Суперинтегрируемые бертрановы магнитные геодезические потоки

Е. А. КУДРЯВЦЕВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: eakudr@mech.math.msu.su

С. А. ПОДЛИПАЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: podlipaev.sergey@gmail.com

УДК 514.853+517.938.5

Ключевые слова: суперинтегрируемая система, поверхность вращения, магнитные геодезические, магнитная система Бертрана.

Аннотация

Задача поиска суперинтегрируемых систем (т. е. систем с замкнутыми траекториями в некоторой области) в классе натуральных механических систем, инвариантных относительно вращений, восходит к работам Ж. Л. Ф. Бертрана и Ж. Г. Дарбу. Мы описываем все суперинтегрируемые (в области медленных движений) системы в классе магнитных геодезических потоков, инвариантных относительно вращений. Мы показываем, что все достаточно медленные движения в центральном магнитном поле по двумерному многообразию вращения периодичны тогда и только тогда, когда метрика имеет постоянную скалярную кривизну и магнитное поле однородно, т. е. пропорционально форме площади.

Abstract

E. A. Kudryavtseva, S. A. Podlipaev, Superintegrable Bertrand magnetic geodesic flows, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 169—182.

The problem of description of superintegrable systems (i.e., systems with closed trajectories in a certain domain) in the class of rotationally symmetric natural mechanical systems goes back to Bertrand and Darboux. We describe all superintegrable (in a domain of slow motions) systems in the class of rotationally symmetric magnetic geodesic flows. We show that all sufficiently slow motions in a central magnetic field on a two-dimensional manifold of revolution are periodic if and only if the metric has a constant scalar curvature and the magnetic field is homogeneous, i.e., proportional to the area form.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 6, с. 169—182.

1. Введение

В работе изучаются магнитные геодезические потоки, инвариантные относительно вращений. Такая динамическая система описывает движение заряженной частицы в центральном *магнитном поле* по двумерному риманову многообразию вращения. Предполагается, что магнитное поле отлично от тождественного нуля. Мы изучаем *медленные движения*, т. е. движения с достаточно малым положительным уровнем энергии (или с достаточно малой скоростью). С геометрической точки зрения изучаются *магнитные геодезические* достаточно малых радиусов кривизны, где радиус кривизны зависит от точки на поверхности и пропорционален отношению магнитного поля к форме площади с достаточно малым положительным коэффициентом пропорциональности.

Нас интересуют системы, удовлетворяющие следующему *условию Бертрана для медленных движений*: любое достаточно медленное движение заряженной частицы является периодическим. На геометрическом языке условие Бертрана формулируется так: все магнитные геодезические достаточно малых радиусов кривизны являются замкнутыми кривыми. Мы покажем (теорема 2.1), что условие Бертрана равносильно тому, что метрика имеет постоянную скалярную кривизну и магнитное поле однородно, т. е. пропорционально форме площади.

Дадим краткий исторический обзор. Задача поиска суперинтегрируемых систем (т. е. систем с замкнутыми траекториями в некоторой области) в классе натуральных механических систем, инвариантных относительно вращений, восходит к работам Ж. Бертрана и Ж. Г. Дарбу. Натуральные механические системы типа Бертрана при разных ограничениях были описаны Ж. Бертраном [8], Ж. Г. Дарбу [9], А. Бессе [1], В. Перликом [11], О. А. Загрядским, Е. А. Кудрявцевой и Д. А. Федосеевым [2], Е. А. Кудрявцевой и Д. А. Федосеевым [3—5] и др. (см. обзор в [2]).

В данной статье получено описание (т. е. строгая классификация) всех *магнитных систем Бертрана* — суперинтегрируемых магнитных геодезических потоков на двумерных конфигурационных многообразиях вращения, удовлетворяющих условию периодичности медленных движений. Остаётся открытым вопрос описания всех *электромагнитных систем Бертрана* — суперинтегрируемых систем, описывающих движение заряженной частицы под действием и потенциального, и магнитного силовых полей на двумерном конфигурационном многообразии вращения, и мы планируем решить его в будущем.

Укажем отличие нашего метода от классического подхода Ж. Бертрана [8] и многих его последователей (см. [2]). Классический подход основан на изучении семейства приведённых систем, полученных из исходной системы заменой времени вдоль фазовых траекторий на угловую координату $\varphi = \varphi(t)$ (долготу) на конфигурационном многообразии вращения. Такая замена времени $t \to \varphi(t)$ имеет смысл (т. е. является регулярной и монотонной) в случае *неособых* траекторий: когда долгота монотонно зависит от времени ($\dot{\varphi}(t) \neq 0$) вдоль всей траектории. Приведённая система зависит от одного параметра (постоянной кинетического момента), имеет одну степень свободы, и при каждом значении параметра имеет невырожденное положение равновесия типа «центр» (отвечающее круговому решению). Ясно, что суперинтегрируемость будет иметь место в случае *совместной изохронности* семейства приведённых систем, т. е. при совпадении периодов их решений, близких к указанным положениям равновесия, и соизмеримости их общего периода с π. Так как в классическом случае (без магнитного поля) почти все решения являются неособыми, суперинтегрируемость равносильна условию совместной изохронности. Но в «магнитном» случае особых решений «много» (например, все достаточно медленные движения), а для них указанная замена времени (вместе с красивым условием совместной изохронности) не имеет смысла. Для таких решений мы записываем приведённую систему без замены времени, в отличие от классического подхода. В остальном мы следуем классическому подходу [8].

Перейдём к точным формулировкам.

2. Формулировка основного результата

Пусть (Q, g) — гладкое двумерное риманово многообразие вращения, B — дифференциальная 2-форма на Q, инвариантная относительно вращений. Форма B, очевидно, является замкнутой ($\mathrm{d}\, B = 0$), а потому задаёт *магнитное поле* на Q. Её инвариантность относительно вращений означает, что магнитное поле является *центральным*.

Многообразие вращения Q диффеоморфно либо сфере, либо кругу, либо тору, либо открытому цилиндру: $Q \setminus \mathrm{Fix}(S^1) \approx I \times S^1$ с координатами (r, φ), где $r \in I$ — *широта*, т. е. натуральный параметр на меридианах $I \times \{\varphi_0\}$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1$ — *долгота*, т. е. угловая координата на параллелях $\{r_0\} \times S^1$. Здесь $I = (r_1, r_2) \subseteq \mathbb{R}$ (в случаях сферы, круга и цилиндра) или $I = S^1 = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, $L > 0$ (в случае тора). Без ограничения общности будем считать, что Q диффеоморфно цилиндру:

$$Q \approx (r_1, r_2) \times S^1$$

(случаи сферы и круга сводятся к этому случаю рассмотрением Q с проколами в неподвижных точках вращения, а случай тора $Q \approx S^1 \times S^1$ сводится к этому случаю рассмотрением накрывающего цилиндра $\tilde{Q} = \mathbb{R} \times S^1$). Риманова метрика вращения на Q имеет вид

$$g = \mathrm{d}\, r^2 + f^2(r)\, \mathrm{d}\, \varphi^2, \quad (r, \varphi) \in Q,$$

где $f(r) > 0$ — гладкая функция (радиус параллели $\{r\} \times S^1$). Дифференциальная 2-форма B на Q, инвариантная относительно вращений, имеет вид

$$B = b(r)\, \mathrm{d}\, r \wedge \mathrm{d}\, \varphi = a'(r)\, \mathrm{d}\, r \wedge \mathrm{d}\, \varphi, \quad (r, \varphi) \in Q,$$

где функция $a(r)$ на (r_1, r_2) задана (с точностью до аддитивной константы) условием $a'(r) = b(r)$.

Движение заряженной частицы в магнитном поле B по поверхности (Q, g) описывается гамильтоновой системой на T^*Q с гамильтонианом и симплектической структурой

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)}, \quad \omega = \mathrm{d}\,p_r \wedge \mathrm{d}\,r + \mathrm{d}\,p_\varphi \wedge \mathrm{d}\,\varphi + B = \mathrm{d}\,p_r \wedge \mathrm{d}\,r + \mathrm{d}\big(p_\varphi + a(r)\big) \wedge \mathrm{d}\,\varphi.$$

Так как гамильтониан H не зависит от угловой переменной φ, система интегрируема с дополнительным первым интегралом

$$K = \tilde{p}_\varphi := p_\varphi + a(r)$$

(кинетический момент). Интеграл K является 2π-периодическим, т. е. задаёт свободное гамильтоново действие окружности.

Если магнитное поле $B = a'(r)\,\mathrm{d}\,r \wedge \mathrm{d}\,\varphi$ не имеет нулей, то замена $r \to a = a(r)$ широты $r \in (r_1, r_2)$ монотонна и регулярна. Ей соответствует замена импульса $p_r = a'(r)p_a$. Получаем многообразие вращения $Q \simeq (a_1, a_2) \times S^1$ с римановой метрикой

$$g = \frac{\mathrm{d}\,a^2}{R(a)} + \frac{\mathrm{d}\,\varphi^2}{F(a)},$$

где $R\big(a(r)\big) = a'(r)^2 > 0$, $F\big(a(r)\big) = 1/f^2(r) > 0$. Гамильтониан и симплектическая структура суть

$$H = R(a)\frac{p_a^2}{2} + F(a)\frac{p_\varphi^2}{2}, \quad \omega = \mathrm{d}\,p_a \wedge \mathrm{d}\,a + \mathrm{d}(p_\varphi + a) \wedge \mathrm{d}\,\varphi. \tag{1}$$

В канонических переменных $(a, \varphi, p_a, \tilde{p}_\varphi = K)$ они принимают вид

$$H = R(a)\frac{p_a^2}{2} + F(a)\frac{(\tilde{p}_\varphi - a)^2}{2}, \quad \omega = \mathrm{d}\,p_a \wedge \mathrm{d}\,a + \mathrm{d}\,\tilde{p}_\varphi \wedge \mathrm{d}\,\varphi, \tag{2}$$

и уравнения движения заряженной частицы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{a} = \dfrac{\partial H}{\partial p_a} = R(a)p_a, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial \tilde{p}_\varphi} = F(a)(\tilde{p}_\varphi - a), \\ \dot{p}_a = -\dfrac{\partial H}{\partial a} = -R'(a)\dfrac{p_a^2}{2} - F'(a)\dfrac{(\tilde{p}_\varphi - a)^2}{2} + F(a)(\tilde{p}_\varphi - a), \\ \dot{\tilde{p}}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Изучим аналог *задачи Бертрана* (см., например, [2]) для *медленных* (т. е. с малой скоростью) движений заряженной частицы в рассматриваемом магнитном поле.

Теорема 2.1 [7, теорема 7.1]. *Предположим, что центральное магнитное поле B на двумерном римановом многообразии вращения (Q, g) отлично от* *тождественного нуля. Предположим, что выполнено «условие Бертрана для медленных движений»: любое движение с достаточно малой ненулевой скоростью периодично (более подробно: существует непрерывная функция* $f > 0$ *на многообразии* Q*, такая что любое движение с начальными условиями* $(q,p) \in T^*Q$*,* $0 < |p| < f(q)$*, периодично). Тогда*

а) *магнитное поле* B *однородно, т. е. пропорционально форме площади* $\mathrm{d}\sigma = f(r)\,\mathrm{d}\,r \wedge \mathrm{d}\,\varphi$ *(а значит,* B *не имеет нулей, движение задаётся гамильтоновой системой* (1) *и* (3)*, 2-формы* $B = \mathrm{d}\,a \wedge \mathrm{d}\,\varphi$ *и* $\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}\,a \wedge \mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{RF}}$ *пропорциональны и* $RF \equiv \lambda^2 = \mathrm{const}$);

б) *минимальный положительный период решения с начальным условием* $(q,p) \in T^*Q$*,* $0 < |p| < f(q)$*, непрерывно зависит от начального условия* (q,p) *и стремится к минимальному положительному периоду решений линеаризованной системы в положении равновесия* $(q,0)$ *при* $|p| \to 0$;

в) *скалярная кривизна* Scal *многообразии* (Q,g) *постоянна и имеет вид*

$$\mathrm{Scal} = \frac{\lambda^2}{F^3}(F''F - 2(F')^2) = -\left(\frac{\lambda^2}{F}\right)'' = -R''.$$

В частности,

$$R(a) = \frac{\lambda^2}{F(a)} = \lambda_1 + \lambda_2 a - \mathrm{Scal}\,\frac{a^2}{2}$$

для некоторых констант $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Верно и обратное: если скалярная кривизна Scal *многообразия* (Q,g) *постоянна и магнитное поле* B *однородно и отлично от тождественного нуля, то выполнено условие Бертрана для медленных движений.*

3. Вывод однородности магнитного поля из условия Бертрана для медленных движений

В этом разделе мы докажем пункты а) и б) теоремы 2.1.

Предположим, что магнитное поле B не имеет нулей (общий случай изучим на шаге 6 ниже). Значит, движение задаётся гамильтоновой системой (1) и (3). Нам будут удобнее канонические переменные, получаемые из исходных *преобразованием ведущего центра* [6, § 3],

$$h\colon (a,\varphi,p_a,p_\varphi) \mapsto (\hat a,\hat\varphi,p_a,p_\varphi), \quad \hat a = a + p_\varphi = K, \quad \hat\varphi = \varphi - p_a. \tag{4}$$

В новых переменных симплектическая структура принимает канонический вид:

$$\omega = \mathrm{d}\,p_a \wedge \mathrm{d}(\hat a - p_\varphi) + \mathrm{d}\,\hat a \wedge \mathrm{d}(\hat\varphi + p_a) = -\,\mathrm{d}\,p_a \wedge \mathrm{d}\,p_\varphi + \mathrm{d}\,\hat a \wedge \mathrm{d}\,\hat\varphi.$$

Сделаем *масштабную замену* импульсов $h_\varepsilon\colon (\hat a,\hat\varphi,\hat p_a,\hat p_\varphi) \mapsto (\hat a,\hat\varphi,p_a,p_\varphi)$ по формуле

$$p_a = \varepsilon \hat p_a, \quad p_\varphi = \varepsilon \hat p_\varphi,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр (например, длина вектора скорости). Тогда

$$H = \varepsilon^2 \left(R(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi) \frac{\hat p_a^2}{2} + F(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi) \frac{\hat p_\varphi^2}{2} \right), \quad \omega = \mathrm{d}\,\hat a \wedge \mathrm{d}\,\hat\varphi - \varepsilon^2\,\mathrm{d}\,\hat p_a \wedge \mathrm{d}\,\hat p_\varphi.$$

Уравнения движения в новых переменных $(\hat a, \hat\varphi, \hat p_a, \hat p_\varphi)$ (иногда называемых «медленно-быстрыми» [10] для данной системы) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\hat a} = -\dfrac{\partial H}{\partial \hat\varphi} = 0, \\ \dot{\hat\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial \hat a} = \varepsilon^2 \left(R'(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi) \dfrac{\hat p_a^2}{2} + F'(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi) \dfrac{\hat p_\varphi^2}{2} \right), \\ \dot{\hat p}_a = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \dfrac{H}{\partial \hat p_\varphi} = -\varepsilon R'(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi) \dfrac{\hat p_a^2}{2} - \varepsilon F'(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi) \dfrac{\hat p_\varphi^2}{2} + F(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi) \hat p_\varphi, \\ \dot{\hat p}_\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial H}{\partial \hat p_a} = -R(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi) \hat p_a. \end{cases} \tag{5}$$

Замечание 3.1. Найдём все *относительные положения равновесия*, т. е. фазовые точки, в которых $\mathrm{d}\,H$ и $\mathrm{d}\,K$ пропорциональны (отвечающие им интегральные кривые $\gamma \subset T^*Q$ являются круговыми орбитами и положениями равновесия, так как на них $a \equiv \mathrm{const}$). Ввиду уравнений (3) имеем $p_a \equiv 0$,

$$F'(a) \frac{(\tilde p_\varphi - a)^2}{2} + F(a)(a - \tilde p_\varphi) = 0.$$

Из последнего равенства получаем

$$\tilde p_\varphi \equiv a$$

(случай положения равновесия) или

$$\frac{F'(a)}{F(a)} (\tilde p_\varphi - a) \equiv 2$$

(случай круговой орбиты). В новых переменных при $\varepsilon > 0$ получаем $\hat p_a \equiv 0$ и либо

$$\hat p_\varphi = 0$$

(случай положения равновесия), либо

$$\frac{F'(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi)}{F(\hat a - \varepsilon \hat p_\varphi)} \hat p_\varphi \equiv 2$$

(в случае круговой орбиты).

При $\varepsilon \to 0$ система (5) стремится к корректно определённой *предельной системе* — семейству гармонических осцилляторов в каждом слое, т. е. семейству гамильтоновых систем

$$\left(T_q^* Q,\ \omega_q = -\,\mathrm{d}\,\hat p_a \wedge \mathrm{d}\,\hat p_\varphi,\ H_q = R(\hat a) \frac{\hat p_a^2}{2} + F(\hat a) \frac{\hat p_\varphi^2}{2} \right) \tag{6}$$

с параметрами $q = (\hat{a}, \hat{\varphi}) \in (a_1, a_2) \times S^1 = Q$, где $\dot{\hat{a}} = \dot{\hat{\varphi}} = 0$. При обратной замене $h^{-1} \circ h_0$ любое решение предельной системы переходит в соответствующее положение равновесия $h^{-1}(\hat{a}, \hat{\varphi}, 0, 0) = (\hat{a}, \hat{\varphi}, 0, 0)$ исходной системы (3), указанное в замечании 3.1.

Таким образом, решениям системы (5) отвечают *медленные* (т. е. имеющие малую скорость) движения, задаваемые системой (3) с (1). Заметим, что предельная система имеет вид

$$\dot{\hat{a}} = \dot{\hat{\varphi}} = 0, \quad \dot{\hat{p}}_a = F(\hat{a})\hat{p}_\varphi, \quad \dot{\hat{p}}_\varphi = -R(\hat{a})\hat{p}_a.$$

Поэтому все её решения, за исключением положения равновесия $\hat{p}_a = \hat{p}_\varphi = 0$, удовлетворяют уравнению

$$\ddot{\hat{p}}_a = -R(\hat{a})F(\hat{a})\hat{p}_a,$$

а значит, задают гармонические колебания с угловой частотой $\sqrt{R(\varkappa)F(\varkappa)}$ и минимальным положительным периодом

$$T(\varkappa) = \frac{2\pi}{\sqrt{R(\varkappa)F(\varkappa)}}, \tag{7}$$

где $\varkappa \in (a_1, a_2)$ — значение первого интеграла $K = \hat{a} = \tilde{p}_\varphi$ на данном решении.

Доказательство пунктов а) и б) теоремы 2.1. Шаг 1. Предположим вначале, что магнитное поле B не имеет нулей.

Фиксируем число $\varkappa \in (a_1, a_2)$ и рассмотрим *эффективный потенциал*

$$U_\varkappa = U_\varkappa(a) := F(a)\frac{(\varkappa - a)^2}{2}, \quad a \in (a_1, a_2),$$

системы (1). Тогда гамильтониан имеет вид

$$H = R(a)\frac{p_a^2}{2} + U_K(a).$$

В новых координатах имеем эффективный потенциал

$$\frac{1}{\varepsilon^2}U_\varkappa(a) = F(\varkappa - \varepsilon\hat{p}_\varphi)\frac{\hat{p}_\varphi^2}{2} =: \hat{U}_{\varepsilon,\varkappa}(\hat{p}_\varphi), \quad \hat{p}_\varphi \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

и гамильтониан

$$\frac{1}{\varepsilon^2}H = R(K - \varepsilon\hat{p}_\varphi)\frac{\hat{p}_a^2}{2} + \hat{U}_{\varepsilon,K}(\hat{p}_\varphi).$$

Изучим *приведённую* систему, отвечающую 2π-периодическому первому интегралу K, с гамильтонианом и симплектической структурой

$$H_{\varepsilon,\varkappa} := \frac{1}{\varepsilon^2}H|_{\{K=\varkappa\}} = R(\varkappa - \varepsilon\hat{p}_\varphi)\frac{\hat{p}_a^2}{2} + \hat{U}_{\varepsilon,\varkappa}(\hat{p}_\varphi), \quad -\mathrm{d}\,\hat{p}_a \wedge \mathrm{d}\,\hat{p}_\varphi, \tag{9}$$

где $\varkappa \in (a_1, a_2)$ — параметр приведённой системы, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый («масштабный») параметр. Приведённая система задана на »приведённой фазовой плоскости» $\{K = \varkappa\}/S^1 \subset (T^*Q)/S^1$ с фазовыми переменными $(\hat{p}_a, \hat{p}_\varphi)$ и индуцированной симплектической структурой, где рассматривается гамильтоново действие окружности S^1 на T^*Q, отвечающее 2π-периодическому первому интегралу K.

Гамильтониан $H_{\varepsilon,\varkappa}$ приведённой системы (9) равен сумме «приведённой кинетической энергии» $R(\varkappa-\varepsilon\hat{p}_\varphi)(\hat{p}_a^2/2)$ (квадратичной по «приведённому импульсу» $\hat{p}_a$) и эффективного потенциала $\hat{U}_{\varepsilon,\varkappa}(\hat{p}_\varphi)$ (зависящего только от «приведённой координаты» $\hat{p}_\varphi$). Таким образом, приведённая система является натуральной механической системой с одной степенью свободы, поэтому мы можем решить её явно стандартным методом. Сделаем это.

Для значения $\hat{E}$ приведённого гамильтониана $H_{\varepsilon,\varkappa}$ имеем

$$R(\varkappa-\varepsilon\hat{p}_\varphi)\hat{p}_a^2 = 2\hat{E} - 2\hat{U}_{\varepsilon,\varkappa}(\hat{p}_\varphi) \geqslant 0.$$

Поэтому значение $\hat{p}_a$ выражается через ε, $\hat{E}$, $\varkappa$ и $\hat{p}_\varphi$ формулой

$$\hat{p}_a = \pm\sqrt{\frac{2\hat{E}-2\hat{U}_{\varepsilon,\varkappa}(\hat{p}_\varphi)}{R(\varkappa-\varepsilon\hat{p}_\varphi)}} \overset{(8)}{=} \pm\sqrt{\frac{2\hat{E}-F(\varkappa-\varepsilon\hat{p}_\varphi)\hat{p}_\varphi^2}{R(\varkappa-\varepsilon\hat{p}_\varphi)}}. \tag{10}$$

Фиксируем любые вещественные числа $\varkappa \in (a_1, a_2)$, $\hat{E} \in (0,1)$ и $\hat{p}_\varphi \in \mathbb{R}$, такие что

$$|\hat{p}_\varphi|^2 < \frac{2\hat{E}}{F(\varkappa)}.$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\hat{U}_{0,\varkappa}(\hat{p}_\varphi) = F(\varkappa)\frac{\hat{p}_\varphi^2}{2}, \quad \hat{p}_a = \pm\sqrt{\frac{2\hat{E}-F(\varkappa)\hat{p}_\varphi^2}{R(\varkappa)}}. \tag{11}$$

Заметим, что числитель подкоренного выражения в (11) имеет два простых корня

$$\hat{p}_\varphi = A_\pm(0,\hat{E},\varkappa) := \pm\sqrt{\frac{2\hat{E}}{F(\varkappa)}},$$

а знаменатель всюду положителен. Из теоремы о неявной функции получаем, что при любом достаточно малом «возмущении» $0 < \varepsilon \ll 1$ числитель подкоренного выражения в (10) тоже имеет два простых корня, $O(\varepsilon)$-близких к указанным корням и обозначаемых через $A_\pm(\varepsilon,\hat{E},\varkappa)$.

Отсюда получаем (см., например, [2, § 4, предложение 2]), что при любом $0<\varepsilon\ll 1$ существует (единственное с точностью до сдвигов времени $t \mapsto t+t_0$) решение

$$\bar{\gamma}_{\varepsilon;\hat{E},\varkappa}(t) = \bigl((\hat{p}_\varphi)_{\varepsilon;\hat{E},\varkappa}(t), (\hat{p}_a)_{\varepsilon;\hat{E},\varkappa}(t)\bigr), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{12}$$

приведённой системы (9) на рассматриваемом уровне $\hat{E}$ гамильтониана, на котором переменная $\hat{p}_\varphi = (\hat{p}_\varphi)_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(t)$ принимает хотя бы одно значение из отрезка $[A_-(\varepsilon,\hat{E},\varkappa), A_+(\varepsilon,\hat{E},\varkappa)]$. На самом деле у решения (12) переменная $\hat{p}_\varphi$ принимает все значения из указанного отрезка, т. е. $(\hat{p}_\varphi)_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(\mathbb{R}^1)$ совпадает с этим отрезком.

Отсюда следует (см., например, [2, § 4, предложение 3]), что зависимость от времени t переменной $\hat p_\varphi = (\hat p_\varphi)_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}(t)$, а потому и *широты* $a = \varkappa - \varepsilon(\hat p_\varphi)_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}(t)$, является периодической функцией, причём её полупериод равен времени $T(\varepsilon,\hat E,\varkappa)/2 = t_+ - t_-$ движения между её соседними минимумом и максимумом, где $(\hat p_\varphi)_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}(t_-) = A_-(\varepsilon,\hat E,\varkappa)$, $(\hat p_\varphi)_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}(t_+) = A_+(\varepsilon,\hat E,\varkappa)$.

Шаг 2. Теперь «поднимем» решение (12) приведённой системы в фазовое пространство T^*Q, т. е. рассмотрим соответствующее решение

$$\gamma_{\varepsilon;\hat E,\varkappa}(t) = \big(\varkappa,\, \hat\varphi_{\varepsilon;\hat E,\varkappa}(t),\, (\hat p_a)_{\varepsilon;\hat E,\varkappa}(t),\, (\hat p_\varphi)_{\varepsilon;\hat E,\varkappa}(t)\big), \quad t\in\mathbb{R},$$

исходной системы (5) (такое решение единственно с точностью до сдвигов угловой переменной $\varphi\mapsto\varphi+\varphi_0$).

Спроектируем соответствующую фазовую кривую $\{\gamma_{\varepsilon;\hat E,\varkappa}(t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ на конфигурационный цилиндр Q с координатами $(a,\hat\varphi)\in(a_1,a_2)\times S^1$, получим соответствующую «орбиту» заряженной частицы[1]:

$$\big\{(a,\hat\varphi) = \big(\varkappa-\varepsilon(\hat p_\varphi)_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}(t),\, \hat\varphi_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}(t)\big)\ \big|\ t\in\mathbb{R}\big\}\subset Q.$$

На этой «орбите» рассмотрим точки (называемые *перицентрами* и *апоцентрами* орбиты), *широты* которых $a = \varkappa - \varepsilon(\hat p_\varphi)_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}(t)$ являются (левым и правым соответственно) концами соответствующего отрезка $[\varkappa-\varepsilon A_+(\varepsilon,\hat E,\varkappa),\ \varkappa-\varepsilon A_-(\varepsilon,\hat E,\varkappa)]$.

Шаг 3. Как выше, фиксируем числа $\varkappa\in(a_1,a_2)$, $\hat E\in(0,1)$ и $\hat p_\varphi\in\mathbb{R}$, такие что

$$|\hat p_\varphi|^2 < \frac{2\hat E}{F(\varkappa)}.$$

Следуя [2], найдём минимальный положительный период $T(\varepsilon,\hat E,\varkappa) = 2(t_+-t_-)$ функции широты $a = \varkappa-\varepsilon(\hat p_\varphi)_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}(t)$ при $0<\varepsilon\ll 1$:

$$T(\varepsilon,\hat E,\varkappa) = 2\int\limits_{A_-(\varepsilon,\hat E,\varkappa)}^{A_+(\varepsilon,\hat E,\varkappa)} \frac{\mathrm{d}\,\hat p_\varphi}{(\dot{\hat p}_\varphi)_{\varepsilon,\hat E,\varkappa}} \overset{(5),\,(10)}{=}$$

$$= 2\int\limits_{A_-(\varepsilon,\hat E,\varkappa)}^{A_+(\varepsilon,\hat E,\varkappa)} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{R(\varkappa-\varepsilon u)}\sqrt{2\hat E - F(\varkappa-\varepsilon u)u^2}}.$$

[1]Используя здесь термин «орбита», мы допускаем некоторую вольность. Строго говоря, на конфигурационном цилиндре Q введены координаты (a,φ), а не $(a,\hat\varphi) = (a,\varphi-p_a) = (a,\varphi-\varepsilon\hat p_a)$, т. е. настоящая орбита заряженной частицы получается проектированием на конфигурационный цилиндр Q с координатами (a,φ), а потому она лишь $O(\varepsilon)$-близка к рассматриваемой нами «орбите» (но не совпадает с ней, вообще говоря). Отметим, что у настоящей орбиты перицентры, апоцентры и время движения между соседними перицентром и апоцентром в точности те же, что и у рассматриваемой нами «орбиты». Этого сходства рассматриваемой «орбиты» и настоящей орбиты нам хватит для доказательства теоремы 2.1.

В частности,

$$T(0, \hat{E}, \varkappa) = \frac{2\pi}{\sqrt{R(\varkappa)F(\varkappa)}} = T(\varkappa)$$

(см. (7)).

Шаг 4. Рассмотрим вещественное число

$$\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) := \varphi_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(t_+) - \varphi_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(t_-) \overset{(4),\,(10)}{=} \hat{\varphi}_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(t_+) - \hat{\varphi}_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(t_-),$$

т. е. разность долгот между соседними перицентром и апоцентром «орбиты» (см. шаг 2). Следуя [2], для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < |\varepsilon| \ll 1$, имеем

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) = 2 \int\limits_{A_-(\varepsilon,\hat{E},\varkappa)}^{A_+(\varepsilon,\hat{E},\varkappa)} \frac{\dot{\hat{\varphi}}_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}\, \mathrm{d}\,\hat{p}_\varphi}{(\dot{\hat{p}}_\varphi)_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}} \overset{(5),\,(10)}{=}$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{A_-(\varepsilon,\hat{E},\varkappa)}^{A_+(\varepsilon,\hat{E},\varkappa)} \left(\frac{R'(\varkappa - \varepsilon u)\sqrt{\hat{E} - F(\varkappa - \varepsilon u)\frac{u^2}{2}}}{R(\varkappa - \varepsilon u)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{F'(\varkappa - \varepsilon u)\frac{u^2}{2}}{\sqrt{R(\varkappa - \varepsilon u)}\sqrt{\hat{E} - F(\varkappa - \varepsilon u)\frac{u^2}{2}}} \right) \mathrm{d}\,u = O(1).$$

Предположим теперь, что выполнено условие Бертрана для медленных движений, т. е. решение $\gamma_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(t)$ из шага 2 периодично при $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда его минимальный положительный период кратен минимальному положительному периоду $T(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa)$ функции широты $a = \varkappa - \varepsilon(\hat{p}_\varphi)_{\varepsilon,\hat{E},K}(t)$, т. е. имеет вид $kT(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Значит, приращение $k\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa)$ «долготы» $\hat{\varphi}_{\varepsilon,\hat{E},K}(t)$ за время $kT(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa)$ кратно 2π, т. е. имеет вид $k\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) = 2\pi\ell$ для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$. Здесь числа k, ℓ зависят, вообще говоря, от ε, $\hat{E}$, $\varkappa$.

Итак, число

$$\frac{1}{2\pi}\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) = \frac{\ell}{k}$$

рационально при любых ε, $\hat{E}$, $\varkappa$, таких что $\hat{E} \in (0, 1)$ фиксировано и $|\varepsilon| > 0$ достаточно мало. Так как функция $\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa)$ непрерывна (ввиду того что $A_\pm(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa)$ — простые корни уравнения $\hat{U}_{\varepsilon,\varkappa}(\hat{p}_\varphi) = \hat{E}$ согласно шагу 1) и принимает значения в дискретном множестве $\pi\mathbb{Q}$, она постоянна. Так как она имеет порядок $O(\varepsilon^2)$, её предел при $\varepsilon \to 0$ равен 0, поэтому она тождественно равна 0.

Так как $\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) \equiv 0$, сама функция «долготы» $\hat{\varphi}_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(t)$ (а не только её производная по времени) является $T(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa)$-периодичной, как и функция широты $a = \varkappa - \varepsilon(\hat{p}_\varphi)_{\varepsilon,\hat{E},K}(t)$. Поэтому решение $\gamma_{\varepsilon,\hat{E},\varkappa}(t)$ тоже $T(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa)$-периодично.

По шагу 3 получаем, что при любом фиксированном $\hat{E} \in (0,1)$ и $0 < \varepsilon \ll 1$

$$T(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) - T(\varkappa) = T(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) - T(0, \hat{E}, \varkappa) = O(\varepsilon),$$

поэтому пункт б) доказан.

Шаг 5. Докажем пункт а). По шагу 4 имеем $\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) = 0$ при любом $0 < |\varepsilon| \ll 1$, откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) = 0.$$

С другой стороны, с учётом формул из шага 4 нетрудно вычислить

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) = 2 \int\limits_{A_-(0,\hat{E},\varkappa)}^{A_+(0,\hat{E},\varkappa)} \frac{\dot{\hat{\varphi}}_{0,\hat{E},\varkappa} \, \mathrm{d}\, \hat{p}_\varphi}{(\dot{\hat{p}}_\varphi)_{0,\hat{E},\varkappa}} =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{A_-(0,\hat{E},\varkappa)}^{A_+(0,\hat{E},\varkappa)} \left(\frac{R'(\varkappa)}{R(\varkappa)^{3/2}} \sqrt{\hat{E} - F(\varkappa) \frac{u^2}{2}} + \frac{F'(\varkappa) \frac{u^2}{2}}{\sqrt{R(\varkappa)} \sqrt{\hat{E} - F(\varkappa) \frac{u^2}{2}}} \right) \mathrm{d}\, u =$$

$$= \pi \hat{E} \frac{R'(\varkappa) F(\varkappa) + R(\varkappa) F'(\varkappa)}{\big(R(\varkappa) F(\varkappa)\big)^{3/2}} = -2\pi \hat{E} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, \varkappa} \left(\frac{1}{\sqrt{R(\varkappa) F(\varkappa)}} \right).$$

Ввиду последней формулы и доказанного тождества $\Phi(\varepsilon, \hat{E}, \varkappa) \equiv 0$ для любых $\hat{E} \in (0,1)$, $\varkappa \in (a_1, a_2)$ и $0 < \varepsilon \ll 1$ получаем, что функция $1/\sqrt{R(\varkappa)F(\varkappa)}$ постоянна, откуда следует, что $RF = \mathrm{const}$ (т. е. магнитное поле B однородно).

Шаг 6. Проведём доказательство пункта а) в общем случае, т. е. без предположения о том, что магнитное поле B не имеет нулей. Пусть Z — множество нулей поля B. По условию $Q \setminus Z \neq \varnothing$. На шагах 1—5 мы показали, что магнитное поле B однородно на каждой связной компоненте Q_i открытого множества $Q \setminus Z$. Отсюда следует, что B не имеет нулей на $\overline{Q_i}$ (так как форма площади $\mathrm{d}\,\sigma$ не имеет нулей). С другой стороны, $B = 0$ на Z. Поэтому $\overline{Q_i} \cap Z = \varnothing$, откуда следует, что $Q_i = \overline{Q_i}$, а потому $Q_i = Q$. Итак, B однородно на всём конфигурационном многообразии $Q = Q_i$, что и требовалось. □

4. Вывод постоянства скалярной кривизны из условия Бертрана для медленных движений

Здесь мы завершим доказательство теоремы 2.1, а именно докажем пункт в).

Сначала приведём схему доказательства пункта в) теоремы 2.1.

Следуя [2, § 4, доказательство предложения 4], разложим величину $\Phi(E, K) := \Phi(1, E, K)$, т. е. разность долгот соседних перицентров орбиты, в степенной ряд по малому параметру $h > 0$ и приравняем коэффициенты при младших степенях h^0, h^2, h^4 к нулю. Здесь функции $E = E(c, h)$ и $K = K(c, h)$

определяются условиями $a_-(E,K) = c - h$, $a_+(E,K) = c + h$, где $c \in (a_1, a_2)$, $a_\pm(E,K) := K - A_\mp(1,E,K)$. В действительности коэффициенты при h^0 и h^2 равны 0 согласно шагам 4 и 5 (соответственно) из предыдущего раздела.

Более подробно: с учётом (3) и $RF \equiv \lambda^2 = \mathrm{const}$ (по пункту а) теоремы 2.1) имеем

$$\Phi(E,K) = 2\int\limits_{a_-(E,K)}^{a_+(E,K)} \frac{\dot\varphi}{\dot a}\,\mathrm{d}\,a = 2\int\limits_{a_-(E,K)}^{a_+(E,K)} \frac{F(a)(K-a)}{\sqrt{R(a)}\sqrt{2E - F(a)(K-a)^2}}\,\mathrm{d}\,a =$$
$$= 2\int\limits_{a_-(E,K)}^{a_+(E,K)} \frac{F^{\frac{3}{2}}(a)(K-a)}{|\lambda|\sqrt{2E - F(a)(K-a)^2}}\,\mathrm{d}\,a.$$

Поэтому при замене

$$a = c + ht, \quad a_- = c - h, \quad a_+ = c + h, \quad \mathrm{d}\,a = h\,\mathrm{d}\,t$$

получим

$$-\frac{|\lambda|}{2F(c)}\,\Phi\bigl(E(c,h), K(c,h)\bigr) =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1}\biggl(\frac{th}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{(1-2t^2)(\hat F_1 + \hat F_2 th)}{2\sqrt{1-t^2}}h^2 +$$
$$+ \frac{3\hat F_1^3 - 6\hat F_1\hat F_2 + 4\hat F_3(1+t^2-2t^4)}{8\sqrt{1-t^2}}h^4\biggr)\,\mathrm{d}\,t + \bar{\bar o}(h^4) =$$
$$= \frac{\pi}{8}\Bigl(3\hat F_1^3 - 6\hat F_1\hat F_2 + 4\hat F_3(1 + 1/2 - 3/4)\Bigr)h^4 + \bar{\bar o}(h^4) =$$
$$= \frac{\pi}{8}(3\hat F_1^3 - 6\hat F_1\hat F_2 + 3\hat F_3)h^4 + \bar{\bar o}(h^4),$$

где

$$\hat F_i := \frac{F_i(c)}{F(c)},$$

а $F_i(c)$ — коэффициент при $(a-c)^i$ в разложении функции $F = F(a)$ в ряд Тейлора в точке c. Так как по шагу 4 доказательства пунктов а), б) теоремы 2.1 имеем, что $\Phi(E,K) \equiv 0$, то коэффициент при h^4 должен равняться 0, т. е.

$$6F'^3 - 6FF'F'' + F^2F''' \equiv 0. \tag{13}$$

Покажем, что условие (13) равносильно постоянству скалярной кривизны. Скалярная кривизна многообразия вращения с римановой метрикой $g = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ равна

$$\mathrm{Scal} = -2\frac{f''(r)}{f(r)}$$

(см. [2, § 1.2, замечание 4]). С учётом замены

$$a = a(r), \quad \frac{da}{dr} = \lambda f(r) = \frac{\lambda}{\sqrt{F(a)}}$$

получаем

$$\mathrm{Scal} = \frac{\lambda^2}{F^3(a)}(F''(a)F(a) - 2F'(a)^2) = -\left(\frac{\lambda^2}{F(a)}\right)''.$$

Легко проверяется, что условие $\mathrm{Scal}' \equiv 0$ равносильно условию (13).

Таким образом, скалярная кривизна $\mathrm{Scal} \equiv \mathrm{const}$, что и доказывает пункт в).

Осталось показать, что условия а), в) из теоремы 2.1 не только необходимы, но и достаточны для выполнения условия Бертрана для медленных движений. Пусть $B = \lambda\,\mathrm{d}\sigma$, где $\mathrm{d}\sigma$ — форма площади, $\lambda = \lambda(a, \varphi)$ — гладкая функция (не обязательно постоянная). Тогда решения $\gamma(t) = \big(a(t), \varphi(t)\big)$ соответствующей системы уравнений Лагранжа с уровнем энергии $\varepsilon^2/2 > 0$ — это в точности гладкие параметризованные кривые $\gamma = \gamma(t)$ со скоростью $|\dot\gamma(t)| = \varepsilon$ и ковариантным ускорением $\lambda\big(\gamma(t)\big)\varepsilon$. Поэтому $\gamma(s/\varepsilon)$ — это натурально параметризованная кривая (с натуральным параметром s) с геодезической кривизной $\lambda\big(\gamma(s/\varepsilon)\big)/\varepsilon$. Поэтому при выполнении условий а), в) теоремы 2.1 орбиты всех достаточно медленных движений заряженной частицы будут являться окружностями и, в частности, будут замкнуты. Значит, будет выполнено условие Бертрана для медленных движений.

Теорема 2.1 полностью доказана. □

Авторы благодарны А. И. Нейштадту за указание построения медленно-быстрых переменных в задаче о движении заряженной частицы в медленном магнитном поле с помощью преобразования ведущего центра [6], А. А. Ошемкову за идею о возможной связи условия (13) с постоянством скалярной кривизны, А. Албуи за обсуждение метода совместной изохронности семейства систем для решения проблемы Бертрана.

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00775-а).

Литература

[1] Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.

[2] Загрядский О. А., Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 8. — С. 39—78. — `https://arxiv.org/abs/1109.0745`.

[3] Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. Механические системы с замкнутыми орбитами на многообразиях вращения // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 5. — С. 107—126.

[4] Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. О многообразиях Бертрана с экваторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2016. — Т. 71, № 1. — С. 40—44.

[5] Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. Суперинтегрируемые бертрановы натуральные механические системы // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2018. — Т. 148. — С. 37—57.

[6] Нейштадт А. И. Усреднение, адиабатические инварианты и периодические траектории движения в многомерном магнитном поле: Рукопись. — 1998.

[7] Подлипаев М. А. Геометрические свойства натуральных механических систем на поверхностях вращения: Курсовая работа 3-го курса. Механико-математический факультет МГУ. — 2015. — http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2015-kr3-Podlipaev.pdf.

[8] Bertrand J. Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1873. — Vol. 77. — P. 849—853.

[9] Darboux G. Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution // Bull. Soc. Math. Fr. — 1877. — Vol. 5. — P. 100—113.

[10] Kudryavtseva E. A. Periodic solutions of planetary systems with satellites and the averaging method in systems with slow and fast variables. — 2012. — https://arxiv.org/abs/1201.6356.

[11] Perlick V. Bertrand spacetimes // Class. Quantum Grav. — 1992. — Vol. 9. — P. 1009—1021.