуркационной кривой в малой окрестности точки P типа центр-центр, одинаковы, если векторы скорости кривых α и $\tilde{\alpha}$ в точке $\mathcal{F}(P) = \big(H(P), F(P)\big)$ лежат в одной и той же полуплоскости с границей $h = H(P)$. И наоборот, направления потоков $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} \tilde{H}$ противоположны, если эти векторы лежат в разных полуплоскостях. Отметим, что мы не рассматриваем случай, когда вектор скорости бифуркационной кривой в точке $\mathcal{F}(P)$ перпендикулярен оси h, так как в этом случае вектор $\operatorname{sgrad} H$ может быть нулевым, что не позволяет применить правило для ориентации цикла μ.

Ясно, что, применяя подходящий диффеоморфизм $(h, f) \to \big(\tilde{h}(h, f), \tilde{f}(h, f)\big)$, мы можем «выпрямить» дуги α и δ, т. е. заменить функции H и F на такие функции $\tilde{H}$ и $\tilde{F}$, что бифуркационная диаграмма в окрестности точки $\mathcal{F}(P)$ будет выглядеть как пара лучей с теми же касательными векторами в точке $\mathcal{F}(P)$. Дифференциал такого диффеоморфизма будет тождественным в точке $\mathcal{F}(P)$, т. е. направления потока $\operatorname{sgrad} H$ на критических окружностях не поменяется.

Более того, можно считать, что в некоторых симплектических координатах (q_1, q_2, p_1, p_2)

$$H = \frac{1}{2}\big(a(p_2^2 + q_2^2) + k(p_1^2 + q_1^2)\big), \quad F = \frac{1}{2}\big(b(p_1^2 + q_1^2) + m(p_2^2 + q_2^2)\big), \qquad (2)$$

где $a, b = \pm 1$ и $k \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{sgrad} H = (kp_1, ap_2, -kq_1, -aq_2), \quad \operatorname{sgrad} F = (bp_1, mp_2, -bq_1, -mq_2), \qquad (3)$$

а множество особых точек системы задаётся либо условием $p_1 = q_1 = 0$, либо условием $p_2 = q_2 = 0$. Получаем, что луч δ задаётся условиями $f = amh$, $2ah \geqslant 0$ и в прообразах его точек лежат окружности $\{p_1 = q_1 = 0, p_2^2 + q_2^2 = 2ah\}$, а луч α задаётся условиями $h = bkf$, $bf \geqslant 0$ и в прообразах его точек лежат окружности $\{p_2 = q_2 = 0,\ p_1^2 + q_1^2 = 2bf\}$.

Расположение лучей α и δ зависит от знаков констант a, b, k, m. Рассмотрим один из возможных случаев: $a = b = 1$, $m = 0$, $k > 0$.

Лемма 2. *Для системы с гамильтонианом*

$$H = \frac{1}{2}\big(p_2^2 + q_2^2 + k(p_1^2 + q_1^2)\big),$$

где $k > 0$, и интегралом

$$F = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2)$$

матрица склейки на ребре A-A круговой молекулы особой точки $P = (0,0,0,0)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(*при некотором выборе базисных циклов*). *В частности, ε-метка равна -1.*

Доказательство. Опишем явное построение базисных циклов λ_α, μ_α, λ_δ, μ_δ.

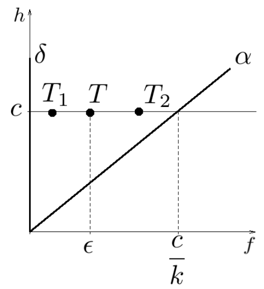

Рис. 2. Случай $a = b = 1$, $m = 0$, $k > 0$

1. Для рассматриваемых гамильтониана H и интеграла F луч δ задаётся условиями $f = 0$, $h \geqslant 0$, а луч α — условиями $h = kf$, $f \geqslant 0$. Рассмотрим в качестве кривой γ, соединяющей лучи α и δ, отрезок $\{h = c,\ 0 \leqslant f \leqslant c/k\}$ и соответствующее многообразие Q^3_γ. Для каждого тора Лиувилля $T = \{h = c, f = \varepsilon\} \subset Q^3_\gamma$ со стороны луча δ на него приходят циклы $(\lambda_\delta, \mu_\delta)$ с тора T_1, а со стороны прямой α — циклы $(\lambda_\alpha, \mu_\alpha)$ с тора T_2 (рис. 2). В симплектических координатах (q_1, q_2, p_1, p_2) тор T можно запараметризовать следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{2\varepsilon}\cos\varphi, \quad q_2 = \sqrt{2(c - k\varepsilon)}\cos\psi, \\ p_1 &= \sqrt{2\varepsilon}\sin\varphi, \quad p_2 = \sqrt{2(c - k\varepsilon)}\sin\psi. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Найдём циклы λ_δ и μ_δ. Из формул (3) для выбранных значений параметров $a = b = 1$, $m = 0$, $k > 0$ с учётом формул (4) получаем, что на торе $T = \{h = c,\ f = \varepsilon\}$

$$\operatorname{sgrad} H = \bigl(k\sqrt{2\varepsilon}\sin\varphi,\ \sqrt{2(c-k\varepsilon)}\sin\psi,\ -k\sqrt{2\varepsilon}\cos\varphi,\ -\sqrt{2(c-k\varepsilon)}\cos\psi\bigr). \quad (5)$$

Если $\varepsilon \to 0$, то этот вектор при $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ стремится к вектору

$$\operatorname{sgrad} H|_{(\varphi_0,\psi_0),\ \varepsilon\to 0} = (0,\ \sqrt{2c}\sin\psi_0,\ 0,\ -\sqrt{2c}\cos\psi_0). \quad (6)$$

Цикл μ_δ можно выбрать следующим образом:

$$\mu_\delta\colon \begin{cases} \varphi = \varphi_0, \\ \psi = \psi_0 - t. \end{cases} \quad (7)$$

Действительно, тогда вектор скорости кривой (7) имеет вид

$$\dot{\mu_\delta} = (\dot{q_1}, \dot{q_2}, \dot{p_1}, \dot{p_2}) = \bigl(0, \sqrt{2(c-k\varepsilon)}\sin(\psi_0 - t), 0, -\sqrt{2(c-k\varepsilon)}\cos(\psi_0 - t)\bigr)$$

и, очевидно, при $\varepsilon \to 0$ и $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ стремится к вектору (6), что и требовалось.

Теперь найдём цикл λ_δ. Так как он должен стягиваться при $\varepsilon \to 0$, то из (4) следует, что он задаётся уравнением $\psi = \mathrm{const}$. Поэтому нужно лишь выбрать на нём правильное направление в соответствии с условием (1). Выбирая

$$\lambda_\delta\colon \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + t, \\ \psi = \psi_0, \end{cases} \quad (8)$$

проверим, что в точке (φ_0, ψ_0) условие (1) выполнено для четвёрки векторов:

$$\begin{cases} \dot{\lambda_\delta} = \bigl(-\sqrt{2\varepsilon}\sin\varphi_0,\ 0,\ \sqrt{2\varepsilon}\cos\varphi_0,\ 0\bigr), \\ \dot{\mu_\delta} = \bigl(0,\ \sqrt{2(c-k\varepsilon)}\sin\psi_0,\ 0,\ -\sqrt{2(c-k\varepsilon)}\cos\psi_0\bigr), \\ \operatorname{grad} F = \bigl(\sqrt{2\varepsilon}\cos\varphi_0,\ 0,\ \sqrt{2\varepsilon}\sin\varphi_0,\ 0\bigr), \\ \operatorname{grad} H = \bigl(k\sqrt{2\varepsilon}\cos\varphi_0,\ \sqrt{2(c-k\varepsilon)}\cos\psi_0,\ k\sqrt{2\varepsilon}\sin\varphi_0,\ \sqrt{2(c-k\varepsilon)}\sin\psi_0\bigr). \end{cases}$$

Действительно,

$$\omega\wedge\omega(\dot{\lambda_\delta},\ \dot{\mu_\delta},\ \operatorname{grad} F,\ \operatorname{grad} H) = 8\varepsilon(c-k\varepsilon) > 0,$$

т. е. базис $(\lambda_\delta, \mu_\delta)$, заданный формулами (8) и (7), положительно ориентирован на граничном торе полнотория, соответствующего лучу δ.

3. Аналогичным образом построим циклы λ_α и μ_α. Задавая цикл μ_α формулами

$$\mu_\alpha\colon \begin{cases} \varphi = \varphi_0 - s, \\ \psi = \psi_0, \end{cases} \quad (9)$$

получаем, что его вектор скорости

$$\dot{\mu_\alpha} = \bigl(\sqrt{2\varepsilon}\sin(\varphi_0 - s),\ 0,\ -\sqrt{2\varepsilon}\cos(\varphi_0 - s),\ 0\bigr)$$

при $\varepsilon \to c/k$ и $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ стремится к вектору, пропорциональному вектору

$$\operatorname{sgrad} H|_{(\varphi_0,\psi_0),\ \varepsilon\to c/k} = \bigl(\sqrt{2kc}\sin\varphi_0,\, 0,\, -\sqrt{2kc}\cos\varphi_0,\, 0\bigr),$$

с коэффициентом $1/k > 0$. Далее, определяя цикл λ_α формулами

$$\lambda_\alpha\colon \begin{cases} \varphi = \varphi_0, \\ \psi = \psi_0 + s, \end{cases} \tag{10}$$

получаем, что он стягивается в точку при $\varepsilon \to c/k$. Проверка условия (1) для четвёрки векторов

$$\begin{cases} \dot{\lambda_\alpha} = \bigl(0,\, -\sqrt{2(c-k\varepsilon)}\sin\psi_0,\, 0,\, \sqrt{2(c-k\varepsilon)}\cos\psi_0\bigr), \\ \dot{\mu_\alpha} = \bigl(\sqrt{2\varepsilon}\sin\varphi_0,\, 0,\, -\sqrt{2\varepsilon}\cos\varphi_0,\, 0\bigr), \\ -\operatorname{grad} F = \bigl(-\sqrt{2\varepsilon}\cos\varphi_0,\, 0,\, -\sqrt{2\varepsilon}\sin\varphi_0,\, 0\bigr), \\ \operatorname{grad} H = \bigl(k\sqrt{2\varepsilon}\cos\varphi_0,\, \sqrt{2(c-k\varepsilon)}\cos\psi_0,\, k\sqrt{2\varepsilon}\sin\varphi_0,\, \sqrt{2(c-k\varepsilon)}\sin\psi_0\bigr) \end{cases}$$

даёт

$$\omega\wedge\omega(\dot{\lambda_\alpha},\, \dot{\mu_\alpha},\, -\operatorname{grad} F,\, \operatorname{grad} H) = 8\varepsilon(c-k\varepsilon) > 0.$$

Это означает, что базис $(\lambda_\alpha, \mu_\alpha)$, заданный формулами (10) и (9), положительно ориентирован на граничном торе полнотория, соответствующего лучу α.

4. Для найденных базисных циклов находим матрицу склейки:

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \mu_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\delta \\ \mu_\delta \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Из доказанной леммы 2, в которой рассмотрен один из возможных случаев расположения лучей α и δ, теперь можно вывести утверждение про все остальные случаи.

Теорема 1. *Матрицы склейки для круговых молекул точки типа центр-центр в зависимости от взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы* (*при задании положительной ориентации условием* $\omega\wedge\omega(\dot\lambda, \dot\mu, \bar N, \bar n) > 0$ *и подходящем выборе базисных циклов* λ *и* μ) *приведены на рис.* 3. *В частности,* ε*-метка равна* -1 *для случаев* 1—10 *и* 1 *для случаев* 11—18.

Доказательство. Обозначим гамильтониан и интеграл, рассмотренные в лемме 2, через H_0 и F_0, а параметр k гамильтониана H_0 (который в лемме 2 предполагался положительным) через k_0. Тогда гамильтониан H и интеграл F, заданные формулой (2), линейно выражаются через H_0 и F_0:

$$H = aH_0 + (k - ak_0)F_0, \quad F = mH_0 + (b - mk_0)F_0.$$

Это означает, что с помощью линейного диффеоморфизма

$$(h, f) \to (\tilde h, \tilde f) = (ah + (k - ak_0)f, mh + (b - mk_0)f)$$

мы можем перевести лучи α и δ, рассмотренные в лемме 2, в любую другую пару лучей.

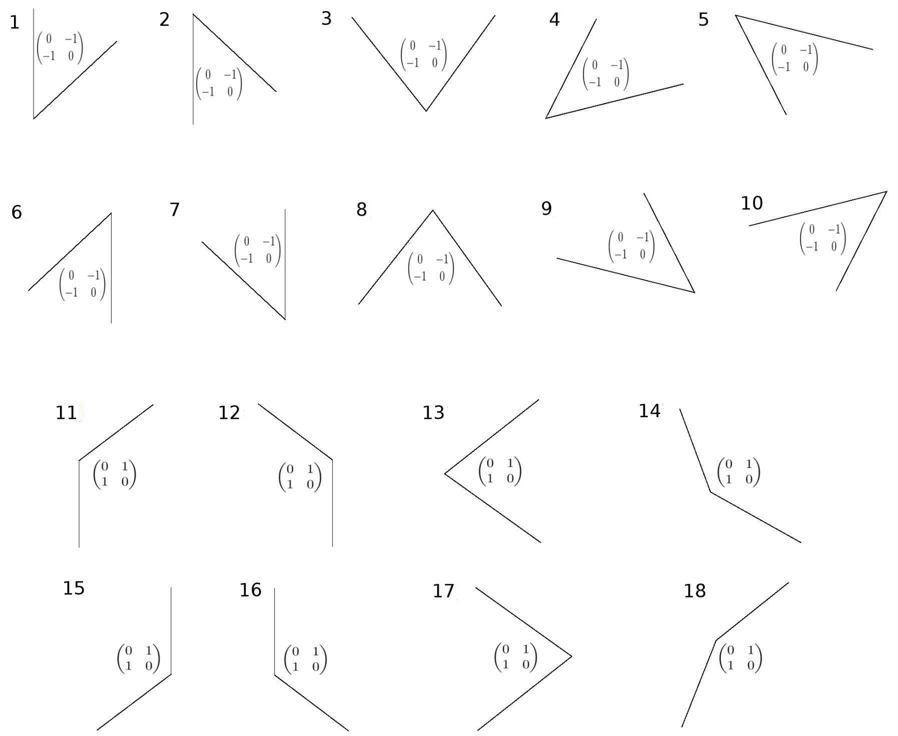

Рис. 3. Матрицы склейки для точки центр-центр

Легко проверяется, что случаям 1—10 на рис. 3 при этом соответствует условие $ak > 0$, которое эквивалентно тому, что ориентация критических окружностей, заданная потоком $\operatorname{sgrad} H$, при этом либо не поменяется, либо поменяется сразу для обоих лучей α и δ. Согласно лемме 1 это означает, что матрица склейки при этом не поменяется.

Аналогично, случаям 11—18 на рис. 3 соответствует условие $ak < 0$, которое эквивалентно тому, что ориентация критических окружностей, заданная потоком $\operatorname{sgrad} H$, поменяется ровно для одного из лучей α или δ. В матрице склейки при этом изменятся знаки. □

Вопрос о виде матриц склейки в случае точек типа центр-центр также поднимался в работе В. А. Кибкало [6]. В этой работе ориентация базиса (u, v) в T_xT^2 задавалась условием $\omega \wedge \omega(\operatorname{grad} H, N, u, v) > 0$, где N — вектор внешней нормали 3-атома.

Теорема 2 (В. А. Кибкало). *Пусть точка L — особая точка бифуркационной диаграммы типа центр-центр. Пусть $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2$, — знаки производных H по направлению пересекающихся дуг γ_i, $i = 1, 2$, соответственно. Тогда допу-*

стимые системы координат (λ_i, μ_i) *могут быть выбраны такими, что*

$$\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1\\ \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\end{pmatrix}.$$

В явном виде матрицы склейки в [6] найдены не были. Теорема 2 задаёт соотношения на допустимые базисы, по которым в дальнейшем возможно построить матрицы склейки.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику РАН профессору А. Т. Фоменко и доктору физико-математических наук профессору А. А. Ошемкову за постановку задачи и ценные обсуждения в ходе подготовки статьи. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00170 и гранта НШ-6399.2018.1 (соглашение № 075-02-2018-867).

Литература

[1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, 1999.

[2] Болсинов А. В., Рихтер П. Х., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. — 2000. — Т. 191, № 2. — С. 3—42.

[3] Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50, № 6. — С. 1276—1307.

[4] Фоменко А. Т., Цишанг Х. О топологии трёхмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 294, № 2. — С. 283—287.

[5] Фоменко А. Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем // Изв. АН СССР. — 1988. — Т. 52, № 2. — С. 378—407.

[6] Kibkalo V. Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(4) // Lobachevskii J. Math. — 2018. — Vol. 39, no. 9. — P. 1331—1334.