

Слоение Лиувилля топологических бильярдов на плоскости Минковского

Е. Е. КАРГИНОВА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: karginov13@gmail.com

УДК 517.938.5

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярд, плоскость Минковского, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко—Цишанга.

Аннотация

В статье лиувиллево классифицированы пять ярких случаев топологических бильярдов, склеенных из двух экземпляров плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского. Для каждого бильярда вычислена меченая молекула Фоменко—Цишанга — инвариант интегрируемой гамильтоновой системы, полностью определяющий тип её слоения Лиувилля.

Abstract

E. E. Karginova, Liouville foliation of topological billiards in the Minkowski plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 123–150.

In the paper, we give the Liouville classification of five interesting cases of topological billiards glued from two flat billiards bounded by arcs of confocal quadrics in the Minkowski plane. For each billiard, we calculate the marked Fomenko–Zieschang molecule, in other words the invariant of an integrable Hamiltonian system that completely determines the type of its Liouville foliation.

1. Введение

1.1. История вопроса

Математический бильярд — движение материальной точки (шара) в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. Вопросам интегрируемости такой системы в зависимости от вида границы посвящено множество работ. Интегрируемость бильярда в эллипсе на евклидовой плоскости была доказана Дж. Д. Биркгофом [1]. В случае когда граница бильярда является кусочно-гладкой и состоит из частей софокусных квадрик, таких что углы излома не превышают $3\pi/2$ (т. е. равны $\pi/2$, поскольку софокусные квадрики всегда пересекаются под прямым углом), бильярдное движение также интегрируемо.

В [6] В. В. Козлов и Д. В. Трещёв отметили, что в этих системах существует дополнительный независимый первый интеграл, что значит, что они вполне интегрируемы по Лиувиллю.

В. Драгович и М. Раднович [4, 16] и В. В. Фокичева провели полную лиувиллеву классификацию плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик. В. В. Фокичевой [11] была рассмотрена конструкция топологического бильярда, склеенного из плоских вдоль дуг границ.

Дальнейшее развитие теории бильярдов можно проследить в работах В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко [3, 12, 17].

Бильярд в эллипсе на плоскости Минковского был рассмотрен В. Драговичем и М. Раднович в [5]. Были описаны траектории системы и построена меченая молекула — инвариант Фоменко—Цишанга слоения Лиувилля данного бильярда.

Ранее я ввела определение простого бильярда на плоскости Минковского, классифицировала такие бильярды, сформулировала и доказала теорему о существовании ровно трёх различных слоений Лиувилля для изоэнергетических поверхностей таких бильярдов. В этой работе введено определение топологического бильярда, ограниченного дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, рассмотрен ряд интересных примеров таких бильярдов и для каждого из них вычислена молекула Фоменко—Цишанга — граф с целочисленными метками, полностью характеризующий топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Автор благодарит А. Т. Фоменко за постановку задачи и внимание к работе, В. В. Ведюшкину за многочисленные консультации и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867).

1.2. Необходимые сведения о плоскости Минковского

Определение 1.1. *Плоскостью Минковского* называется плоскость \mathbb{R}^2 со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$.

Расстояние между двумя точками определяется по формуле

$$\text{dist}(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Поскольку скалярное произведение может принимать отрицательные значения, все векторы разделяются на три непересекающихся множества. Вектор v называется

- *пространственноподобным*, если его длина вещественная, т. е. $\langle v, v \rangle > 0$;
- *временноподобным*, если его длина чисто мнимая, т. е. $\langle v, v \rangle < 0$;
- *световым* или *изотропным*, если его длина нулевая, т. е. $\langle v, v \rangle = 0$.

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю (в смысле Минковского). Отметим, что световые векторы ортогональны сами себе.

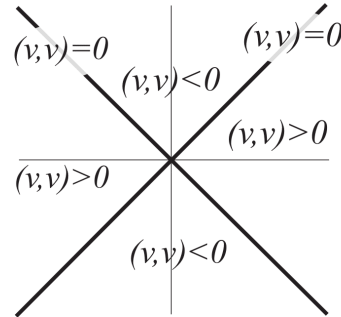


Рис. 1. Расположение векторов на плоскости Минковского в зависимости от их типа.

Покажем на примере точки 0, как располагаются векторы каждого из трёх типов на плоскости Минковского (рис. 1). Световые векторы располагаются на двух прямых, и эти прямые, называемые изотропными, разбивают плоскость на четыре части. В верхней и нижней областях (см. рис. 1) расположены векторы мнимой длины, а в правой и левой областях — векторы вещественной длины.

1.3. Семейство софокусных квадрик на плоскости Минковского

Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс \mathcal{E} , задаваемый соотношением

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1.$$

Здесь $a > b > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ — вещественные числа. Софокусное семейство квадрик \mathcal{C}_λ задаётся уравнением

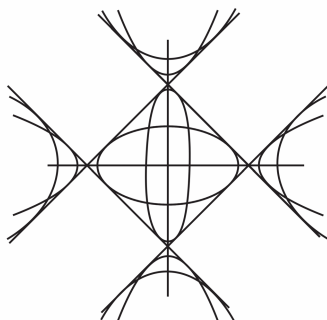
$$\mathcal{C}_\lambda: \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1. \quad (1.1)$$

Данное семейство изображено на рис. 2.

В зависимости от значения λ квадрика может быть прямой, эллипсом или гиперболой:

- при $\lambda \in (-\infty, -b)$ квадрика является гиперболой с действительной осью x ;
- при $\lambda \in (a, \infty)$ квадрика является гиперболой с действительной осью y ;
- при $\lambda \in (-b, a)$ квадрика является эллипсом.

Значениям $\lambda = a, -b, \infty$ соответствуют вырожденные квадрики $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{-b}$ и \mathcal{C}_∞ , являющиеся осью y , осью x и прямой на бесконечности соответственно.

Рис. 2. Семейство софокусных квадрик E_λ на плоскости Минковского.

Предложение 1.1. Все невырожденные квадрики семейства (1.1) имеют четыре общих касательных, а именно прямые $x \pm y = \pm\sqrt{a+b}$.

Предложение 1.2. Семейство (1.1) имеет четыре фокуса:

$$F_1 = (-\sqrt{a+b}, 0), \quad F_2 = (\sqrt{a+b}, 0), \quad G_1 = (0, -\sqrt{a+b}), \quad G_2 = (0, \sqrt{a+b}).$$

Вещественной частью эллипса (гиперболы) называется та часть, касательные векторы к которой вещественные, мнимой — та часть, касательные векторы к которой мнимые.

Для эллипса с параметром λ сумма расстояний от фокусов F_1, F_2 до любой точки вещественной части эллипса равно $2\sqrt{a-\lambda}$, а от G_1, G_2 до любой точки мнимой части эллипса сумма расстояний равна $2i\sqrt{b+\lambda}$. Кроме того, для гиперболы с параметром λ разность расстояний от фокусов F_1, F_2 до любой

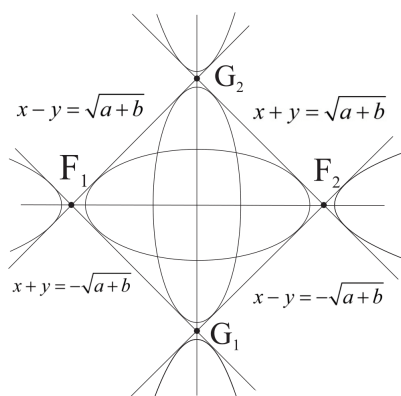


Рис. 3. Расположение общих касательных и фокусов относительно семейства квадрик

вещественной точки гиперболы равна $2\sqrt{a-\lambda}$, а от G_1, G_2 до любой точки мнимой части гиперболы равна $2i\sqrt{b+\lambda}$.

На рис. 3 отмечено, как расположены общие касательные и фокусы относительно семейства квадрик.

Нетрудно проверить, что если две квадрики семейства пересекаются в некоторой точке, то касательные векторы к этим квадрикам в точке пересечения ортогональны друг другу в смысле Минковского.

1.4. Бильярдный закон на плоскости Минковского

Определение 1.2. Пусть v — вектор, ℓ — некоторая прямая. Представим вектор в виде $v = v_n + v_\ell$, где v_n — нормальная составляющая вектора скорости, а v_ℓ принадлежит ℓ . Тогда бильярдным отражением вектора v от прямой ℓ на плоскости Минковского назовём вектор $v' = -v_n + v_\ell$.

В случае когда v_ℓ световой, отражение, очевидно, не определено.

При таком определении отражения сохраняется скалярное произведение вектора на себя, откуда следует, что тип вектора при отражении не меняется.

Определение 1.3. Прямую ℓ' назовём бильярдным отражением прямой ℓ от гладкой кривой \mathcal{S} на плоскости Минковского, если

- точка пересечения этих прямых A лежит на кривой \mathcal{S} ;
- направляющие векторы этих прямых являются бильярдными отражениями друг друга относительно касательной e к кривой \mathcal{S} в точке A .

Если направляющий вектор e световой, то бильярдное отражение вектора и прямой не определено.

Отметим, что такое определение обладает симметричностью: если прямая ℓ_1 является бильярдным отражением прямой ℓ_2 , то прямая ℓ_2 также является бильярдным отражением ℓ_1 .

2. Простые бильярды на плоскости Минковского

2.1. Определение простого бильярда.

Первые интегралы движения

Определение 2.1. Простым бильярдом Ψ назовём связное и компактное подмножество плоскости Минковского, граница которого является кусочно-гладкой кривой и состоит из дуг квадрик семейства (1.1), которые попарно пересекаются под углами, не превосходящими π .

Отметим, что здесь и далее бильярдом называем и область, в котором происходит движение, и само движение.

В точках, где касательная к области Ψ световая, бильярдное отражение вектора можно доопределить по непрерывности, а именно: при попадании в такую точку вектор отражается в противоположный по направлению. Такие точки

являются точками касания одной из прямых $x \pm y = \sqrt{a \pm b}$, которые являются общими для всего семейства.

Определим фазовое пространство M^4 бильярда Ω . Это четырёхмерное многообразие

$$M^4 = \{(x, y, v_1, v_2) \mid (x, y) \in \Omega, (v_1, v_2) \in T_x R^2\} / \sim.$$

Отношение эквивалентности задаётся следующим образом:

$$(x_1, y_1, v_1, v_2) \sim (x_2, y_2, u_1, u_2),$$

если

- $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, точка (x_1, y_1) лежит на границе области Ω ;
- $(v_1, v_2) \in l_1, (u_1, u_2) \in l_2$, при этом l_1 является бильярдным отражением прямой l_2 ;
- $v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2$ (т. е. при отражении сохраняется евклидова длина вектора скорости).

Итак, интегралом в данной задаче является функция $v_E = v_1^2 + v_2^2$, поскольку при таком отношении эквивалентности сохраняется именно евклидова длина вектора скорости.

В качестве дополнительного интеграла возьмём λ — параметр каустики к траектории. Несложными арифметическими выкладками можно получить выражение λ через координаты точки фазового пространства:

$$\lambda = \frac{-v_1^2 b - a v_2^2 + (x v_2 - y v_1)^2}{v_1^2 - v_2^2}.$$

Как легко проверить, при отражении от точки границы параметр λ сохраняется.

Интегралы λ и v_e находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона и функционально независимы. Тогда на регулярной части многообразия M^4 можно условно считать, что простой бильярд интегрируем по Лиувиллю. Впрочем, мы не будем пользоваться этим обстоятельством. Доказательство того факта, что регулярные слои пары интегралов являются двумерными торами (торами Лиувилля), мы проведём геометрически, без использования коммутирующих векторных полей.

Ограничивая систему на поверхность уровня интеграла $v_1^2 + v_2^2$, получаем трёхмерное многообразие, называемое изоэнергетической поверхностью Q^3 . При изменении λ оно расслаивается на двумерные поверхности.

Определение 2.2. Пусть v — интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система на изоэнергетической поверхности Q^3 . Рассмотрим соответствующее ей слоение Лиувилля на Q^3 . Базой слоения Лиувилля называется пространство его слоёв с обычной фактор-топологией, т. е. топологическое пространство, точками которого объявляются слои слоения Лиувилля (каждый слой заменяется точкой).

Определение 2.3. Две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы v_1 и v_2 на изоэнергетических многообразиях Q_1^3 и Q_2^3 называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который локально (т. е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Определение 2.4. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на симплектических многообразиях (M_1^4, ω_1) и (M_2^4, ω_2) , обладающие интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 . Рассмотрим их изоэнергетические многообразия

$$Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}, \quad Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}.$$

Интегрируемые системы называют *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, сохраняющий ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

Теорема 2.1 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг). *Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях*

$$Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}, \quad Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$$

лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

Эта теорема справедлива для гладких интегрируемых систем. В нашем случае многообразие Q^3 является кусочно-гладким, однако на нём, оказывается, существует слоение Лиувилля на двумерные торы и особые слои интеграла. Следовательно, инварианты Фоменко корректно определены, и мы их вычислим.

2.2. Классификация простых бильярдов на плоскости Минковского

Определение простого бильярда дано в разделе 2.1.

Общие касательные семейства софокусных квадрик делят плоскость на несколько частей, и в пяти из них могут располагаться софокусные эллипсы или гиперболы. Назовём их I, II, III, IV и V, как показано на рис. 4.

Определение 2.5. Назовём простой бильярд *эллиптическим*, если его граница состоит из дуг софокусных эллипсов и, возможно, частей координатных осей. Назовём простой бильярд *гиперболическим*, если его граница состоит из дуг софокусных гипербол и, возможно, частей координатных осей.

Отметим, что в данной ситуации не существует простого бильярда, граница которого состоит из дуг как эллипсов, так и гипербол, так как они расположены

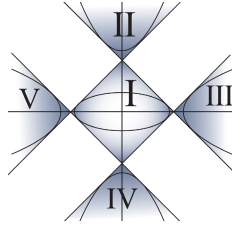


Рис. 4. Области I, II, III, IV и V на плоскости

в различных частях плоскости (эллипсы располагаются только в I, а гиперболы — в II, III, IV, V).

Определение 2.6. На границе каждой простой области есть точки, при попадании в которые материальная точка продолжает движение в строго противоположном направлении. Это либо точка нарушения гладкости (пересечение граничных квадрик), либо точка касания границы с одной из общих касательных. Такие точки делят границу на части, которые будем называть *сегментами*.

Определение 2.7. Два простых билиярда Ω и Ω' называем *эквивалентными друг другу*, если

- они получаются друг из друга отражением относительно оси x , оси y или поворотом на угол $\pi/2$ (отражение и поворот в данном определении евклидовы);
- они получаются друг из друга изменением параметра λ сегмента границы (исключая λ , соответствующие значениям a и $-b$) так, чтобы в процессе их изменения λ не принимал значений a , $-b$ и ∞ .

Далее под отражением и поворотом подразумеваются отражения и повороты как евклидовы движения плоскости.

Определение 2.8. Граница простого билиярда содержит ровно четыре сегмента, которые будем называть *верхним, нижним, левым и правым* в зависимости от их расположения относительно внутренней билиярда.

Теорема 2.2. Любой простой эллиптический билиард эквивалентен одному из билиардов, представленных на рис. 5.

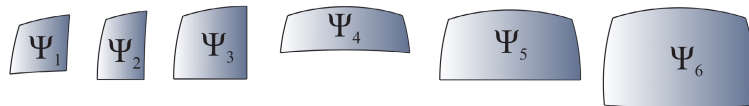


Рис. 5. Классификация простых эллиптических билиардов в метрике Минковского

3. Топологический бильярд на плоскости Минковского

3.1. Определение топологического бильярда, ограниченного дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского

Определение 3.1. Пусть l_1 и l_2 — выпуклые или прямые одинаковые граничные сегменты простых бильярдов Ψ_1 и Ψ_2 , т. е. l_1 и l_2 принадлежат одной и той же квадрике одного и того же семейства софокусных квадрик. Тогда определим *склейку* простых бильярдов вдоль сегментов l_1 и l_2 (причём их образы после склейки будем называть *ребро склейки*) как склейку вдоль l_1 и l_2 по тождественной изометрии. Границы ребра склейки назовём *вершинами склейки*. Те рёбра, которые не являются рёбрами склейки, назовём *свободными рёбрами*. Назовём *смежными* сегменты, имеющие одну и ту же вершину.

Определение 3.2. *Топологический бильярд* Δ — двумерное и ориентируемое многообразие, полученное операцией склейки из нескольких простых бильярдов. При этом потребуем выполнения следующих условий: в вершине склейки сходятся либо ребро склейки и два свободных ребра, либо два ребра склейки (такие вершины называем *коническими точками*), либо четыре ребра склейки (такие вершины называем *внутренними вершинами склейки*).

В этой работе я рассматриваю только топологические бильярды, полученные склейкой двух эквивалентных простых бильярдов.

Опишем закон отражения в топологическом бильярде.

После проведения операции склейки закон отражения для свободных рёбер остаётся таким же, как и для простого бильярда, а на ребре склейки меняется следующим образом: точка продолжает движение по другому листу, прямая, вдоль которой она движется, является бильярдным отражением прямой, вдоль которой она двигалась до удара, квадрат евклидовой длины скорости остаётся неизменным.

Отдельно стоит отметить случай конических точек. Отражение в конических точках определим по непрерывности, а именно: при ударе о такую точку материальная точка продолжает движение в той же области в противоположном направлении.

При таком отображении сохраняются интеграл $v_E = v_1^2 + v_2^2$ (квадрат евклидовой скорости) и, как и в случае простых бильярдов, параметр каустики λ . В самом деле, при определении склейки было отмечено, что все сегменты границ принадлежат одному и тому же семейству софокусных квадрик.

Поскольку данные интегралы функционально независимы и находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона, можем считать систему топологического бильярда кусочно-интегрируемой по Лиувиллю. Более подробные определения см. в [11].

Введём следующее отношение эквивалентности.

Определение 3.3. Топологический билиард $\Delta(2\Psi_i)$ считаем эквивалентным топологическому билиарду $\Delta'(2\Psi'_i)$, если один получен из другого заменой простых билиардов Ψ_i на им эквивалентные. Будем обозначать такие топологические билиарды через $\Delta(2\Psi_i)_p^s$, где вместо индекса s пишем количество склеиваемых граничных сегментов, а именно 1, 2, 3 или 4, а вместо индекса p — количество склеенных прямых сегментов. Штрихами в верхнем индексе обозначаем количество пересечений выпуклых сегментов границы с координатными осями.

4. Примеры топологических билиардов на плоскости Минковского

4.1.

Рассмотрим следующие топологические билиарды: $\Delta(2\Psi_3)_2^2$, $\Delta(2\Psi_5)^{3'}$, $\Delta(2\Psi_5)^2$, $\Delta(2\Psi_5)_1^3$ и $\Delta(2\Psi_3)_1^2$.

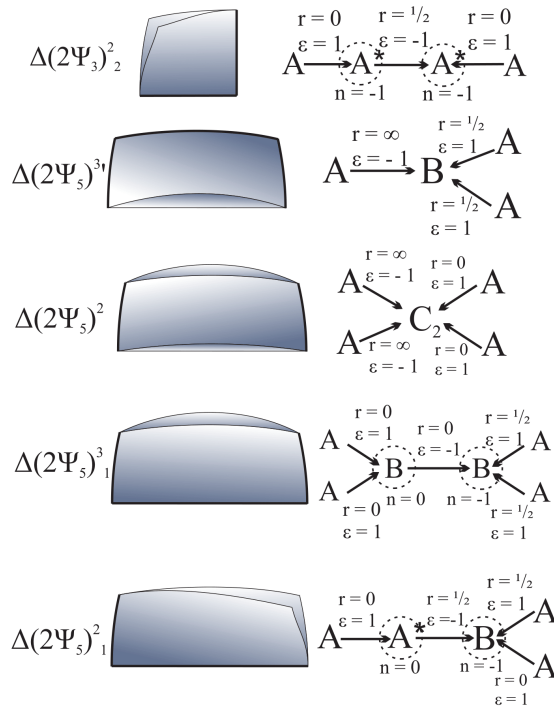


Рис. 6. Инварианты Фоменко—Цишанга для указанных топологических билиардов. В левой колонке — название билиарда, далее его изображение; в правой колонке — соответствующая меченая молекула

Сформулируем следующую теорему и далее приведём её доказательство.

Теорема 4.1. *Инварианты Фоменко—Цишанга для топологических бильярдов $\Delta(2\Psi_3)_2^2$, $\Delta(2\Psi_5)^{3'}$, $\Delta(2\Psi_5)^2$, $\Delta(2\Psi_5)_1^3$ и $\Delta(2\Psi_3)_1^2$ изображены на рис. 6.*

4.2. Особые и неособые уровни интеграла

Рассмотрим топологический бильярд $\Delta(2\Psi_i)$, полученный склейкой двух простых бильярдов Ψ_i . Ограничим фазовое пространство M^4 на поверхность уровня интеграла v_E , получим трёхмерное многообразие Q^3 , называемое изоэнергетической поверхностью. Меняя значения дополнительного интеграла λ , получаем некоторое слоение изоэнергетического многообразия Q^3 .

Дадим определение особых и неособых уровней интеграла λ .

Определение 4.1. Назовём *выпуклыми граничными значениями* те значения интеграла λ , которые соответствуют выпуклым относительно внутренности какой-либо области Ψ_i граничным сегментам. Если внутренность области Ψ_i пересекает вырожденную квадратку с параметром $\lambda = a$ или $\lambda = -b$ (которая совпадает с координатной осью y или x соответственно), то соответствующее значение интеграла назовём *седловым*. Если склейка определена на прямом сегменте, соответствующем параметру квадратки $\lambda = -b$ (или $\lambda = a$), то уровень интеграла $\lambda = -b$ (или $\lambda = a$) также назовём *седловым*.

Особыми значениями интеграла λ назовём выпуклые граничные и седловые значения, а все остальные значения интеграла назовём *неособыми*.

Опишем траектории, лежащие на особых уровнях интеграла.

Предельные траектории, лежащие на выпуклых граничных значениях интеграла, являются периодическими движениями вдоль этого сегмента. На выпуклом граничном уровне интеграла могут лежать также и неособые траектории (в случае когда бильярд несимметричен и образ граничного значения интеграла включает в себя движение внутри области, ограниченной границей и выпуклым граничным значением).

Отметим, что при попадании материальной точки в граничную точку граничного сегмента — в точках нарушения гладкости или касания с одной из общих касательных — вектор скорости отождествляется с равным ему по евклидовой скорости и противоположным по направлению вектором.

Таким образом, при одном и том же граничном значении интеграла λ предельные траектории могут быть различными. Такая ситуация возможна, если несколько граничных сегментов принадлежат одной и той же квадратике софокусного семейства. Поэтому в дальнейшем используется обозначение $\lambda = \pm \text{bord}$, где знак $+$ указывает на то, что предельные траектории получены при стремлении значения интеграла λ к граничному значению $\lambda = \text{bord}$ справа (тогда предельные траектории будут времениподобными), а знак $-$ указывает на стремление слева (предельные траектории будут пространственноподобными).

Прообразы таких траекторий в изоэнергетической поверхности Q^3 — объединение окружностей.

Траектории, лежащие на седловом уровне интеграла λ , делятся на три непесекающихся семейства: периодическая траектория, касательная к которой совпадает с вырожденной квадрикой с параметром λ , равным седловому значению интеграла, и два множества гомоклиных траекторий, расположенных по разные стороны от периодической траектории. Для таких траекторий выполнено фокальное свойство: в любой момент времени траектория лежит на прямой, проходящей через один из фокусов (в случае $\lambda = -b$ это фокусы, лежащие на оси x , и в случае $\lambda = a$ это фокусы, лежащие на оси y), причём при отражении траектории о границу происходит смена фокуса.

Прообразы седловых траекторий в изоэнергетическом многообразии подробно описаны в разделе 4.3.

4.3. Прообразы особых уровней интеграла: седловые значения

Опишем, как выглядят прообразы седловых значений интеграла для таких топологических билиардов.

Предложение 4.1. *Трёхмерный прообраз малой окрестности седлового значения интеграла λ в изоэнергетической поверхности Q^3 топологических билиардов гомеоморфен следующим многообразиям:*

- атому B для
 - $\Delta(2\Psi_5)^{3'}$ (седловое значение $\lambda = a$),
 - $\Delta(2\Psi_5)_1^3$ (седловое значение $\lambda = -b, a$),
 - $\Delta(2\Psi_5)_1^2$ (седловое значение $\lambda = a$);
- атому A^* для
 - $\Delta(2\Psi_3)_2^2$ (седловое значение $\lambda = -b, a$),
 - $\Delta(2\Psi_5)_1^2$ (седловое значение $\lambda = -b$);
- атому C_2 для $\Delta(2\Psi_5)^2$ (седловое значение $\lambda = a$).

Доказательство. 1. Рассмотрим билиард $\Delta(2\Psi_3)_2^2$. Он получен из двух экземпляров Ψ_3 склейкой вдоль прямых сегментов.

Сначала проведём склейку вертикальных сегментов и посмотрим, как изменятся при этом поверхности уровня особых значений интеграла λ . Опишем алгоритм для уровня интеграла $\lambda = a$.

Рассмотрим торы T^u и T^d — уровни интеграла $\lambda = a$ в изоэнергетических поверхностях Q^3 для двух билиардов Ψ_3 . На каждом из этих торов есть цикл, образованный точками вертикальных прямых сегментов, оснащённых векторами (это векторы v_1 , совпадающий с вектором v_4 , и v_2 , совпадающий с v_3). Разрежем торы по этим циклам и склеим в соответствии с законом отражения в топологическом билиарде: $(x, v_1)_u$ склеится с $(x, v_4)_d$, $(x, v_2)_u$ склеится с $(x, v_3)_d$ и т. д. Далее отождествим два выделенных цикла. Получим особый слой атома B .

Теперь осуществим склейку вдоль прямых горизонтальных сегментов. При этом особый слой атома B сначала разрезается по циклу, трансверсальному особой окружности, который образован прообразами точек нижнего сегмента. Вдоль него склеивались векторы на нижних сегментах на верхнем и на нижнем листах: v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . После разреза циклы склеятся в соответствии с законом отражения: точки $(x, v_1)_u$ отождествляются с $(x, v_4)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_2)_d$ и наоборот. Таким образом, особый слой атома B «перекручивается». В результате получим особый слой атома A^* .

Для уровня интеграла $\lambda = -b$ доказательство аналогично.

2. Рассмотрим билиард $\Delta(2\Psi_5)_1^2$. Он получен склейкой двух простых билиардов Ψ_5 вдоль левого и прямого нижнего граничных сегментов. Сначала осуществим склейку вдоль нижнего сегмента.

Рассмотрим два тора T^u и T^d , которые лежат на уровне интеграла $\lambda = -b$ в изоэнергетической поверхности Q^3 . Здесь аналогично пункту 1 получим особый слой атома B . Рассмотрим два атома B — уровни седлового значения интеграла $\lambda = a$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 верхнего и нижнего билиардов Ψ_5 . Разрежем особые слои атомов B по циклам, являющимся прообразами точек, лежащих на нижних сегментах билиардов Ψ_5 . Такие циклы трансверсальны особым окружностям атомов B . Вдоль них отождествляются векторы на нижних сегментах: v_1 с v_2 и v_3 с v_4 на верхнем и на нижнем листах. После разреза склеим полученное в соответствии с законом отражения: $(x, v_1)_u$ склеивается с $(x, v_2)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ склеивается с $(x, v_4)_d$ и наоборот. Получим особый слой атома B .

Теперь осуществим склейку вдоль левого сегмента. На уровне интеграла $\lambda = -b$ из особого слоя атома B получим особый слой атома A^* (аналогично пункту 1). На уровне интеграла $\lambda = a$ после первой склейки был получен атом B . Теперь разрежем особый слой этого атома по параллельному особой окружности циклу, который является прообразом точек граничного левого сегмента. Вдоль этого цикла отождествлялись векторы v_4 с v_1 и v_3 с v_2 на верхнем и нижнем листах. Далее склеим полученное по закону отражения в топологическом билиарде: $(x, v_4)_u$ склеиваем с $(x, v_1)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ склеиваем с $(x, v_2)_d$ и наоборот. Вновь получим особый слой атома B .

3. Рассмотрим билиард $\Delta(2\Psi_5)^2$. Он получен из двух простых билиардов Ψ_5 отождествлением левого и правого сегментов.

Сначала склеим левые сегменты. Рассмотрим два атома B , каждый из которых является уровнем интеграла $\lambda = a$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для верхнего и нижнего билиардов Ψ_5 . Разрежем особые слои атомов B по циклам, параллельным особой окружности, являющимся прообразами точек левых сегментов. Вдоль этих циклов отождествлялись векторы v_1 с v_4 и v_2 с v_3 на верхнем и нижнем листах. Теперь склеим полученное в соответствии с законом отражения в топологическом билиарде, а именно $(x, v_1)_u$ склеится с $(x, v_4)_d$, $(x, v_2)_u$ склеится с $(x, v_3)_d$ и т. д. Получим особый слой атома B_2 .

Теперь осуществим склейку правых сегментов. При этом на уровне интеграла $\lambda = a$ особый слой атома B_2 разрежется вдоль параллельных особой

окружности циклов. Эти циклы — прообразы точек, лежащих на правых сегментах. Вдоль этих циклов ранее отождествлялись векторы v_1 с v_4 и v_2 с v_3 на верхнем и нижнем листах. Склеим полученное после разреза в соответствии с билиардным отражением, а именно $(x, v_1)_u$ склеим с $(x, v_4)_d$ и наоборот, $(x, v_2)_u$ с $(x, v_3)_d$ и наоборот. Получим особый слой атома C_2 .

Отметим, что уровень интеграла $\lambda = -b$ не является особым для данного билиарда.

4. Рассмотрим билиард $\Delta(2\Psi_5)_1^3$. Он получен из билиарда $\Delta(2\Psi_5)^2$ отождествлением двух одинаковых свободных прямых сегментов.

Аналогично пункту 1 на уровне интеграла $\lambda = -b$ получим особый слой атома B .

Этот билиард также можно получить из $\Delta(2\Psi_5)_1^3$ отождествлением двух правых граничных сегментов. Обратимся ко второй части пункта 2. На уровне интеграла $\lambda = a$ при склейке левых сегментов был получен особый слой атома B из особого слоя атома B через разрез последнего по циклу, параллельному особой окружности. Теперь необходимо сделать два разреза по циклам, являющимся прообразами левых и правых сегментов, и вновь склеить полученное в соответствии с законом отражения в топологическом билиарде. Очевидно, получим особый слой атома B .

5. Рассмотрим билиард $\Delta(2\Psi_5)^{3'}$. Он получен из билиарда $\Delta(2\Psi_5)^2$ отождествлением двух верхних сегментов.

Рассмотрим уровень $\lambda = a$. Обратимся к пункту 4, в котором билиард $\Delta(2\Psi_5)_1^3$ был получен из билиарда $\Delta(2\Psi_5)^2$ отождествлением двух одинаковых свободных прямых сегментов. На уровне интеграла $\lambda = a$ происходит разрез особого слоя атома C_2 по циклу, трансверсальному особой окружности, и последующая склейка полученного в соответствии с билиардным законом. Мы показали, что на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома B . Итак, вышеописанная последовательность действий позволяет из особого слоя атома C_2 получить особый слой атома B .

В данном случае особый слой атома C_2 также необходимо сначала разрезать по трансверсальному особой окружности циклу, точки которого есть прообразы верхних сегментов верхнего и нижнего листов, и потом склеить полученное в соответствии с билиардным законом. Таким образом получим особый слой атома B .

Отметим, что в данном топологическом билиарде значение интеграла $\lambda = -b$ не является особым. \square

4.4. Аналог теоремы Лиувилля:

связные регулярные слои являются торами

Предложение 4.2. Для топологического билиарда $\Delta(2\Psi_i)$ прообразы особых уровней интеграла являются объединением двумерных торов.

Для доказательства этого предложения докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. Для топологического бильярда $\Delta(2\Psi_i)$ при $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, +\infty)$ прообразы неособых уровней интеграла являются объединением двумерных торов, причём если склеены одно, два смежных или три ребра, то на фиксированном уровне интеграла λ в изоэнергетическом многообразии Q^3 лежит один тор, а если склеены два противоположных или четыре ребра — два тора.

Доказательство. Пусть топологический бильярд состоит из двух экземпляров простого бильярда Ω (который является одним из бильярдov Ψ_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), склеенных по одному граничному сегменту. Без уменьшения общности считаем, что этот сегмент верхний.

Фиксируем значение λ , принадлежащее указанному интервалу.

Рассмотрим часть бильярда, куда проектируются точки, лежащие на уровне интеграла λ . Поскольку квадратики, соответствующие значениям λ из указанного интервала, являются гиперболами или прямой на бесконечности, то на плоскости Минковского они не пересекаются с эллипсами. Поэтому проекция поверхности уровня таких значений интеграла — это в точности оба экземпляра бильярда Ω .

Каждой точке бильярдov (x, y) соответствуют четыре вектора скорости v_i , причём точка (x, y, v_i) лежит на соответствующем уровне интеграла. Векторы скорости будем различать по направлению (на рис. 7 показаны четыре вида различных векторов). Получим восемь экземпляров бильярдov Ω , отвечающие за верхний и нижний листы топологического бильярда, оснащённые одним из четырёх векторов скорости. Обозначим их $(\Omega^j, v_i)_1$ и $(\Omega^j, v_i)_2$, где i принимает значения 1, 2, 3, 4, а j принимает значения 1 и 2. Склеим эти восемь экземпляров бильярдных областей по границе по закону отражения в топологическом бильярде и тем самым опишем слой интеграла λ в изоэнергетическом многообразии Q_3 .

Посмотрим, как отождествляются вектора на границе бильярда.

В произвольном простом бильярде на нижних и верхних сегментах по закону отражения отождествляем v_1 с v_2 , а v_3 с v_4 . На левых и правых сегментах отождествляем v_1 с v_4 , а v_2 с v_3 .

После осуществления операции склейки на верхнем сегменте $v_1 \in \Omega^1$ будет отождествляться с $v_2 \in \Omega^2$ (и, соответственно, $v_1 \in \Omega^1$ отождествляем с $v_2 \in \Omega^2$), а $v_3 \in \Omega^1$ с $v_4 \in \Omega^2$ (и, соответственно, $v_3 \in \Omega^2$ с $v_4 \in \Omega^1$).

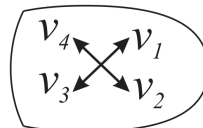


Рис. 7. Направление векторов скорости v_1, v_2, v_3, v_4 в бильярде Ω

Поэтому экземпляры билиардных областей (Ω^j, v_i) склеиваем друг с другом следующим образом: по нижним сегментам склеиваем (Ω^j, v_1) с (Ω^j, v_2) , а (Ω^j, v_3) с (Ω^j, v_4) (здесь j принимает значения 1, 2), по левым и правым сегментам склеиваем (Ω^j, v_1) с (Ω^j, v_4) , а (Ω^j, v_2) с (Ω^j, v_3) (здесь j принимает значения 1, 2).

По верхнему сегмента склеиваем (Ω^1, v_1) с (Ω^2, v_2) , (Ω^2, v_1) с (Ω^1, v_2) , а (Ω^1, v_3) с (Ω^2, v_4) , (Ω^2, v_3) с (Ω^1, v_4) .

Этот алгоритм показан на рис. 8, пунктиром соединены отождествлённые векторы.

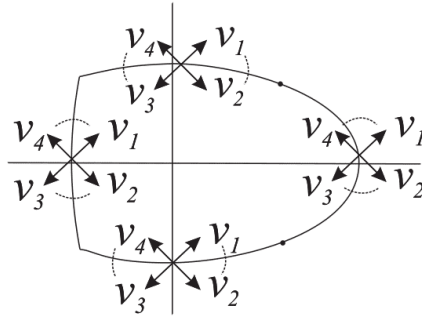


Рис. 8. Отождествление векторов v_1, v_2, v_3, v_4 на границе билиярда Ω

Тогда уровень интеграла гомеоморфен восьми четырёхугольникам, склеенным между собой по вышеописанному правилу. Легко видеть, что он представляет собой тор.

Для остальных случаев склейки сторон доказательство аналогичное. \square

Замечание 4.1. Отметим, что при доказательстве важно лишь количество склеиваемых областей и количество граничных сегментов, отождествлённых между собой операцией склейки (и их расположение относительно друг друга, если таких сегментов два). Таким образом, пусть при рассмотрении топологического билиярда $\Delta(2\Psi_i)$ в образе неособого значения интеграла λ билиардное движение происходит в области с несколькими отождествлёнными между собой граничными сегментами. Тогда для каждой такой области можно провести аналогичное доказательство и заключить, что на соответствующем уровне интеграла в изоэнергетической поверхности Q^3 лежат двумерные торы. Количество торов будет таким же, как и в лемме 4.1, а именно при склейке одного, двух смежных или трёх сегментов тор будет один, а при склейке двух противоположных или четырёх — два.

Замечание 4.2. Как следует из замечания 4.1 и леммы 4.1, если в прообразе неособого уровня интеграла билиардное движение происходит в несвязном объединении двух областей, то на соответствующем уровне интеграла в изоэнергетическом многообразии будут лежать два тора.

Доказательство. Рассмотрим некоторый топологический бильярд Ω , полученный склейкой двух эквивалентных простых бильярдов Ψ_i . Для $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty)$ утверждение доказано в лемме, поэтому фиксируем некоторое значение интеграла $\lambda \in (-b, a)$, которое по условию является неособым (т. е. не является граничным).

Рассмотрим проекцию уровня интеграла λ на плоскость бильярда и вырежем из области Ω те части, в которые не проецируются точки уровня интеграла. Получим некоторый бильярд Ω' , возможно несвязный. По алгоритму, описанному в лемме 4.1, каждая связная компонента склеится в объединение нескольких торов. Количество этих торов зависит от количества связных компонент и склеенных сегментов. \square

4.5. Молекула Фоменко—Цишанга — полный инвариант лиувиллевой эквивалентности

Итак, выше для каждого из топологических бильярдов $\Delta(2\Psi_3)_2^2$, $\Delta(2\Psi_5)^{3'}$, $\Delta(2\Psi_5)^2$, $\Delta(2\Psi_5)_1^3$ и $\Delta(2\Psi_3)_1^2$ было дано описание каждого слоя слоения Лиувилля, а именно была доказано, что неособые слои являются торами, а особые слои описываются 3-атомами. Однако для полного описания топологии строения Лиувилля необходима дополнительная информация о том, как склеены между собой регулярные окрестности особых слоёв. На каждом граничном торе выберем допустимые базисы и укажем матрицу перехода от одного базиса к другому. Структура атома задаёт правило выбора допустимых базисов.

Напомним, на граничном торе атома A в качестве цикла λ выбираем меридиан полнотория, т. е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория, а цикл μ должен дополнять его до базиса. В этом случае удобно считать цикл μ слоем расслоения Зейферта. Слои расслоения Зейферта имеют естественную ориентацию, задаваемую гамильтоновым векторным полем. Более точно, один из этих слоёв (а именно критическая окружность дополнительного интеграла λ , ось полнотория) является траекторией рассматриваемого векторного поля. Ориентация этого слоя позволяет точно определить ориентацию на цикле μ .

В случае седлового 2-атома B соответствующий 3-атом U имеет структуру тривиального S^1 -расслоения над двумерным атомом B («утолщённая восьмёрка»). В качестве цикла λ_i на каждом из граничных торов T_i возьмём слой этого расслоения. Дополнительные циклы μ_i выберем следующим образом. Рассмотрим произвольное сечение $P \in U$. Оно высекает на каждом граничном торе T_i некоторый цикл μ_i , который и берём в качестве второго базисного цикла на T_i . Ориентация, как и в предыдущем случае, выбирается однозначно.

На других седловых атомах без звёздочек выбор циклов осуществляется аналогичным образом, а именно цикл λ есть слой расслоения Зейферта, а циклы μ высекаются на граничных торах сечением трёхмерного атома плоским атомом.

Итак, в каждой точке ребра есть два базиса, которые определяются согласованно с атомами, которые соединены выбранным ребром графа. Матрица

перехода от одного базиса к другому называется матрицей склейки. Поскольку допустимые базисы выбираются неоднозначно, матрица склейки может быть различной при различном выборе базисов. Однако, имея матрицу склейки, можно вычислить числовые метки r , ε , n — инварианты относительно допустимых замен базисов на граничных торах (см. [2, леммы 4.5, 4.6]). Правила подсчёта этих чисел подробно описаны в [2].

Определение 4.2. Молекула, снабжённая метками r , ε , n , называется *меченой молекулой* или *инвариантом Фоменко—Цишанга*.

4.6. Подсчёт меток в молекулах Фоменко—Цишанга для некоторых топологических бильярдов на плоскости Минковского

При доказательстве следующих лемм введём обозначение: для простых бильярдов Ψ_3 , Ψ_5 , Ψ_6 (а также топологических бильярдов, полученных склейкой из этих бильярдов) параметр верхнего (и нижнего, если он выпуклый) сегмента λ_2 и параметр правого (и левого, если он выпуклый) сегмента λ_1 .

Определение 4.3. Назовём ориентацию цикла согласованной, если его ориентация совпадает с ориентацией векторов скорости, и несогласованной, если ориентация цикла противоположна ориентации векторов скорости.

Лемма 4.2. Для области $\Delta(2\Psi_3)_2^2$ инвариант Фоменко—Цишанга изображён на рис. 6.

Доказательство. Ориентируем рёбра молекулы в соответствии с рис. 6. Ориентация показывает, от какого базиса к какому осуществляется переход.

Рассмотрим ребро, соответствующее значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$.

На рис. 9 показан выбор циклов на граничном торе атома A . В самом деле, при стремлении параметра интегрального эллипса к значению $\lambda = -\lambda_2$ цикл λ стянется в точку, а цикл μ перейдёт в критическую окружность атома A (причём его ориентация согласована с ориентацией критической окружности атома). Теперь опишем выбор циклов на граничных торах атома A^* . Для начала в качестве циклов λ берём слои расслоения Зейферта (см. рис. 9), причём их ориентация согласована с ориентацией критической окружности. Рассмотрим сечение 3-атома A^* 2-атомом B , трансверсальное к особой окружности. Оно высекает на границе 3-атома три цикла $\hat{\mu}$, причём два из них высекаются на эллиптическом торе и пересекают цикл λ — слой расслоения Зейферта — один раз, а один $\hat{\mu}$, высекаемый на гиперболическом торе, пересекает слой расслоения Зейферта два раза. Сконструируем из таких циклов $\hat{\mu}$ (они показаны на рис. 9) истинные циклы μ на граничных торах атома A^* . Для эллиптического тора ребра в качестве μ выбираем одну из связных компонент $\hat{\mu}$, а для гиперболического тора — цикл $\mu = (\lambda + \hat{\mu})/2$.

Для атома A^* , соответствующего параметру $\lambda = a$, выбор циклов осуществляется аналогично (см. рис. 9).

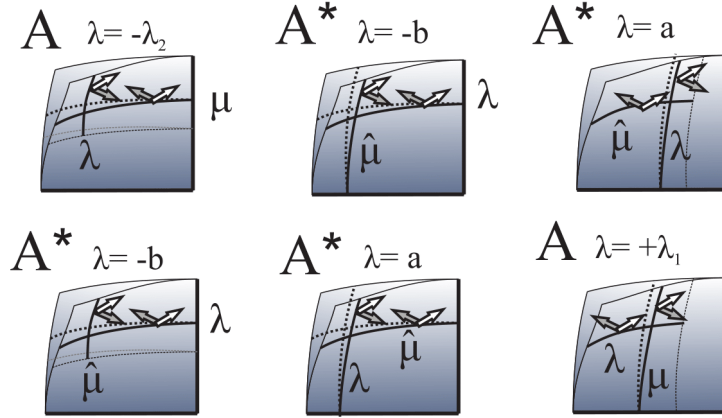


Рис. 9. Выбор циклов для области $\Delta(2\Psi_3)_2^2$. В первом столбце выбор циклов для ребра, соответствующего значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$, во втором — $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, +\infty) \cup \{\infty\}$, в третьем — $\lambda \in (+\lambda_1, a)$. Тонкой пунктирной линией обозначена дуга интегрального эллипса, белой стрелочкой на цикле — его ориентация

Наконец, циклы для граничного тора атома A , соответствующего значению параметра $\lambda = +\lambda_1$, показаны на рис. 9; выбраны они так же, как и для атома A , соответствующего значению параметра $\lambda = -\lambda_2$.

Теперь, начиная с левого ребра, выпишем матрицы перехода от одного базиса к другому, следуя фиксированной ранее ориентации рёбер.

Для левого ребра матрицей склейки является

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причём ориентация λ граничного тора атома A выбрана из условия на определитель матрицы склейки, а ориентацию $\hat{\mu}$ (очевидно, вместе с ней и ориентацию μ) седлового атома считаем согласованной. Метки на этом ребре: $r = 0, \varepsilon = 1$. Для среднего ребра имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

причём ориентация $\hat{\mu}$ атома A^* (задающая ориентацию μ), соответствующего значению $\lambda = a$, выбирается из условия на определитель. Метки на этом ребре: $r = 1/2, \varepsilon = -1$.

Теперь ориентация $\hat{\mu}$ для граничных торов седлового атома на правом ребре выбрана однозначно, а она задаёт ориентацию цикла μ . Матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ориентация λ атома A выбирается из условия на определитель. Метки на этом ребре: $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

Имеем в молекуле две семьи. Для обеих $n = -1$ (это следует из определения и явного вида матриц склейки). \square

Лемма 4.3. Для области $\Delta(2\Psi_5)^{3'}$ инвариант Фоменко–Цишанга изображён на рис. 6.

Доказательство. Ориентируем рёбра грубой молекулы к седловому атому.

Рассмотрим ребро, соответствующее значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -\lambda_2) \cup (a, +\infty) \cup \{\infty\}$.

Выбор циклов на граничных торах атома A указан на рис. 10. В самом деле, при стремлении значения интеграла λ к граничному значению $-\lambda_2$ цикл λ стянется в точку. Цикл μ при этом стянется на критическую окружность атома, и его ориентация выбирается согласованной с ориентацией критической окружности.

Выбор циклов на атоме B указан на рис. 10. Здесь λ — слой расслоения Зейфферта и его ориентация согласована с ориентацией критической окружности, а цикл μ является циклом, высекаемым некоторым сечением трёхмерного атома B двумерным атомом B , и его ориентацию выберем согласованной. Тогда матрица склейки на этом ребре имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом ориентация цикла λ граничного тора атома A выбирается из условия на определитель матрицы. Метки на этом ребре: $r = \infty$, $\varepsilon = -1$.

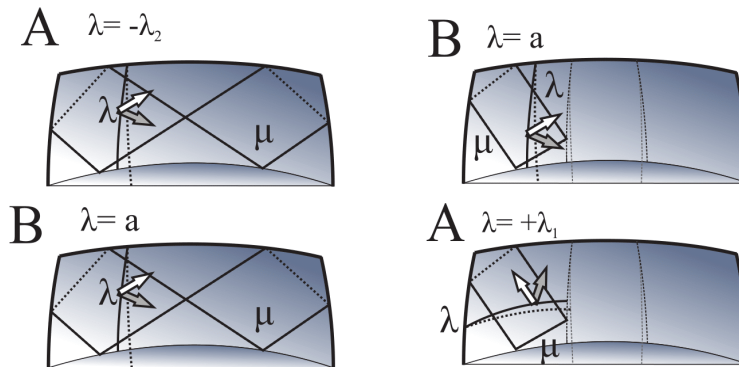


Рис. 10. Выбор циклов для области $\Delta(2\Psi_5)^{3'}$. В первом столбце выбор циклов для ребра, соответствующего значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -\lambda_2) \cup (a, +\infty) \cup \{\infty\}$, во втором — $\lambda \in (+\lambda_1, a)$. Тонкой пунктирной линией обозначена дуга интегрального эллипса, белой стрелочкой на цикле — его ориентация

Теперь рассмотрим одно из рёбер молекулы, соответствующее значению параметра $\lambda \in (+\lambda_1, a)$.

Выбор циклов на граничных торах атомов показан на рис. 10. В самом деле, на граничном торе атома B цикл λ — это слой расслоения Зейферта и его ориентация согласована с ориентацией критической окружности, а цикл μ — сечение граничного тора атома B двумерным атомом B , притом ориентация на нём уже задана; если ориентация цикла μ на внешнем граничном торе согласованная, то на внутренних она будет несогласованной, так как ориентации циклов μ связаны условием существования глобального сечения.

На граничном торе атома A цикл μ стянется на критическую окружность и его ориентация согласована с ориентацией этой окружности, а цикл λ стянется в точку при стремлении значения интеграла λ к граничному значению $+\lambda_2$. Нетрудно проверить, что $\mu_B = -(\pm\lambda_A + \lambda_B)/2 = -\mu_A$ (минус, поскольку ориентация несогласованная, а знак λ_A выберем из условия на определитель матрицы перехода), тогда матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

что значит, что ориентация λ_A выбрана несогласованной. Метки на этом ребре: $r = 1/2, \varepsilon = 1$.

Для второго ребра, соответствующего этим значениям параметра, выбор циклов происходит аналогично, поэтому метки тоже $r = 1/2, \varepsilon = 1$. \square

Лемма 4.4. Инвариант Фоменко—Цишанга для бильярда $\Delta(2\Psi_5)^2$ представлен на рис. 6.

Доказательство. Ориентируем ребра молекула к седловому атому.

Рассмотрим ребра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -\lambda_2) \cup (a, +\infty) \cup \{\infty\}$.

Циклы для граничных торов атомов A отмечены на рис. 11. Действительно, легко видеть, что при стремлении параметра интегрального эллипса к значению

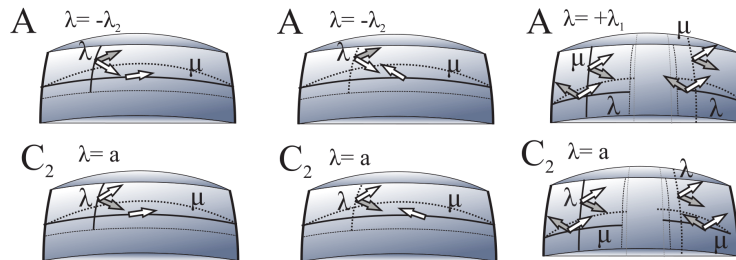


Рис. 11. Выбор циклов для области $\Delta(2\Psi_5)^2$. В первом столбце выбор циклов для ребра, соответствующего значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -\lambda_2) \cup (a, +\infty) \cup \{\infty\}$, во втором — $\lambda \in (+\lambda_1, a)$. Тонкой пунктирной линией обозначена дуга интегрального эллипса, белой стрелочкой на цикле — его ориентация

$\lambda = -\lambda_2$ цикл λ стянется в точку (ориентация на нём пока не задана), а цикл μ стянется на особую окружность (его ориентация согласована с ориентацией особой окружности).

Циклы для граничных торов атома C_2 показаны на рис. 11. Действительно, циклы λ стягиваются на особые окружности и их ориентация выбрана согласованной с ориентациями этих окружностей, а циклы μ высекаются на граничных торах некоторым сечением 3-атома C_2 плоским атомом C_2 . Выберем ориентацию этих циклов μ согласованной.

Тогда матрицы склейки на верхнем и нижнем ребре имеют вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(отметим, что теперь мы можем выбрать ориентацию λ на атомах A исходя из условия на определитель матрицы склейки), и метки будут $r = \infty$, $\varepsilon = -1$ на обоих рёбрах.

Рассмотрим рёбра, соответствующие значениям $\lambda \in (+\lambda_1, a)$.

Циклы для граничных торов атомов указаны на рис. 11. В самом деле, на торах седлового атома C_2 циклы λ стянутся на особые окружности (их ориентация согласована с ориентациями особых окружностей), а циклы μ высекаются на граничных торах седлового 3-атома C_2 двумерным атомом C_2 . Поскольку все циклы μ связаны условием существования глобального сечения, то ориентация циклов, выбранных на этих двух граничных торах, будет несогласованной.

На граничных торах атома A циклы λ стянутся в точку при стремлении параметра интегрального эллипса к значению $+\lambda_1$ и ориентация на них будет выбрана позже исходя из условия на определитель матрицы склейки. Циклы μ стянутся на особые окружности, и их ориентация согласована с их ориентацией.

Тогда матрицы склейки имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

для верхнего и нижнего рёбер (теперь можем выбрать ориентацию циклов λ на торах атомов A), и метки будут $r = 0$, $\varepsilon = 1$ для верхнего и нижнего рёбер. \square

Лемма 4.5. *Инвариант Фоменко—Цишанга для биллиарда $\Delta(2\Psi_5)_1^3$ показан на рис. 6.*

Доказательство. Ориентируем рёбра молекулы в соответствии с рис. 6.

Рассмотрим рёбра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Выбор циклов на граничных торах атомов показан на рис. 12. На граничных торах атомов A выбор циклов осуществляется так же, как и в лемме 4.4 для рёбер с таким же параметром. На граничных торах атома B циклы λ стягиваются на особую окружность и ориентация их задаётся ориентацией критической окружности, а циклы μ — это сечение 3-атома B 2-атомом B , и их ориентацию считаем согласованной.

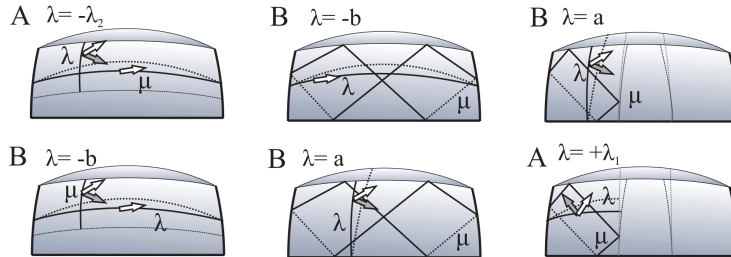


Рис. 12. Выбор циклов для области $\Delta(2\Psi_5)_1^3$. В первом столбце выбор циклов для ребра, соответствующего значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$, во втором — $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, +\infty) \cup \{\infty\}$, в третьем — $\lambda \in (+\lambda_1, a)$. Тонкой пунктирной линией обозначена дуга интегрального эллипса, белой стрелочкой на цикле — его ориентация

Тогда для обоих рёбер матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и метки на этих рёбрах $r = 0, \varepsilon = 1$.

Рассмотрим ребро, соответствующее значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\infty\}$. Выбор циклов показан на рис. 12. На граничном торе атома B , соответствующего значению параметра $\lambda = -b$, выбраны циклы μ_- (ориентация которого уже зафиксирована и является несогласованной) и цикл λ_- (стягивается на особую окружность атома, ориентация согласована с её ориентацией).

На граничном торе атома B , соответствующего значению параметра $\lambda = a$, выбраны цикл μ_+ (его ориентация пока не зафиксирована, и этот цикл высекается на граничном торе сечением 3-атома B 2-атомом B) и цикл λ_+ (стягивается на особую окружность атома, ориентация цикла фиксирована и согласована с ориентацией окружности).

Нетрудно проверить, что $\mu_+ = \pm(\lambda_+ + \lambda_-)$ (знак выбирается исходя из условия на определитель матрицы склейки и задаёт согласованную или несогласованную ориентацию цикла μ_+). Поскольку $\lambda_+ = -\mu_-$ (помним, что ориентация μ_- несогласованная), то матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определитель этой матрицы должен быть равен -1 , окончательно заключаем, что матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ориентация μ_+ несогласованная и метки на ребре $r = 0, \varepsilon = -1$.

Рассмотрим рёбра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (+\lambda_1, a)$. Выбор циклов на граничных атомах показан на рис. 12.

На граничных торах атома B циклы μ_+ высекаются 2-атомом B и их ориентация фиксирована и является согласованной, а циклы λ_+ — это слой расщепления Зейферта, и их ориентация согласована с ориентацией критической окружности атома.

На граничных торах атомов A цикл λ_- стягивается в точку при стремлении параметра интегрального эллипса к значению $+\lambda_1$ и цикл μ_- стянется на особую окружность атома и его ориентация задаётся ориентацией этой окружности.

Нетрудно проверить, что $\mu_- = (\pm\lambda_- + \lambda_+)/2 = \mu_+$. Исходя из условия на определитель матрицы склейки, ориентируем λ_- . Тогда матрицы склейки для верхнего и нижнего рёбер имеют вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и метки на обоих рёбрах $r = 1/2, \varepsilon = 1$.

Итак, в молекуле имеем две семьи. Метка левой — $n = 0$, метка правой —

$$n = \left[-\frac{-1}{1} \right] + \left[-\frac{1}{2} \right] + \left[-\frac{1}{2} \right] = -1$$

(это следует из определения и явного вида матриц склеек для каждого ребра). \square

Лемма 4.6. *Инвариант Фоменко—Цишанга для области $\Delta(2\Psi_3)_1^2$ показан на рис. 6.*

Доказательство. Ориентируем ребра согласно рис. 6.

Рассмотрим ребро, соответствующее значениям $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Выбор циклов для граничных атомов показан на рис. 13. На граничном торе атома A цикл λ стянется в точку при стремлении параметра интегрального эллипса к $-\lambda_2$, его

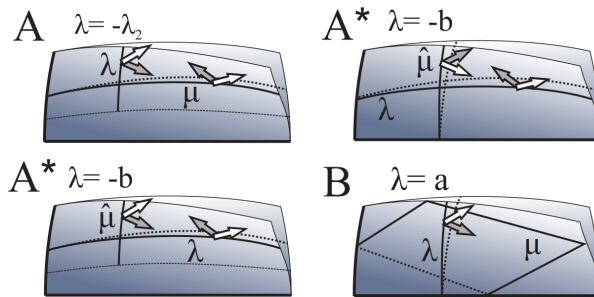


Рис. 13. Выбор циклов для области $\Delta(2\Psi_3)_1^2$. В первом столбце выбор циклов для ребра, соответствующего значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$, во втором — $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, +\infty) \cup \{\infty\}$. Тонкой пунктирной линией обозначена дуга интегрального эллипса, белой стрелочкой на цикле — его ориентация

ориентацию зададим позже при написании матрицы склейки, цикл μ стянется на критическую окружность атома, его ориентация согласованная.

На граничном торе атома A^* цикл λ — это слой расслоения Зейферта и его ориентация согласована с ориентацией особой окружности атома. Опишем выбор цикла μ .

Рассмотрим циклы, высекаемые на граничных торах 3-атома A^* 2-атомом B . Это три цикла $\hat{\mu}$, два из которых высекаются на эллиптическом торе, а один высекается на гиперболическом торе и пересекает выделенный слой расслоения Зейферта два раза. Для того чтобы сконструировать настоящие циклы μ , на эллиптическом торе берём одну из связных компонент циклов $\hat{\mu}$ (выберем его ориентацию согласованной), а на гиперболическом торе $\mu = (\hat{\mu} + \lambda)/2$, где λ — слой расслоения Зейферта (а значит, и цикл λ на эллиптическом торе), а ориентация $\hat{\mu}$ несогласованная.

Тогда на рассматриваемом ребре матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим ребро, соответствующее значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\infty\}$. Выбор циклов на граничных торах атомов показан на рис. 13.

На торе атома A^* цикл λ_- есть слой расслоения Зейферта, его ориентация фиксирована, выбор цикла μ_- описан выше (а именно, $\mu_- = (\hat{\mu} + \lambda_-)/2$).

На торе атома B цикл λ_+ стянется на особую окружность и его ориентация согласована с ориентацией особой окружности, а цикл μ_+ высекается на эллиптическом торе сечением этого 3-атома плоским атомом B . Нетрудно проверить что $\mu_+ = \pm(\lambda_+ + \lambda_-)/2$.

Поскольку $\hat{\mu} = -\lambda_+$, то матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \pm 1 & \mp 1 \end{pmatrix}.$$

Её определитель должен быть равен -1 , выбираем ориентацию μ_+ несогласованной. Тогда матрица переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

а метки на ребре $r = 1/2$, $\varepsilon = -1$.

Рассмотрим ребра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (+\lambda_1, a)$.

Проекция тора на плоскость бильярда распадается на две компоненты связности.

В случае когда компонента связности содержит коническую точку, выбор циклов показан на рис. 14. Таким образом, $\mu_+ = \mu_- = (\lambda_+ \pm \lambda_-)/2$. Выберем ориентацию λ_- так, чтобы определитель матрицы склейки был равен -1 . Матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

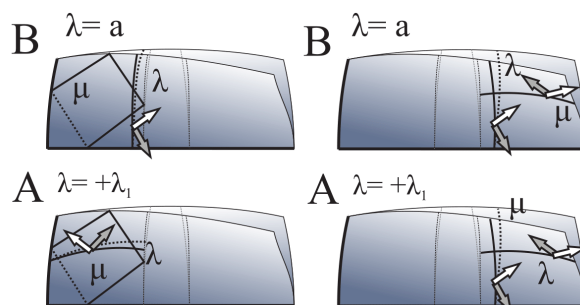


Рис. 14. Выбор циклов для области $\Delta(2\Psi_3)_1^2$ для ребра, соответствующего значениям интеграла $\lambda \in (+\lambda_1, a)$. Тонкой пунктирной линией обозначена дуга интегрального эллипса, белой стрелочкой на цикле — его ориентация

метки на ребре $r = 1/2, \varepsilon = 1$. В случае когда компонента связности не содержит конических точек, выбор циклов показан на рис. 14. На граничном торе атома A цикл μ стянется на особую окружность и его ориентация согласована с её ориентацией, а цикл λ стянется в точку. На граничном торе атома B ориентация цикла μ согласованная, а ориентация цикла λ — слоя расслоения Зейферта — согласована с ориентацией критической окружности атома. Тогда матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

метки на ребре $r = 0, \varepsilon = 1$.

В молекуле имеем две семьи. Метка левой —

$$n = 0 + \left[\frac{1}{-2} \right] = -1,$$

метка правой —

$$n = 0 + \left[-\frac{1}{-2} \right] + \left[-\frac{1}{2} \right] = -1$$

(это следует из определения и явного вида матриц склеек для каждого ребра). \square

Литература

- [1] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
- [2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999.

- [3] Ведюшкина (Фокичева) В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. Математика. — 2017. — Т. 81, № 4. — С. 20–67.
- [4] Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. — М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010.
- [5] Драгович В., Раднович М. Топологические инварианты эллиптических бильярдов и геодезических потоков на эллипсоиде // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 3. — С. 51–64.
- [6] Козлов В. В., Трещёв Д. В. Генетическое введение в динамику систем с ударами. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
- [7] Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т. Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, № 9. — С. 3–96.
- [8] Кудрявцева Е. А., Фоменко А. Т. Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Докл. РАН. Сер. Математика. — 2012. — Т. 446, № 6. — С. 615–617.
- [9] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами // Матем. заметки. — 1988. — Т. 43, № 5. — С. 663–671.
- [10] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трёхмерной топологии. — М.: Наука, 1998.
- [11] Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 10. — С. 127–176.
- [12] Фокичева В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела // Докл. РАН. Сер. Математика. — 2015. — Т. 465, № 2. — С. 150–153.
- [13] Фоменко А. Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. — 1989. — Т. 44, № 1 (265). — С. 145–173.
- [14] Фоменко А. Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 4. — С. 747–779.
- [15] Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 3. — С. 546–575.
- [16] Dragović V., Radnović M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dyn. — 2009. — Vol. 14, No. 4-5. — P. 479–494.
- [17] Fokicheva V. V., Fomenko A. T. Billiard systems as the models for the rigid body dynamics // Advances in Dynamical Systems and Control. — Berlin: Springer, 2016. — (Stud. Systems Decision Control; Vol. 69). — P. 13–32.
- [18] Fomenko A. T. Symplectic Geometry. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1995.
- [19] Fomenko A. T., Konyaev A. Yu. New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems // Topology Its Appl. — 2012. — Vol. 159. — P. 1964–1975.

- [20] Fomenko A. T., Konyaev A. Yu. Algebra and geometry through Hamiltonian systems // Continuous Distributed Systems. Theory and Applications. — Berlin: Springer, 2014. — (Solid Mech. Its Appl.; Vol. 211). — P. 3—21.
- [21] Fomenko A. T., Morozov P. V. Some new results in topological classification of integrable systems in rigid body dynamics // Proc. of the Workshop «Contemporary Geometry and Related Topics», 15—21 May 2002, Belgrade, Yugoslavia. — New York: World Scientific, 2004. — P. 201—222.
- [22] Fomenko A. T., Nikolaenko S. S. The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid // J. Geom. Phys. — 2015. — Vol. 87. — P. 115—133.
- [23] Fomenko A. T., Trofimov V. V. Integrable Systems on Lie Algebras and Symmetric Spaces. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1988.
- [24] Oshemkov A. A., Fomenko A. T. Invariants of the main integrable cases of the rigid body motion equations // Adv. Sov. Math. — 1991. — Vol. 6. — P. 67—146.