Целочисленные аффинные 3-многообразия

И. К. КОЗЛОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ikozlov90@gmail.com

УДК 514.76

Ключевые слова: аффинные многообразия, трёхмерные многообразия, нильмногообразия, солвмногообразия.

Аннотация

Аффинные многообразия называются целочисленными, если в некотором атласе все отображения склейки являются аффинными преобразованиями с целочисленными матрицами линейных частей. В работе описаны все полные целочисленные аффинные структуры на компактных трёхмерных многообразиях с точностью до конечнолистного накрытия. При этом получен полный список целочисленных аффинных структур на трёхмерном торе и компактных трёхмерных нильмногообразиях.

Abstract

I. K. Kozlov, Integral affine 3-manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 151—167.

Affine manifolds are called integral if there is an atlas such that all transition maps are affine transformations with integer matrices of linear parts. In this paper, we describe all complete integral affine structures on compact three-dimensional manifolds up to a finite-sheeted covering. Also a complete list of integral affine structures on the three-dimensional torus and compact three-dimensional nilmanifolds was obtained.

1. Введение

Аффинное многообразие — это гладкое многообразие, на котором существует атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, все отображения склейки $\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$ которого являются аффинными преобразованиями $\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b}$. Аффинное многообразие называется *целочисленным*, если матрицы A всех отображений склеек целочисленны, т. е. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Целочисленные аффинные многообразия естественным образом возникают в симплектической геометрии и теории интегрируемых гамильтоновых систем. В частности, база любого лагранжева расслоения с компактными связными слоями обладает естественной целочисленной аффинной структурой (см., например, [1, 4]). В координатах действие-угол из теоремы Лиувилля эта аффинная структура на базе задаётся координатами действия.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 6, с. 151—167.
© 2019 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Ранее в [1] были описаны классифицирующие инварианты лагранжевых расслоений (эта работа основывалась на [4, 8]). Первым из этих инвариантов является целочисленная аффинная структура на базе. Остальные инварианты — элементы некоторых групп когомологий, и в [1] было продемонстрировано, как они могут быть вычислены, если известна аффинная структура на базе. Таким образом, для исследования лагранжевых расслоений на (компактных) шестимерных симплектических пространствах $\pi\colon (M^6, \omega) \to B^3$ или интегрируемых систем с тремя степенями свободы может быть полезен список возможных целочисленных аффинных структур на (компактных) трёхмерных многообразиях. Подобный список описан в этой работе (см. теоремы 2 и 4).

Ранее двумерные лагранжевы расслоения над ориентируемыми двумерными поверхностями были классифицированы К. Н. Мишачёвым [8]. При этом им было доказано, что любое двумерное целочисленное аффинное многообразие диффеоморфно либо тору $\mathbb{T}^2$, либо бутылке Клейна K^2, а также были классифицированы все целочисленные аффинные структуры на двумерном торе $\mathbb{T}^2$. Аналогичные результаты для неориентируемых поверхностей (т. е. в случае бутылки Клейна K^2) были независимо (и практически одновременно) получены И. К. Козловым [1] и Д. Сепе [9]. В этой работе мы продолжим эти исследования в трёхмерном случае.

Хорошо известно, что компактность аффинного многообразия не влечёт его (геодезическую) полноту. До сих пор не доказанной является гипотеза Маркуса о том, что полнота аффинного многообразия эквивалентна наличию параллельной формы объёма (что в свою очередь эквивалентно тому, что для некоторого атласа все матрицы отображений склеек принадлежат $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$). Для простоты мы будем рассматривать только те аффинные многообразия, для которых гипотеза Маркуса выполнена. Также мы будем считать, что многообразия ориентируемы, чтобы все матрицы отображений склеек принадлежали $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

Договорённость 1. Все рассматриваемые целочисленные аффинные многообразия предполагаются полными и ориентируемыми.

Любое *полное аффинное многообразие* — это фактор E/Γ, где $\Gamma \subset \mathrm{Aff}(E)$ — это дискретная группа аффинных преобразований, свободно и разрывно действующая на аффинном пространстве E. Для краткости мы будем часто отождествлять полное аффинное многообразие $M \approx E/\Gamma$ с соответствующей группой $\Gamma \subset \mathrm{Aff}(E)$.

В [5] были классифицированы все трёхмерные аффинные кристаллографические группы. В частности, там были описаны все полные компактные трёхмерные аффинные многообразия.

Теорема 1 [5]. *Пусть M^3 — компактное трёхмерное многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *M допускает полную аффинную структуру*;
2) *M конечнолистно накрывается расслоением над S^1 со слоем $\mathbb{T}^2$*;
3) *$\pi_1(M)$ разрешима и M асферично.*

Классификация целочисленных аффинных структур «тоньше» классификации аффинных кристаллографических групп в [5]. С алгебраической точки зрения в [5] изучаются классы сопряжённости дискретных подгрупп $\Gamma \subset \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$. В этой работе изучаются классы сопряжённости подгрупп Γ в меньшей группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ аффинных преобразований $\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b}$ с целочисленной матрицей A.

В этой работе мы опишем все полные целочисленные аффинные структуры на компактных трёхмерных многообразиях с точностью до конечнолистного накрытия (см. теорему 4). Мы рассматриваем структуры с точностью до накрытия, чтобы итоговый список получился не слишком большим. Также в разделе 2 мы опишем все целочисленные аффинные структуры на трёхмерном торе и компактных трёхмерных нильмногообразиях (см. теорему 2). Отметим, что теорема 2 доказана элементарными методами без использования результатов из [5].

В этой работе мы будем использовать следующие обозначения и определения. Аффинное преобразование $\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b}$ будет обозначаться как $(A, \vec{b})$. Линейную и векторную части аффинного преобразования $g = (A, \vec{b})$ мы будем обозначать через $L(g) = A$ и $v(g) = \vec{b}$ соответственно. Группа аффинных преобразований $(A, \vec{b})$ вещественного n-мерного пространства с целочисленной матрицей A обозначается как $\mathrm{AGL}_n(\mathbb{Z})$. Аффинный базис в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ — это репер $Oe_1 \dots e_n$, где $O \in \mathbb{A}^n$ и векторы $e_1 \dots e_n$ образуют базис $\mathbb{R}^n$. Аффинный базис мы будем называть *целочисленным*, если все векторы e_i принадлежат $\mathbb{Z}^n$. Диффеоморфизм целочисленных аффинных многообразий $f\colon M_1 \to M_2$, отождествляющий целочисленные аффинные структуры на них, мы будем называть *аффинным диффеоморфизмом*.

Автор благодарит сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ, в особенности профессора А. А. Ошемкова, за оказанную поддержку при написании работы. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01303).

2. Целочисленные аффинные 3-нильмногообразия

Теорема 2. *Любое компактное целочисленное аффинное трёхмерное нильмногообразие M^3 полно. При этом оно аффинно диффеоморфно фактору $\mathbb{R}^3$ по действию одной из следующих групп Γ, описанных в таблицах 1 и 2. В этих таблицах для порождающих элементов g, h, t группы Γ указаны матрицы A, $\vec{b}$ соответствующих аффинных преобразований $x \mapsto Ax + \vec{b}$.*

В сериях 1—4 (описанных в таблице 1) многообразие диффеоморфно тору $M^3 \approx \mathbb{T}^3$ и порождающие элементы g, h, t коммутируют между собой. В остальных сериях (описанных в таблице 2) они связаны соотношениями

$$[g, t] = [h, t] = e, \quad [g, h] = t^m, \tag{1}$$

Таблица 1. Целочисленные аффинные 3-торы

	g	h	t
1	$E, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & na_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ nz_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1^* \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{b_2}{a_1} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Таблица 2. Целочисленные аффинные 3-нильмногообразия

	g	h	t
5	$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{mx_3}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1^* \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{mx_3}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & na_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{mx_3}{a_1} + nz_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -\frac{mx_3}{nc_1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & nc_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \frac{my_3}{c_1} \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1^* \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{mx_3 + b_2 z_1}{a_1} \\ 0 \end{pmatrix}$	$E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

где $m \in \mathbb{N}$. *Во всех сериях* $a_1, b_1, b_2, c_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b_1^* \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$. *Также во всех сериях, кроме* 8, *векторные части* $v(g)$, $v(h)$, $v(t)$ *должны быть линейно независимы. В серии* 8 *должно выполняться условие*

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_1x_3 - y_3x_1 + \frac{m}{2n}x_3^2 \\ -ny_3 & y_2x_3 - y_3x_2 + \frac{mn}{2}y_3^2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Замечание 1. Из теоремы 2 можно получить классификацию трёхмерных целочисленных аффинных нильмногообразий аналогично той схеме, которая была описана в [1, 8] в двумерном случае. Многообразия из разных серий аффинно не диффеоморфны (так как у них разная линейная голономия). В одной серии нужно отождествить многообразия M^3, переходящие друг в друга при изменении целочисленного аффинного базиса $\mathbb{R}^3$ или при изменении порождающих фундаментальной группы $\pi(M^3)$. Например, два многообразия M и M' из серии 1 аффинно диффеоморфны тогда и только тогда, когда

$$C \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{pmatrix}$$

для некоторых матриц $C, D \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$.

Доказательство теоремы 2. Полнота целочисленных аффинных нильмногообразий вытекает из следующего ранее доказанного утверждения.

Теорема 3 [6]. *Для компактного аффинного многообразия* M *с нильпотентной аффинной голономией следующие условия эквивалентны*:

1) M *полно*;
2) *на* M *существует параллельная форма объёма*;
3) *линейная голономия унипотентна*;
4) M — *полное аффинное нильмногообразие.*

Поскольку линейная голономия унипотентна, существует вещественный базис $\mathbb{R}^3$, в котором все матрицы A линейной голономии — верхние унитреугольные матрицы. Следующее утверждение показывает, что этот базис может быть выбран целочисленным.

Утверждение 1. *Если у всех матриц из некоторого подмножества целочисленных матриц* $M \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ *есть общий собственный вектор* v *с собственным значением* 1, *то этот вектор может быть выбран целочисленным. Более того, этот вектор* v *можно взять из некоторого базиса* $\mathbb{Z}^n$.

Доказательство. Действительно, вектор v задаётся линейными уравнениями $(A - E)v = 0$, которые должны выполняться для всех $A \in M$. Поскольку все матрицы целочисленные, у этих линейных уравнений существует общее ненулевое решение над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда у них существует общее ненулевое решение над $\mathbb{Q}$. Остаётся воспользоваться следующим простым утверждением.

Утверждение 2. *Целочисленный вектор $v \in \mathbb{Z}^n$ можно включить в целочисленный базис $\mathbb{Z}^n$ тогда и только тогда, когда его координаты взаимно просты в совокупности.*

Таким образом, любой вектор из $\mathbb{Q}^n$ пропорционален вектору из некоторого базиса $\mathbb{Z}^n$. Утверждение 1 доказано. $\square$

После того как все матрицы A линейной голономии одновременно приведены к верхнему унитреугольному виду, задача решается прямым перебором. Обозначим через $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ множество верхних унитреугольных матриц с целыми коэффициентами. Необходимо указать все дискретные подгруппы $\Gamma \subset \mathrm{UT}_3(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$, которые действуют на $\mathbb{R}^3$ свободно и разрывно. Этот перебор удобно проводить по рангу подгруппы сдвигов T в группе Γ.

1. Пусть $\operatorname{rk} T = 3$. Тогда фактор по действию T будет тором $\mathbb{T}^3$. Следующее несложное утверждение показывает, что $\Gamma = T$, поскольку в Γ/T не может быть нетривиальных элементов конечного порядка.

Утверждение 3. *Если группа G свободно и разрывно действует на $\mathbb{R}^n$, то любая подгруппа $H \subset G$, у которой фактор-пространство $\mathbb{R}^n/H$ компактно, имеет конечный индекс*: $[G : H] < \infty$.

Очевидно, что в данном случае мы получаем серию 1 из таблицы 1.

2. Пусть $\operatorname{rk} T = 2$. В данном случае достаточно добавить к T ещё один элемент, чтобы фактор по действию порождаемой группы стал компактным. Прежде всего укажем, к какому виду можно привести добавляемый элемент $g \in \Gamma$. Используя утверждение 2, несложно доказать следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть у элемента $g \in \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$ все собственные значения равны 1. Тогда существует целочисленный аффинный базис, в котором g имеет один из следующих видов:*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b^* \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \quad \text{или} \quad \left(E, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right), \tag{3}$$

где $a, b, b^*, c \in \mathbb{Z}$ и $a, b, c \neq 0$.

Отметим, что замена целочисленного аффинного базиса соответствует сопряжению элементом из $\mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$.

Далее для удобства проверки укажем формулу для коммутаторов двух элементов

$$g_i = \left(\begin{pmatrix} 1 & a_i & b_i \\ 0 & 1 & c_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}\right), \quad i = 1, 2.$$

Имеем

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = \\ = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & y_1 \\ a_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & z_1 \\ b_2 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} (z_1 + z_2) \\ \begin{vmatrix} c_1 & z_1 \\ c_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad (4)$$

В частности, при сопряжении любого сдвига мы снова получаем сдвиг:

$$g = \left(A, \vec{b}\right),\ t = (E, \vec{v}) \implies gtg^{-1} = (E, A\vec{v}). \quad (5)$$

Из (5) немедленно следует, что группа сдвигов $T \subset \Gamma$ порождает двумерное подпространство, инвариантное относительно $L(\Gamma)$. Несложно доказать следующее утверждение.

Утверждение 5. *Рассмотрим группу* $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$, *порождённую тремя аффинными преобразованиями*

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right), \quad t_1 = \left(E, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \quad t_2 = \left(E, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right),$$

где g — *одно из преобразований из* (3), *и сдвиги* t_1 *и* t_2 *линейно независимы. Действие* Γ *на* $\mathbb{R}^3$ *свободно и разрывно тогда и только тогда, когда векторы*

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

порождают $L(g)$*-инвариантное подпространство и*

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Далее заметим, что мы можем заменить базис в T, чтобы были выполнены соотношения (1) для $h = t_1$, $t = t_2$ (при этом возможен коммутативный случай, когда $m = 0$). Действительно, согласно (5) подгруппа сдвигов T будет $L(g)$-инвариантна. Оператор $L(g)$ унипотентен, поэтому он действует на T тоже как унипотентный оператор. Остаётся воспользоваться следующим фактом, вытекающим из утверждения 1.

Утверждение 6. *Для любого унипотентного оператора* $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *существует такой целочисленный базис* $\mathbb{Z}^2$, *в котором матрица* A *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$. *Число* m *при этом определено однозначно и равно наибольшему общему делителю элементов* A.

Несложно проверить, что после подходящего выбора базиса в T для групп из утверждения 5 мы получаем серию 2 из таблицы 1 и серии 5 и 6 из таблицы 2. Отметим, что эти серии отличаются жордановыми нормальными формами $L(g)$ в $\mathbb{R}^3$ и при действии на T.

Утверждение 5 гарантирует, что все эти серии задают нильмногообразия. Остаётся показать, мы описали все серии с $\operatorname{rk} T = 2$.

Утверждение 7. *Пусть* $\operatorname{rk} T = 2$. *Тогда существует* $g \in \Gamma$, *такой что группа* Γ *порождается* g *и* T.

Доказательство. Достаточно взять такой элемент g, для которого числа b_1 в серии 2 и a_1 в сериях 5 и 6 будут минимально возможными натуральными числами. Действительно, если число a_1 (или b_1) минимально, то, умножая любой другой элемент $g' \in \Gamma$ на g^k, мы всегда можем сделать соответствующий коэффициент a_1' (или b_1') равным нулю. Но согласно утверждению 3 некоторая степень элемента $g'g^k \in \Gamma$ должна лежать в подгруппе, порождённой g, t_1 и t_2. Это возможно только если $g'g^k \in T$. Утверждение 7 доказано. $\square$

3. Пусть $\operatorname{rk} T = 1$. В данном случае из (5) следует, что вектор сдвига $\vec{v}$ является общим собственным вектором для всех операторов $L(g)$, где $g \in \Gamma$. Этот случай разбирается аналогично случаю $\operatorname{rk} T = 2$, но теперь к сдвигу $t \in T$ нужно будет добавить два элемента g и h. Рассмотрим несколько вариантов.

а) Пусть существует элемент $g \in \Gamma$, такой что

$$L(g) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a_1, c_1 \neq 0$. Делая замену координат, можно считать, что

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right).$$

Поскольку у $L(g)$ только один собственный вектор,

$$t = \left(E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Далее без ограничения общности можно считать, что a_1 положительный и минимально возможный и что второй элемент имеет вид

$$h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right).$$

Вначале рассмотрим случай $c_2 = 0$.

Утверждение 8. *Рассмотрим группу* $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$, *порождённую тремя аффинными преобразованиями*

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right),$$

$$h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \quad t = \left(E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $a_1, b_2, c_1, x_3 \neq 0$ *и* $\operatorname{rk} T = 1$. *Действие* Γ *на* $\mathbb{R}^3$ *свободно и разрывно тогда и только тогда, когда* $z_2 = 0$, $z_1 y_2 x_3 \neq 0$ *и* $(a_1 y_2 - b_2 z_1)/x_3 \in \mathbb{Q}$. *Фактор-пространство* $\mathbb{R}^3/\Gamma$ *при этом будет компактным нильмногообразием.*

Доказательство. Действительно, согласно формуле (4)

$$[g, h] = \left(E, \begin{pmatrix} a_1 y_2 + b_1 z_2 - b_2 z_1 \\ c_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \tag{6}$$

Поскольку $\operatorname{rk} T = 1$, векторы $[g, h]$ и t должны быть рационально соизмеримы, откуда следует, что $z_2 = 0$ и $(a_1 y_2 - b_2 z_1)/x_3 \in \mathbb{Q}$. Очевидно, что если $z_1 y_2 x_3 = 0$, то действие несвободно. То, что при указанных условиях действие свободно и разрывно, проверяется явно. Легко видеть, что одна из фундаментальных областей будет содержаться в прямоугольном параллелепипеде $0 \leqslant x \leqslant x_3$, $0 \leqslant y \leqslant y_2$, $0 \leqslant z \leqslant z_1$, и поэтому $\mathbb{R}^3/\Gamma$ будет компактом. Утверждение 8 доказано. □

Покажем теперь, что случай $c_2 \neq 0$ невозможен.

Утверждение 9. *Группа* $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$, *порождённая тремя аффинными преобразованиями*

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right),$$

$$h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \quad t = \left(E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $a_1, c_1, c_2, x_3 \neq 0$ *и* $\operatorname{rk} T = 1$, *не может действовать на* $\mathbb{R}^3$ *свободно и разрывно.*

Доказательство. Согласно формуле (4) линейная часть коммутатора имеет вид

$$L([g, h]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если группа Γ_1, порождённая g, $[g,h]$ и t, действует свободно и разрывно, то согласно утверждению 8 фактор $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ будет компактным. Но тогда по утверждению 3 некоторая степень h должна лежать в Γ_1, что невозможно. Утверждение 9 доказано. $\square$

Легко видеть, что если взять в утверждении 8 t порождающим подгруппы сдвигов T, то мы получаем серию 4 из таблицы 1 (если $[g,h]=e$) или серию 9 из таблицы 2.

б) Пусть линейные части всех элементов $g \in \Gamma$ имеют вид

$$L(g) = \begin{pmatrix} 1 & a_g & b_g \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего выясним, к какому виду можно привести матрицу

$$X = \begin{pmatrix} a_g & b_g \\ a_h & b_h \end{pmatrix}$$

для пары элементов $g,h \in \Gamma$. Поскольку мы можем менять элементы g, h и брать другие базисные элементы e_2, e_3, матрица X определена с точностью до лево-правого $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$-действия. Следующее утверждение описывает орбиты этого действия на $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

Утверждение 10. *Для любой целочисленной матрицы*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$$

существуют $C, D \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$, *такие что*

$$C \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & kn \end{pmatrix},$$

где $n = \text{НОД}(a,b,c,d)$ *и* $k = |ad-bc|/n^2$. *Здесь мы формально считаем* $k=n=0$ *при* $a=b=c=d=0$.

Доказательство. Среди точек

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

орбиты исходной матрицы выберем ту, для которой элемент a' — наименьшее возможное натуральное число. Покажем, что $a'=n$. Действительно, используя алгоритм Евклида, всегда можно найти матрицы C и D, такие что

$$C \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{НОД}(a',c') \\ 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} \text{НОД}(a',b') & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, так как a' наименьшее возможное, можно считать, что $b' = c' = 0$. Тогда по тем же соображениям $a' \mid d'$ в матрице

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Тогда a' является НОД элементов итоговой матрицы. Но при лево-правом действии НОД не меняется (поскольку он, очевидно, не уменьшается при умножении на матрицы C и D и эти матрицы обратимы). Поэтому в итоговой матрице $a' = n$. Остаётся заметить, что можно считать $d' = kn$, так как при левом-правом действии определитель сохраняется с точностью до знака. Утверждение 10 доказано. □

Таким образом, мы можем считать, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_g & b_g \\ a_h & b_h \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & na_1 \end{pmatrix}.$$

Меняя начало координат, мы всегда можем сделать соответствующие компоненты сдвига нулевыми: $x_1 = y_1 = 0$. Следующее утверждение доказывается аналогично утверждению 8.

Утверждение 11. *Рассмотрим группу* $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$, *порождённую тремя аффинными преобразованиями*

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right),$$

$$h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & na_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \quad t = \left(E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $a_1, x_3 \neq 0$ *и* $\operatorname{rk} T = 1$. *Действие* Γ *на* $\mathbb{R}^3$ *свободно и разрывно тогда и только тогда, когда векторные части элементов* $v(g)$, $v(h)$ *и* $v(t)$ *линейно независимы и* $(a_1 y_2 - na_1 z_1)/x_3 \in \mathbb{Q}$. *Фактор-пространство* $\mathbb{R}^3/\Gamma$ *при этом будет компактным нильмногообразием.*

Таким образом мы получаем серию 3 из таблицы 1 (если $[g, h] = e$) или серию 7 из таблицы 2.

в) Остаётся рассмотреть случай, когда линейные части всех элементов имеют вид

$$L(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_g \\ 0 & 1 & c_g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущим случаям мы можем привести матрицу

$$\begin{pmatrix} b_g & b_h \\ c_g & c_h \end{pmatrix}$$

к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & nc_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и после этого привести элементы к виду из серии 8 из таблицы 2. Остаётся показать, что действие будет свободным и вполне разрывным, а фактор будет компактным в точности при выполнении (2). Это удобно сделать, перейдя от $\mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$ к группе всех аффинных преобразований $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ и взяв вектор сдвига за первый базисный вектор.

Утверждение 12. *Рассмотрим группу* $\Gamma \subset \mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$, *порождённую тремя аффинными преобразованиями*

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right),$$

$$h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \quad t = \left(E, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, $(z_1, z_2) \neq (0,0)$, $x_3 \neq 0$ *и* $\operatorname{rk} T = 1$. *Действие* Γ *на* $\mathbb{R}^3$ *свободно и разрывно тогда и только тогда, когда* $c_2 z_1 = c_1 z_2$, $(b_1 z_2 - b_2 z_1)/x_3 \in \mathbb{Q}$ *и*

$$\begin{vmatrix} c_1 & y_1 - \frac{c_1 z_1}{2} \\ c_2 & y_2 - \frac{c_2 z_2}{2} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Фактор-пространство $\mathbb{R}^3/\Gamma$ *при этом будет компактным нильмногообразием.*

Доказательство. Действительно, согласно (4)

$$[g, h] = \left(E, \begin{pmatrix} b_1 z_2 - b_2 z_1 \\ c_1 z_2 - c_2 z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \tag{8}$$

Поскольку $\operatorname{rk} T = 1$, векторы $[g, h]$ и t должны быть рационально соизмеримы, откуда следует, что $c_2 z_1 = c_1 z_2$ и $(b_1 z_2 - b_2 z_1)/x_3 \in \mathbb{Q}$. Поскольку $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, существует $u \in \mathbb{R}$, такой что $z_1 = c_1 u$, $z_2 = c_2 u$. При этом $u \neq 0$, так как $(z_1, z_2) \neq (0,0)$. Оставшееся условие (7) эквивалентно тому, что матрицы

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ c_1 u \end{pmatrix} \right), \quad h = \left(\begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ c_2 u \end{pmatrix} \right)$$

порождают дискретную подгруппу ранга 2 в коммутативной двумерной группе

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{c^2 u}{2} + t \\ cu \end{pmatrix} \right), \quad c, t \in \mathbb{R},$$

которая свободно и транзитивно действует на плоскости. Именно в этом случае действие свободно и разрывно и фактор $\mathbb{R}^3/\Gamma$ компактен. Утверждение 12 доказано. □

Несложно проверить, что условие (7) для серии 8 из таблицы 2 переписывается в виде (2), что и требовалось показать.

4. Пусть $\operatorname{rk} T = 0$. Остаётся доказать следующее утверждение.

Утверждение 13. *Аффинная голономия компактного целочисленного трёхмерного аффинного нильмногообразия содержит хотя бы один нетривиальный сдвиг. Иными словами, у соответствующей подгруппы* $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$ *подгруппа сдвигов нетривиальна*: $\operatorname{rk} T \neq 0$.

Доказательство. От противного, пусть существует группа Γ, которая свободно и разрывно действует на $\mathbb{R}^3$, так что $\mathbb{R}^3/\Gamma$ компактно и $\operatorname{rk} T = 0$. Без ограничения общности можно считать, что порождающие Γ имеют вид

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right),$$

$$h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \quad t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right),$$

где $a_1, c_1, c_2, b_3, z_1 \neq 0$ и компоненты a_1, c_2, b_3 — минимально возможные натуральные числа. Легко проверить, что если выкинуть любой из элементов g, h, t, то фактор $\mathbb{R}^3/\Gamma$ не может быть компактным. Так как $\operatorname{rk} T = 0$, выполнено $[h, t] = e$. Поэтому по формуле (4) (или (8)) $-c_2 z_3 = 0$, $b_2 z_3 - b_3 z_2 = 0$, следовательно, $z_2 = z_3 = 0$. Аналогично $[g, t] = e$ и поэтому $a_1 y_3 = b_3 z_1$. Опять же по формуле (4)

$$[g, h] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 y_2 + b_1 z_2 - b_2 z_1 - a_1 c_2 (z_1 + z_2) \\ c_1 z_2 - c_2 z_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку b_3 минимально возможное, $[g, h] = t^m$. Но тогда

$$a_1 c_2 = m b_3, \quad -c_2 z_1 = m y_3 = m \frac{b_3 z_1}{a_1}.$$

Таким образом, $a_1 c_2 z_1 = -a_1 c_2 z_1$, но $a_1 c_2 z_1 \neq 0$, и мы приходим к противоречию. Утверждение 13 доказано. □

Теорема 2 доказана. □

3. Целочисленные аффинные 3-солвмногообразия

Опишем оставшиеся полные целочисленные аффинные трёхмерные многообразия, которые не накрываются нильмногообразиями. Все они будут содержать

гиперболические элементы в группе Γ и будут являться обобщениями следующего простого примера.

Пример 1. Для любой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

фактор $\mathbb{R}^3$ по группе Γ, порождённой элементами

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$t_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad t_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

является целочисленным аффинным трёхмерным многообразием M^3. При этом M^3 диффеоморфно расслоению над S^1 со слоем $\mathbb{T}^2$ и матрицей монодромии A.

Замечание 2. Отметим, что у аффинных многообразий с отображениями склеек из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$ (т. е. у которых все компоненты целые) есть естественные выделенные подмножества. Например, это точки, которые в любой карте имеют целые координаты (или рациональные координаты из $(1/k)\mathbb{Z}^n$).

Замечание 3. Легко видеть, что два многообразия из примера 1 аффинно диффеоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие матрицы A_1 и A_2 лежат в одном классе сопряжённости в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Описание этих классов сопряжённости — хорошо изученный вопрос (см., например, [7]).

Если матрица $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ не унипотентна, то в некотором базисе она имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}.$$

Группы из примера 1 с неунипотентными матрицами A соответствуют следующей серии аффинных кристаллографических группы из [5].

Пример 2. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ группа

$$I_\lambda = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda e^s u & \lambda e^{-s} t \\ 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \lambda u t \\ t \\ u \end{pmatrix} \right), \ s, t, u \in \mathbb{R} \right\} \tag{9}$$

свободно и транзитивно действует на $\mathbb{R}^3$. Как следствие, для любой дискретной подгруппы $\Gamma \subset I_\lambda$ фактор $\mathbb{R}^3/\Gamma$ является аффинным многообразием. Несложно проверить, что если фактор $\mathbb{R}^3/\Gamma$ компактен, то в группе Γ существуют порождающие элементы

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda e^s z_0 & \lambda e^{-s} y_0 \\ 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s + \lambda z_0 y_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right),$$

$$h_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda z_1 & \lambda y_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda y_1 z_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right), \quad h_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda z_2 & \lambda y_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda y_2 z_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \tag{10}$$

где

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

и

$$\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} A$$

для некоторой матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Если $\lambda = 0$, то группа Γ из примера 2 порождается тремя элементами, два из которых — сдвиги. Используя утверждение 1, легко проверить, что любая такая подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$ сопряжена в $\mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$ одной из следующих подгрупп.

Утверждение 14. *Рассмотрим группу $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$, порождённую тремя аффинными преобразованиями*

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad t_1 = \left(E, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \quad t_2 = \left(E, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right),$$

где $a + d > 2$, векторные части $v(g)$, $v(t_1)$ и $v(t_2)$ линейно независимы и

$$\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} A$$

для некоторой матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Тогда фактор $\mathbb{R}^3/\Gamma$ является целочисленным аффинным трёхмерным многообразием M^3, диффеоморфным расслоению над S^1 со слоем $\mathbb{T}^2$ и матрицей монодромии A.

Остаётся разобрать случай, когда $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$ сопряжена в $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ дискретной подгруппе в I_λ и $\lambda \neq 0$. Используя утверждения 1 и 10, мы можем упростить линейные части порождающих в Γ. Кроме того, от сопряжения элементом из $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ мы можем перейти к сопряжению элементом из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, выбирая подходящее начало координат. Тем самым мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 15. *Пусть подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$ сопряжена в $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ некоторой дискретной подгруппе в группе I_λ (заданной (9)), где $\lambda \neq 0$. Тогда существуют целочисленный аффинный базис, в котором Γ порождается элементами вида*

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right),$$

$$h_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right), \quad h_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & na_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right),$$

где $a_1, n \in \mathbb{N}$ *и*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & na_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & na_1 \end{pmatrix}$$

для некоторой матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. *При этом порождающие* g, h_1, h_2 *должны иметь вид* (10) *при сопряжении некоторой матрицей*

$$\begin{pmatrix} \alpha & u \\ 0 & P \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $u \in \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$ *и* $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Замечание 4. Условие

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$$

определяет матрицу P с точностью до умножения строк на константы. Если зафиксировать матрицу P, то для любых $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $u \in \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$ условие сопряжённости элементов g, h_1, h_2 элементам (10) даст ограничения на коэффициенты векторных частей x_i, y_i, z_i.

Сформулируем теперь основной результат этой работы. Целочисленные аффинные трёхмерные многообразия удобно разбить на три класса в соответствии с их типом геометрий (подробнее о геометриях на трёхмерных многообразиях см. [3] или [2]).

Теорема 4. *Любое компактное целочисленное аффинное трёхмерное многообразие* M^3 *обладает геометрической структурой по образцу* E^3, Nil *или* Sol. *Геометрическая структура на* M *полностью определяется* $\pi_1(M)$.

1. *Если* $\pi_1(M)$ *виртуально абелева, то* M^3 — *евклидово многообразие. При этом* M^3 *конечнолистно накрывается одним из многообразий из теоремы* 2, *описанных в таблице* 1.
2. *Если* $\pi_1(M)$ *виртуально нильпотентна, не виртуально абелева, то* M^3 — Nil-*многообразие. При этом* M^3 *конечнолистно накрывается одним из многообразий из теоремы* 2, *описанных в таблице* 2.
3. *Если* $\pi_1(M)$ *разрешима, но не виртуально нильпотентна, то* M^3 — Sol-*многообразие. При этом* M^3 *конечнолистно накрывается целочисленным аффинным многообразием* $\mathbb{R}^3/\Gamma$ *для одной из групп* Γ, *описанных в утверждениях* 14 *и* 15.

Доказательство. Согласно [5] любое компактное трёхмерное аффинное многообразие конечнолистно накрывается некоторым солвмногообразием. Переходя к конечнолистным накрытиям, можно считать, что алгебраическое замыкание $\bar{\Gamma}$ связно, и следовательно, по теореме Ли—Колчина существует базис (над $\mathbb{C}$), в котором все матрицы из $L(\Gamma)$ имеют верхнетреугольный вид. Более того, с точностью до конечнолистного накрытия можно считать, что все собственные значения вещественны и положительны.

Таким образом, можно считать, что $M^3 \approx \mathbb{R}^3/\Gamma$ — солвмногообразия и что линейные части всех элементов $L(g)$ либо унипотенты, либо имеют жорданову нормальную форму

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix}.$$

Если все $L(g)$ унипотентны, то M^3 — нильмногообразие, и этот случай разобран в теореме 2. В противном случае согласно [5] группа Γ сопряжена (в $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$) дискретной подгруппе в группе I_λ (см. пример 2). Значит, Γ сопряжена в $\mathrm{AGL}_3(\mathbb{Z})$ одной из групп из утверждений 14 и 15. Теорема 4 доказана. □

Литература

[1] Козлов И. К. Классификация лагранжевых расслоений // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 11. — С. 89—136.

[2] Скотт П. Геометрии на трёхмерных многообразиях. — М.: Мир, 1986. — (Матем. НЗН; Т. 39).

[3] Тёрстон У. Трёхмерная геометрия и топология. — М.: МЦНМО, 2001.

[4] Duistermaat J. J. On global action-angle coordinates // Comm. Pure Appl. Math. — 1980. — Vol. 33, no. 6. — P. 687—706.

[5] Fried D., Goldman W. Three-dimensional affine crystallographic groups // Adv. Math. — 1983. — Vol. 47, no. 1. — P. 1—49.

[6] Freid D., Goldman W., Hirsh M. W. Affine manifolds with nilpotent holonomy // Comment. Math. Helv. — 1981. — Vol. 56, no. 4. — P. 487—523.

[7] Karpenkov O. Continued fractions and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ conjugacy classes. Elements of Gauss's reduction theory. Markov spectrum // Geometry of Continued Fractions. — Berlin: Springer, 2013. — (Algorithms Comput. Math.; Vol. 26).

[8] Mishachev K. N. The classification of Lagrangian bundles over surfaces // Different. Geom. Appl. — 1996. — Vol. 6, no. 4. — P. 301—320.

[9] Sepe D. Classification of Lagrangian fibrations over a Klein bottle // Geom. Dedicata. — 2010. — Vol. 149, no. 1. — P. 347—362.