

# Топологический анализ бильярда в эллиптическом кольце в потенциальном поле

**С. Е. ПУСТОВОЙТОВ**

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: pustovoi@yandex.ru

УДК 517.938.5

**Ключевые слова:** потенциал Гука, интегрируемая система, инвариант Фоменко—Цишанга, лиувиллева эквивалентность.

## Аннотация

В работе изучается бильярд в области, ограниченной двумя софокусными эллипсами. В центр координат помещён гуковский потенциал. Оказывается, эта динамическая система вполне интегрируема по Лиувиллю. Следовательно, можно провести топологический анализ этой задачи, изучив слоение фазового многообразия уровнями интегралов. В работе построены инварианты Фоменко—Цишанга (меченые молекулы) для изоэнергетических многообразий всевозможных уровней гамильтониана, а также приведены примеры других систем, лиувиллево эквивалентных данной.

## Abstract

*S. E. Pustovoytov, Topological analysis of a billiard in elliptic ring in a potential field, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 201–225.*

We study a billiard in a domain bounded by two confocal ellipses. The Hooke potential is placed at the center of the ellipses. This dynamic system turns out to be Liouville integrable. Therefore, we can make a topological analysis studying the foliation of the phase manifold by integrals. We calculate Fomenko–Zieschang invariants (marked molecules) for isoenergy manifolds of every level of the Hamiltonian, and also give examples of other integrable systems that are Liouville equivalent to our billiard system.

## 1. Введение

Бильярдная задача и родственная ей задача о геодезическом потоке на многообразиях рассматривались многими математиками. К. Якоби [11] рассматривал задачу движения точки по поверхности эллипсоида. Дж. Биркгоф [1] устремлением одной из полуосей к нулю свёл задачу Якоби к бильярдной задаче в эллипсе. В. В. Козлов [6] обобщил задачу Якоби, добавив гуковский потенциал в центр координат. Лиувиллев анализ бильярдной задачи в эллипсе с центральным гуковским потенциалом был проведён И. Ф. Кобцевым. В работах А. Т. Фоменко и его учеников [3, 4, 7, 9, 12–14] развита классификационная теория интегрируемых систем и бильярдов.

В данной работе полностью описано слоение Лиувилля бильярда в эллиптическом кольце с потенциалом. Это первый шаг обобщения этой задачи до случая произвольной локально плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик.

## 2. Постановка задачи и необходимые сведения

*Симплектическим многообразием*  $(M^{2n}, \omega)$  называется чётномерное многообразие  $M^{2n}$  с введённой на нём 2-формой  $\omega$ , удовлетворяющей следующим свойствам:

- 1) косая симметрия;
- 2) невырожденность;
- 3) замкнутость.

Такая форма естественным образом порождает косой градиент функции  $f$  — векторное поле  $\text{sgrad}(f)$ , обладающее свойством

$$\omega(v, \text{sgrad}(f)) = v(f), \quad (1)$$

где  $v$  — произвольное векторное поле на  $M^{2n}$ .

Теперь можно ввести оператор: *скобку Пуассона*

$$\{ \cdot, \cdot \}: C^\infty(M^{2n}) \times C^\infty(M^{2n}) \rightarrow C^\infty(M^{2n}), \quad \{f, g\} = \omega(\text{sgrad}(f), \text{sgrad}(g)). \quad (2)$$

Скобка кососимметрична и удовлетворяет тождествам Якоби и Лагранжа.

*Гамильтоновым векторным полем (динамической системой)* называется поле  $v = \text{sgrad}(H)$  для некоторой функции  $H$ , называемой *гамильтонианом*.

**Определение 1.** Если у гамильтоновой системы  $v$  на  $M^{2n}$  есть  $n$  функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , которые являются первыми интегралами, и верно, что

- 1)  $\{f_i, f_j\} = 0$ ,
- 2)  $f_i$  и  $f_j$  функционально независимы,
- 3) векторные поля  $\text{sgrad}(f_i)$  полны,

то такая система называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*.

**Определение 2.** *Отображением* момента называется отображение

$$F: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

где

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

Бифуркационной диаграммой называется образ критических точек отображения момента на  $\mathbb{R}^n$ . Дуги бифуркационной диаграммы разбивают образ отображения момента на области, называемые камерами. Все точки камеры регулярны.

Многообразие  $M^{2n}$  расслоено на прообразы  $\{F^{-1}(x)\}$ , где  $x \in F(M) \subset \mathbb{R}^n$ . Такое слоение называется слоением Лиувилля.

**Теорема 1** (Лиувилль). Пусть на  $M^{2n}$  задана вполне интегрируемая гамильтонова система с гамильтонианом  $H$  и  $T_\xi$ -регулярная, компактная, связная компонента поверхности уровня интегралов  $f_1, f_2, \dots, f_n$  (прообраз регулярного значения  $F$ ). Можно считать, что  $f_1 = H$ . Тогда

- 1)  $T_\xi$  диффеоморфно тору  $T^n$  (этот тор называется тором Лиувилля);
- 2) слоение Лиувилля в некоторой окрестности тора Лиувилля диффеоморфно прямому произведению тора на диск  $D^n$ .

**Определение 3.** Системы  $v_1$  и  $v_2$  на  $Q_1^3$  и  $Q_2^3$  соответственно называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм из  $Q_1^3$  на  $Q_2^3$ , сохраняющий слоение.

Критические (нерегулярные) совместные поверхности уровня интегралов в общем случае представляют собой сложные  $k$ -мерные комплексы ( $k \leq n$ ) и описывают перестройки торов Лиувилля при переходе из камеры в другую в образе  $F(M)$  отображения момента. Критический слой с окрестностью называют *атомом*. Все трёхмерные атомы (для случая  $M^4$ ) были классифицированы А. Т. Фоменко, А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым [2]. В дальнейшем будем говорить только о случае  $M^4$ , так как рассматриваемый нами бильярд порождает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

У гамильтоновой системы на  $M^4$  два первых интеграла  $f$  и  $g$ . Зафиксируем значение интеграла  $f = h$ . Полученное естественным образом многообразие  $Q^3 = \{x \in M^4: f(x) = h\}$  называется *изоэнергетическим многообразием* интеграла  $f$ . Два интегрируемые системы называются *лиувиллево-эквивалентными*, если существует послыйный диффеоморфизм (для топологического слоения интегралами), сохраняющий ориентацию изоэнергетических многообразий. А. Т. Фоменко были предложены инварианты, полностью описывающие топологию слоения Лиувилля.

**Определение 4.** *Грубой молекулой* называется граф, точки рёбер которого представляют собой регулярные слои многообразия  $Q^3$  (т. е. торы), а вершинам ставятся в соответствие атомы, через которые происходят перестройки торов.

**Определение 5.** *Меченой молекулой* называется грубая молекула, рёбрам и вершинам которой ставятся в соответствие числа, описывающие, как именно переходит тор из окрестности одного атома в тор окрестности другого атома по соединяющему их ребру (подробности см. в [2]).

Напомним, что согласно теореме Фоменко—Цишанга [2] меченая молекула полностью определяет топологию строения на  $Q^3$ .

Перейдём теперь к нашей задаче. На рис. 1 изображён плоский бильярд, ограниченный двумя софокусными эллипсами. Материальная точка (бильярдный шар) движется в этой области, ударяясь о границу по стандартному закону отражения (угол падения равен углу отражения). В центр координат поместим заряд, создающий поле гуковской потенциальной силы (отталкивающей или притягивающей). Будет показано, что такая система является интегрируемой по Лиувиллю. Следовательно, её топологию и динамику можно изучить, используя меченые молекулы.

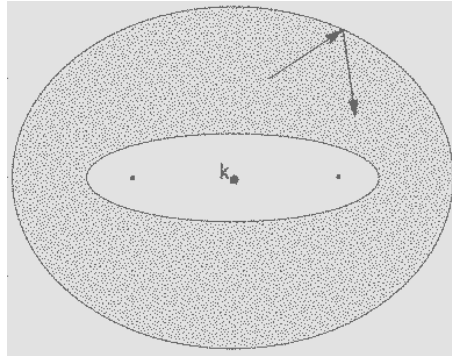


Рис. 1. Биллиардный стол

### 3. Интегрируемость. Разделение переменных

Рассмотрим введённый выше биллиард. Уравнения граничных эллипсов таковы:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \\ \frac{x^2}{a + \lambda_0} + \frac{y^2}{b + \lambda_0} = 1, \end{cases} \quad (*)$$

где  $a > b > -\lambda_0 > 0$ . Эти эллипсы принадлежат общему семейству софокусных квадрик (эллипсов и гипербол), заданных уравнением

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — параметр квадрики. Рассмотрим гуковский потенциал в начале координат с коэффициентом  $k$ . Тогда уравнения движения материальной точки имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -kx, \\ \ddot{y} = -ky. \end{cases} \quad (**)$$

Отметим, что знак коэффициента  $k$  определяет, отталкивающая сила или притягивающая. Отметим, что можно рассмотреть более общую задачу. А именно, в качестве биллиарда возьмём область, ограниченную дугами софокусных квадрик из указанного выше семейства (см., например, рис. 2). Для всех таких биллиардов можно сразу указать первый интеграл: это полная механическая энергия

$$H = \frac{k(x^2 + y^2)}{2} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2}. \quad (4)$$

Кроме него, эти системы обладают ещё одним независимым интегралом. В. В. Козловым [6] был указан дополнительный интеграл для биллиарда в эл-

липсе

$$G = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{ab} - k \left( 1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} \right). \quad (5)$$

Докажем более строгое утверждение.

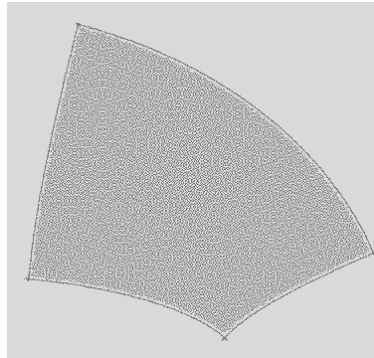


Рис. 2. Пример бильярда, ограниченного квадриками данного семейства

**Теорема 2.** Для любого бильярда, ограниченного дугами квадрик указанного софокусного семейства, имеет место интеграл  $G$ . Этот интеграл функционально независим с полной энергией.

**Доказательство.** Сначала разберём свободное движение точки между отражениями от стенок. Дифференцируя  $G$  по времени  $t$ , получим

$$\dot{G} = \frac{2\dot{x}\ddot{x}}{a} + \frac{2\dot{y}\ddot{y}}{b} - \frac{2(x\dot{y} - \dot{x}y)(x\ddot{y} - \ddot{x}y)}{ab} - k \left( 1 - \frac{2x\dot{x}}{a} - \frac{2y\dot{y}}{b} \right). \quad (6)$$

Подставляя значения  $\ddot{x}$  и  $\ddot{y}$  из системы (\*\*), получаем ноль. Следовательно, функция  $G$  постоянна вдоль траекторий бильярда.

Теперь докажем, что  $G$  сохраняется при отражении от *любой* стенки бильярда, являющейся частью квадрики указанного семейства. Из формулы (5) видно, что последнее слагаемое  $G$  не меняется при отражении. Перепишем эту формулу в следующем виде:

$$G + k \left( 1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} \right) = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{ab}. \quad (7)$$

В правой части раскроем скобки и выразим  $x^2$  через  $y^2$  из уравнения соответствующей стенки

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1.$$

Получим

$$G + k \left( 1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} \right) = \frac{1}{ab} \left( 2xy\dot{x}\dot{y} + x^2\dot{x}^2 \frac{b + \lambda}{a + \lambda} + y^2\dot{y}^2 \frac{a + \lambda}{b + \lambda} \right) - \frac{\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{ab}. \quad (8)$$

В первой скобке после равенства стоит полный квадрат. Следовательно, получаем

$$G + k \left( 1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} \right) = \frac{(a + \lambda)(b + \lambda)}{ab} \left( \dot{x} \frac{x}{a + \lambda} + \dot{y} \frac{y}{b + \lambda} \right)^2 - \frac{\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{ab}. \quad (9)$$

Первое слагаемое после знака равенства является квадратом скалярного произведения вектора скорости на нормаль к квадрату. Следовательно, после отражения значение  $G$  не меняется.

Докажем теперь независимость интегралов. Вычислим их градиенты:

$$\text{grad}(H) = (kx, ky, \dot{x}, \dot{y}); \quad (10)$$

$$\text{grad}(G) = \left( \frac{kx}{a}, \frac{ky}{b}, \frac{\dot{x}}{a}, \frac{\dot{y}}{b} \right) - \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)}{ab} (\dot{y}, -\dot{x}, -y, x). \quad (11)$$

Функциональная зависимость интегралов равносильна линейной зависимости их градиентов во всех точках. Данные градиенты при  $(x\dot{y} - \dot{x}y) = 0$  и ненулевых начальных условиях, очевидно, являются линейно независимыми. Следовательно, и функции  $H$  и  $G$  тоже независимы.

Теорема доказана.  $\square$

Повторим, что приведённое доказательство справедливо для произвольных плоских бильярдов, ограниченных дугами квадратов данного софокусного семейства. Оказывается, метод, рассматриваемый в настоящей работе, переносится на все такие бильярды. Этому будет посвящена следующая публикация.

Вернёмся теперь к кольцевому бильярду, ограниченному двумя софокусными эллипсами. Рассмотрим соответствующее фазовое пространство  $M^4 = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$ , где  $(x, y)$  — декартовы координаты точки на бильярде,  $(\dot{x}, \dot{y})$  — вектор скорости материальной точки. При этом если материальная точка отражается от границы бильярда, векторы скорости до и после отражения отождествляются по правилу: если вектор до отражения имел вид  $v = (v_1, v_2)$ , то после отражения он примет вид

$$v' = 2n_1n_2(v_2, v_1) + (n_1^2 - n_2^2)(v_1, -v_2), \quad (12)$$

где  $n = (n_1, n_2)$  — вектор нормали к границе бильярда.

На многообразии  $M^4$  зададим стандартную симплектическую структуру

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По отношению к такой структуре интегралы  $H$  и  $G$  находятся в инволюции, т. е.  $\{H, G\} = 0$ . Кроме того,  $H$  и  $G$  функционально независимы (см. выше). Следовательно, выбрав  $H$  в качестве гамильтониана, получаем систему, интегрируемую по Лиувиллю. Для анализа этой системы нужно построить отображение момента

$$A: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (F(x, y, \dot{x}, \dot{y}), G(x, y, \dot{x}, \dot{y}))$$

и найти его критические значения, т. е. бифуркационную диаграмму. Поскольку вид интеграла  $G$  достаточно сложный, перейдём к другим координатам, в которых наша задача примет более простой вид. Для этого рассмотрим эллиптические координаты  $\lambda_1, \lambda_2$ . Их связь с декартовыми координатами выражают формулы

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a + \lambda_1)(a + \lambda_2)}{a - b}, \\ y^2 = \frac{(b + \lambda_1)(b + \lambda_2)}{b - a}, \end{cases} \quad (***)$$

где  $-a \leq \lambda_1 \leq -b, \lambda_0 \leq \lambda_2 \leq 0$  и  $\lambda_0$  — фиксированный параметр внутреннего эллипса. Координатными линиями этой системы являются гиперболы (задаваемые параметром  $\lambda_1$ ) и эллипсы (задаваемые параметром  $\lambda_2$ ). Эти кривые принадлежат тому же семейству софокусных квадрик, что и эллипсы нашего «кольцевого» бильярда. Пользуясь известными формулами (см. [6]), потенциальную энергию  $U$  и кинетическую энергию  $K$  можно переписать в следующем виде:

$$U = \frac{k}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + a + b), \quad (13)$$

$$K = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_1^2 + \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2, \quad (14)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — сопряжённые импульсы,  $a$  и  $b$  — полуоси наружного эллипса бильярда. Следовательно, гамильтониан  $H$  с точностью до константы переписывается в виде

$$H = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_1^2 + \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2 + \frac{k}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (15)$$

где  $k$  — коэффициент гуковского потенциала. Оказывается, у данной системы вместо интеграла  $G$  можно использовать интеграл  $F$ , функционально зависимый с исходными интегралами  $G$  и  $H$ :

$$F = 2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + \frac{k}{2}\lambda_1^2 - H\lambda_1. \quad (16)$$

Этот интеграл мы нашли при помощи алгоритма, приведённого В. В. Козловым [6], при анализе интегрируемого геодезического потока на всех двумерных квадриках данного софокусного семейства под действием гуковского потенциала. Оказывается, этот метод поиска интеграла применим для любого плоского бильярда, ограниченного квадриками указанного выше софокусного семейства.

**Лемма 3.1.** *Интеграл  $F$  можно переписать в виде*

$$F = 2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 + \frac{k}{2}\lambda_2^2 - H\lambda_2. \quad (17)$$

**Доказательство.** Вычтем из правой части выражения (16) правую часть выражения (17). Получим

$$2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 - 2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 + \frac{k}{2}\lambda_1^2 - \frac{k}{2}\lambda_2^2 - H(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (18)$$

Вынесем  $(\lambda_2 - \lambda_1)$  за скобки:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \left( \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_1^2 + \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2 + \frac{k}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) - H \right) = 0. \quad (19)$$

Лемма доказана.  $\square$

Воспользуемся формулой

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i},$$

известной из механики (см. [15]):

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{\partial H}{\partial \mu_1} = \frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_1, \quad (20)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{\partial H}{\partial \mu_2} = \frac{4(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2. \quad (21)$$

Зафиксируем уровни интегралов  $H = h$ ,  $F = f$ . Выразим импульсы  $\mu_1$  и  $\mu_2$  из формул (16) и (17) для интеграла  $F$  и подставим в формулы (20) и (21) соответственно. Получим уравнения

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad (22)$$

где

$$V(z) = \left( \frac{k}{2} z^2 + hz + f \right) (a + z)(b + z).$$

**Лемма 3.2.** *Многочлен  $V$  имеет два вещественных корня (возможен кратный).*

**Доказательство.** Заметим, что  $(a + \lambda_2)(b + \lambda_2) > 0$ . Значит, при  $k < 0$  многочлен  $(k/2)z^2 + hz + f$  обязан иметь два корня. Аналогично  $(a + \lambda_1)(b + \lambda_1) < 0$ . Значит, при  $k > 0$  многочлен  $(k/2)z^2 + hz + f$  также обязан иметь два корня.  $\square$

Следовательно, многочлен  $V$  имеет вид

$$V(z) = \frac{k}{2}(z - \xi)(z - \eta)(a + z)(b + z), \quad (23)$$

где

$$\xi = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 2kf}}{k}, \quad \eta = \frac{-h - \sqrt{h^2 - 2kf}}{k}.$$

Теперь введём на многообразии  $M^4$  новые координаты, а именно  $(\lambda_1, \lambda_2, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)$ . Отметим, что векторы скорости  $(\dot{x}, \dot{y})$  и  $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)$  связаны формулой

$$(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) = (\dot{x}, \dot{y})J^T, \quad (24)$$

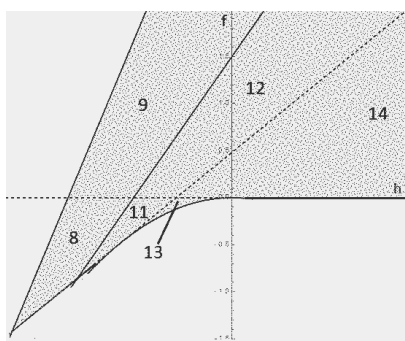
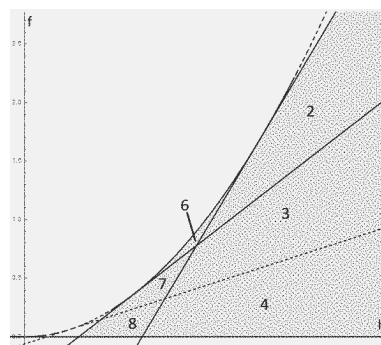
где  $J$  — якобиан перехода от декартовых координат к эллиптическим.



## 4. Основная теорема

В этом разделе мы сформулируем основные результаты работы. Их доказательства приведены в следующем разделе.

**Теорема 3.** Для обоих случаев  $k > 0$  и  $k < 0$  образ отображения момента рассматриваемого «кольцевого» бильярда является некомпактным односвязным подмножеством плоскости, ограниченным лучами прямых и дугой параболы. Бифуркационные диаграммы состоят из отрезков прямых (лучей) и дуги параболы (рис. 3 и 4). Номера камер соответствуют неравенствам, указанным в таблицах 4 и 5.

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма при  $k > 0$ Рис. 4. Бифуркационная диаграмма при  $k < 0$ 

**Теорема 4.** В таблицах 1—3 перечислены все меченые молекулы (инварианты Фоменко—Цишанга), описывающие слоение Лиувилля «кольцевого» бильярда и задающие изоэнергетические 3-многообразия для всех регулярных значений гамильтониана  $H$ .

**Комментарий.** Из таблицы видно, что случаи притяжения и отталкивания существенно отличаются, а именно для случая отталкивания возникает качественное различие в поведении системы на «кольцевых» бильярдах при  $a > 2b$  и  $a < 2b$ . Соответствующие меченые молекулы различны. Такого эффекта в случае притяжения нет. Такое отличие между отталкивающим и притягивающим потенциалом объясняется разным поведением критических траекторий материальной частицы на бильярде. Для притягивающего потенциала критические траектории лежат только на фокальной прямой бильярдной области. Для отталкивающего картина другая: здесь критические траектории могут лежать также на прямой, перпендикулярной к фокальной.

Таблица 1. Инварианты Фоменко–Цишанга для разных уровней гамильтониана  $H$  при  $k > 0$

	Значение $h$	Инвариант Фоменко–Цишанга
$k > 0$	$h \in \left(\frac{-k(a+b)}{2}; \frac{-k(b-\lambda_0)}{2}\right)$	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
	$h \in \left(\frac{-k(b-\lambda_0)}{2}; +\infty\right)$	$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$

Таблица 2. Инварианты Фоменко–Цишанга для разных уровней гамильтониана  $H$  при  $k < 0$ ,  $a < 2b$

	Значение $h$	Инвариант Фоменко–Цишанга
$k < 0, a < 2b$	$h \in \left(\frac{-kb}{2}; \frac{-ka}{2}\right)$	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
	$h \in \left(\frac{-ka}{2}; -kb\right)$	$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
	$h \in (-kb; -ka), h \neq \frac{-k(a+b)}{2}$	$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
	$h \in (-ka; +\infty)$	$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$

Таблица 3. Инварианты Фоменко—Цишанга для разных уровней гамильтониана  $H$  при  $k < 0$ ,  $a \leq 2b$

	Значение $h$	Инвариант Фоменко—Цишанга
$k < 0, a \geq 2b$	$h \in \left(\frac{-kb}{2}; -kb\right)$	$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$ $A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$
	$h \in \left(-kb; \frac{-ka}{2}\right)$	
	$h \in \left(\frac{-ka}{2}; -ka\right), h \neq \frac{-k(a+b)}{2}$	
	$h \in (-ka; +\infty)$	

## 5. Бифуркационные диаграммы.

### Алгебраический подход

Перейдём к доказательству теорем 3 и 4. В частности, мы будем пользоваться важной работой М. П. Харламова [10]. Рассмотрим уравнения (22). Они задают дополнительные условия на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Учитывая остальные неравенства из определения эллиптических координат (\*\*), мы получаем следующие условия на параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , т. е. систему неравенств

$$\begin{cases} -a \leq \lambda_1 \leq -b, \\ \lambda_0 \leq \lambda_2 \leq 0, \\ V(\lambda_1) \geq 0, \\ V(\lambda_2) \geq 0. \end{cases}$$

Пользуясь явной формулой полинома  $V$  (23), можно определить, в каких пределах должны лежать переменные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , чтобы полином  $V$  был неотрицательным. Для этого нужно также учитывать взаимное расположение чисел  $a$ ,  $b$ ,  $\lambda_0$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и  $0$ . Напомним, что  $a$  и  $b$  — полуоси внешнего эллипса,  $\lambda_0$  — параметр внутреннего софокусного эллипса,  $\xi$  и  $\eta$  — корни полинома  $V$  (см. (23)). Перебирая все возможные варианты, получаем следующие неравенства. Сначала перечислим их для притягивающего потенциала, т. е. при  $k > 0$  (см. табл. 4).

Таблица 4. Неравенства при  $k > 0$ 

	Неравенство	Область
1	$\eta \leq \xi \leq -a \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0$	—
2	$\eta \leq -a \leq \xi \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0$	—
3	$\eta \leq -a \leq -b \leq \xi \leq \lambda_0 \leq 0$	—
4	$\eta \leq -a \leq -b \leq \lambda_0 \leq \xi \leq 0$	—
5	$\eta \leq -a \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0 \leq \xi$	—
6	$-a \leq \eta \leq \xi \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0$	—
7	$-a \leq \eta \leq -b \leq \xi \leq \lambda_0 \leq 0$	—
8	$-a \leq \eta \leq -b \leq \lambda_0 \leq \xi \leq 0$	$\lambda_1 \in [-a, \eta], \lambda_2 \in [\lambda_0, \xi]$
9	$-a \leq \eta \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0 \leq \xi$	$\lambda_1 \in [-a, \eta], \lambda_2 \in [-\lambda_0, 0]$
10	$-a \leq -b \leq \eta \leq \lambda_0 \leq \xi \leq 0$	—
11	$-a \leq -b \leq \eta \leq \lambda_0 \leq \xi \leq 0$	$\lambda_1 \in [-a, -b], \lambda_2 \in [\lambda_0, \xi]$
12	$-a \leq -b \leq \eta \leq \lambda_0 \leq 0 \leq \xi$	$\lambda_1 \in [-a, -b], \lambda_2 \in [\lambda_0, 0]$
13	$-a \leq -b \leq \lambda_0 \leq \eta \leq \xi \leq 0$	$\lambda_1 \in [-a, -b], \lambda_2 \in [\eta, \xi]$
14	$-a \leq -b \leq \lambda_0 \leq \eta \leq 0 \leq \xi$	$\lambda_1 \in [-a, -b], \lambda_2 \in [\eta, 0]$
15	$-a \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0 \leq \eta \leq \xi$	—

Как видно из таблицы, в некоторых случаях допустимая область одной из координат может оказаться пустой. Это означает, что при таких значениях  $\xi$  и  $\eta$  (т. е. для соответствующих  $h$  и  $f$ ) движение не происходит. Согласно таблице только в шести случаях движение материальной точки на бильярде действительно существует. Подставляя в неравенства значения  $\xi$  и  $\eta$  из формулы (23), получаем области в  $\mathbb{R}^2$ , изображённые на рис. 3. Согласно [10] только граничные точки этих областей могут быть критическими значениями, но не все

граничные точки обязаны быть критическими. Пунктиром на рис. 3 как раз обозначены точки границы, не являющиеся критическими. Соответствующее доказательство будет приведено ниже.

Случай отталкивания, т. е.  $k < 0$ , рассматривается аналогично. Точный результат приведён в табл. 5.

Таблица 5. Неравенства при  $k < 0$

	Неравенство	Область
1	$\xi \leq \eta \leq -a \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0$	-
2	$\xi \leq -a \leq \eta \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0$	$\lambda_1 \in [-a, \eta], \lambda_2 \in [-\lambda_0, 0]$
3	$\xi \leq -a \leq -b \leq \eta \leq \lambda_0 \leq 0$	$\lambda_1 \in [-a, -b], \lambda_2 \in [\lambda_0, 0]$
4	$\xi \leq -a \leq -b \leq \lambda_0 \leq \eta \leq 0$	$\lambda_1 \in [-a, -b], \lambda_2 \in [\eta, 0]$
5	$\xi \leq -a \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0 \leq \eta$	-
6	$-a \leq \xi \leq \eta \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0$	$\lambda_1 \in [\xi, \eta], \lambda_2 \in [\lambda_0, 0]$
7	$-a \leq \xi \leq -b \leq \eta \leq \lambda_0 \leq 0$	$\lambda_1 \in [\xi, -b], \lambda_2 \in [\lambda_0, 0]$
8	$-a \leq \xi \leq -b \leq \lambda_0 \leq \eta \leq 0$	$\lambda_1 \in [\xi, -b], \lambda_2 \in [\eta, 0]$
9	$-a \leq \xi \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0 \leq \eta$	-
10	$-a \leq -b \leq \xi \leq \lambda_0 \leq \eta \leq 0$	-
11	$-a \leq -b \leq \xi \leq \lambda_0 \leq \eta \leq 0$	-
12	$-a \leq -b \leq \xi \leq \lambda_0 \leq 0 \leq \eta$	-
13	$-a \leq -b \leq \lambda_0 \leq \xi \leq \eta \leq 0$	-
14	$-a \leq -b \leq \lambda_0 \leq \xi \leq 0 \leq \eta$	-
15	$-a \leq -b \leq \lambda_0 \leq 0 \leq \xi \leq \eta$	-

## 6. Области возможного движения.

### Вычисление атомов

Последний столбец таблиц 4 и 5 показывает, какими могут быть значения координат  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  при заданных значениях интегралов  $h$  и  $f$ . Другими словами, для данных значений интегралов есть некоторая область на бильярде, где может находиться материальная точка. Такие области будем называть *областями возможного (допустимого) движения*. Отметим, что эти области являются образами двумерных торов Лиувилля при естественной проекции  $\pi$  из изоэнергетического многообразия  $Q^3$  на бильярд. Обозначим все области возможного движения для внутренних регулярных точек диаграмм (рис. 5–16).

Случай  $k > 0$

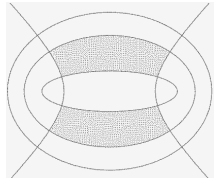


Рис. 5. Область для камеры 8

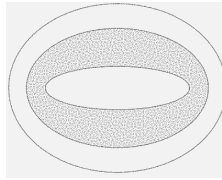


Рис. 6. Область возможного движения для камеры 11

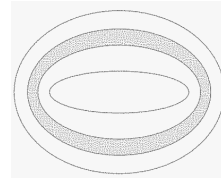


Рис. 7. Область возможного движения для камеры 13

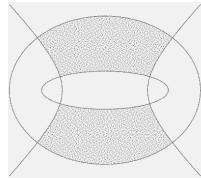


Рис. 8. Область возможного движения для камеры 9

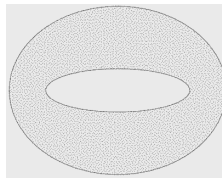


Рис. 9. Область возможного движения для камеры 12

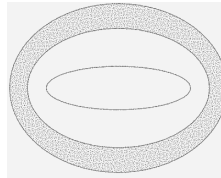


Рис. 10. Область возможного движения для камеры 14

Случай  $k < 0$

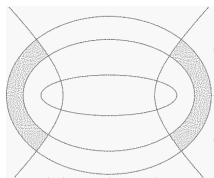


Рис. 11. Область возможного движения для камеры 8

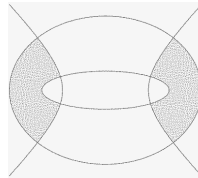


Рис. 12. Область возможного движения для камеры 7

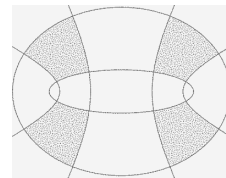


Рис. 13. Область возможного движения для камеры 6

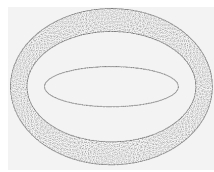


Рис. 14. Область возможного движения для камеры 4

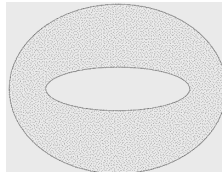


Рис. 15. Область возможного движения для камеры 3

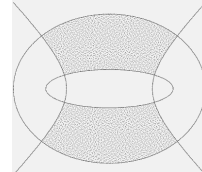


Рис. 16. Область возможного движения для камеры 2

Найденные нами области возможного движения позволяют увидеть, как перестраиваются торы Лиувилля, проходя через особый слой, а значит, вычислить атомы. Поскольку многообразие  $M^4$  не гладкое, а кусочно-гладкое, то классическая теорема Лиувилля выполняется здесь в своём кусочно-гладком варианте. Докажем, что регулярные слои кусочно-гладкого слоения Лиувилля гомеоморфны объединению торов.

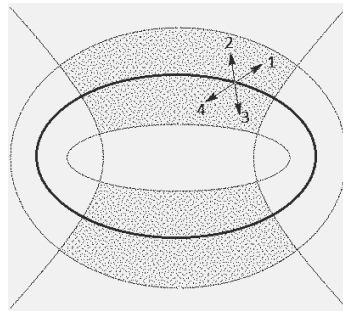


Рис. 17. Область возможных движений для камеры 9

В самом деле, рассмотрим, например, камеру 9 и соответствующие ей значения интегралов  $(h, f)$  для случая  $k > 0$  (рис. 17). Из уравнения (22) видно, что в каждой внутренней точке области заданы четыре вектора скорости. В граничных точках их может быть два, касательных к границе области. Расслоим область на софокусные эллипсы, точки которых снабжены соответствующими векторами скоростей. Связная дуга эллипса, оснащённая векторами 1—2 и 3—4 (см. рис. 17), порождает две окружности в  $Q^3 = (H = \text{const})$ . В самом деле, векторы 1—2 и 3—4 совпадают на гиперболической границе (векторы скорости направлены по касательной). Таким образом, связная часть области порождает в  $Q^3$  два цилиндра, склеенных по граничным окружностям, поскольку на эллиптических границах бильярда векторы 1—3 и 2—4 склеиваются. Таким образом, для каждой компоненты связности области допустимого движения возникает тор Лиувилля. Поясним, что компоненты области допустимого движения являются проекциями торов Лиувилля на бильярд.

Остальные камеры рассматриваются аналогично. В случае  $k < 0$  для камеры 6 получается четыре тора, а для остальных камер — два тора Лиувилля.

Теперь выясним, как перестраиваются торы при переходе из одной камеры в другую через дуги бифуркационной диаграммы.

**Теорема 5.** При переходе из камеры в камеру (в образе отображения момента) через сплошные дуги бифуркационной диаграммы (см. рис. 3 и 4) перестройки (бифуркации) торов Лиувилля описываются атомами  $B$  или  $C_2$ . При переходе через пунктирные дуги (см. рис. 3 и 4) перестройки не происходит.

**Доказательство.** Шаг 1. Возьмём две соседние камеры. Каждой регулярной точке из этих камер отвечает своя область возможного движения. При

переходе из камеры в камеру через дугу бифуркационной диаграммы, области возможного движения перестраиваются одна в другую. Область, отвечающая критическому значению, будем называть *критической областью возможного движения*.

Шаг 2. Эту критическую область можно разбить на эллипсы, софокусные эллипсам биллиарда и оснащёнными векторами скорости.

Шаг 3. Находим прообраз каждого такого эллипса для отображения момента в изоэнергетическом многообразии  $Q^3$ .

Шаг 4. Прообразом всей критической области возможного движения при отображении  $\pi$  является критический слой некоторого атома (двумерный комплекс).

Случай  $k > 0$ . На рис. 18–20 перечислены некоторые возможные случаи критических областей возможного движения при  $k > 0$ .

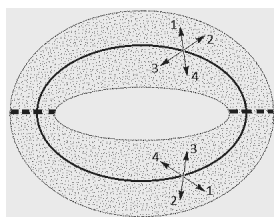


Рис. 18. Критическая область возможного движения, соответствующая переходу из 9 в 12

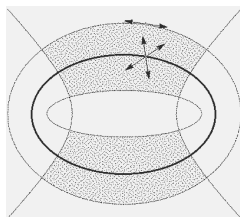


Рис. 19. Критическая область возможного движения, соответствующая переходу из 8 в 9

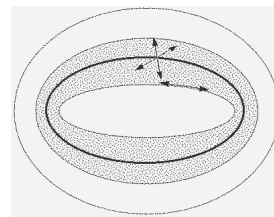


Рис. 20. Критическая область возможного движения, соответствующая переходу из 11 в 13

Сначала рассмотрим переход из камеры 9 в камеру 12 через точку на диаграмме. Этому значению  $(h, f)$  соответствует критическая область возможного движения, полученная из регулярной области, соответствующей камере 9, стягиванием её гиперболической границы на фокальную прямую (рис. 18). Разобьём эту критическую область на софокусные эллипсы, снабжённые соответствующими векторами скоростей. Так как на критических циклах (прерывистая линия) векторы 1–2 и 3–4 совпадают, то прообразами как верхней, так и нижней половин эллипса при проекции  $\pi$  являются две окружности, соответствующие векторам 1–2 и 3–4 для каждой из половин эллипса. При этом соответствующие «верхняя» и «нижняя» окружности имеют две общие точки (они лежат на критических циклах). Таким образом, получаем два критических слоя для двух 2-атомов  $C_2$ . Умножим каждый из них на отрезок и склеим полученные цилиндры в соответствии с тем, что на эллиптических границах вектора 2–4 и 1–3 склеиваются. Получили критический слой 3-атома  $C_2$ . Случай перехода 8–11 аналогичен.



Теперь рассмотрим переход из камеры 8 в камеру 9. Этому значению  $(h, f)$  соответствует критическая область возможного движения, полученная из регулярной области, соответствующей камере 8, стягиванием её верхней эллиптической границы на внешнюю границу бильярда (рис. 19). Разобьём эту критическую область на дуги софокусных эллипсов, снабжённых соответствующими векторами скоростей. На гиперболической границе векторы 1—2 и 3—4 совпадают. Следовательно, прообразом каждой дуги оснащённых эллипсов является окружность. Умножим её на отрезок и склеим полученные цилиндры в соответствии с тем, что на внешней границе бильярда векторы 2—4 и 1—3 совпадают, а на внутренней они склеиваются. Таким образом получим два тора (по одному для каждой из компонент связности критической области движения). Следовательно, при переходе из камеры 8 в камеру 9 бифуркации нет. Случаи переходов 11—12 и 13—14 аналогичны.

Отметим, что именно по этой причине дуга бифуркационной диаграммы, отделяющая камеры 8 и 9, обозначена пунктирной линией.

Наконец, рассмотрим случай перехода из камеры 13 в камеру 11. Критическая область возможного движения получается из регулярной области, соответствующей камере 13, стягиванием её нижней эллиптической границы к внутренней границе бильярда (рис. 20). Разобьём эту критическую область на дуги софокусных эллипсов, снабжённых соответствующими векторами скоростей. Прообразом каждой дуги оснащённых эллипсов являются четыре окружности, соответствующие четырём векторам скоростей. Умножим каждую из них на отрезок и склеим полученные цилиндры в соответствии с тем, что на внутренней границе бильярда векторы 2—4 и 1—3 совпадают. Таким образом, получим два тора. Следовательно, как и в случае перехода 8—9, бифуркации нет. Аналогично рассматривается случай перехода 12—14. На этом случай  $k > 0$  исчерпан.

Случай  $k < 0$ .

Отметим, что случаи переходов из камеры 8 в камеру 7 и из камеры 4 в камеру 3 рассматриваются аналогично переходу из камеры 11 в камеру 12 при  $k > 0$ . Здесь также нет бифуркаций. Случаи переходов 8—4, 7—3, 2—3 рассматриваются аналогично случаю перехода 9—12 при  $k > 0$ . Также получаются

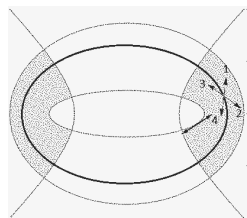


Рис. 21. Область перехода из 8 в 7

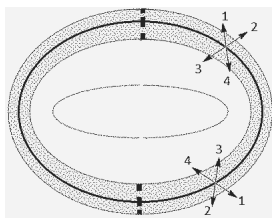


Рис. 22. Область перехода из 8 в 4

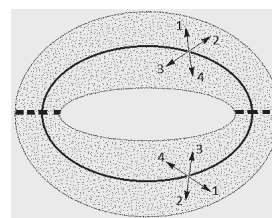


Рис. 23. Область перехода из 2 в 3

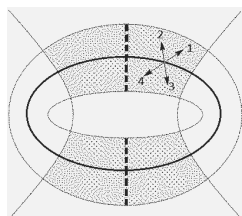


Рис. 24. Область перехода из 2 в 6

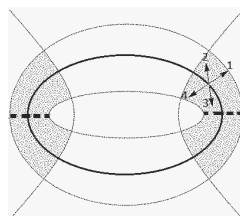


Рис. 25. Область перехода из 6 в 7

атомы  $C_2$ . Критические области движения, критические циклы и разбиения на оснащённые эллипсы приведены на рис. 21–24.

Рассмотрим случай перехода из камеры 6 в камеру 7. Критическая область возможного движения получается из регулярной области, соответствующей камере 6, стягиванием гиперболической границы, которой соответствует больший коэффициент, на горизонтальную прямую (рис. 25). Будем рассматривать правую компоненту связности критической области движения. Разобьём эту область на софокусные эллипсы, оснащённые векторами скоростей. На гиперболической границе и на критическом цикле (прерывистая линия) векторы 1–2 и 3–4 совпадают. Следовательно, прообразом оснащённой дуги эллипса при проекции  $\pi$  являются два критических слоя 2-атома  $B$ , каждый из которых соответствует парам векторов 1–2 и 3–4. Умножим эти критические слои на отрезок и склеим цилиндры в соответствии с тем, что на стенках бильярда векторы 2–4 и 1–3 склеиваются. Получили критический слой 3-атома  $B$ . Для левой компоненты связности критической области движения повторим аналогичные рассуждения. Таким образом получили два 3-атома  $B$ .

Теорема доказана.  $\square$

## 7. Доказательство теоремы 4.

### Инварианты Фоменко—Цишанга (меченые молекулы)

Теперь можно строить грубые изоэнергетические молекулы. Для этого на образе отображения момента (рис. 3 и 4) нужно провести вертикальную прямую через нужное значение  $h$  и поставить в соответствие точкам пересечения этой прямой с дугами бифуркационной диаграммы соответствующие 3-атомы. Результат приведён в таблицах 1–3.

Зафиксируем значение гамильтониана  $H$ . Рассмотрим пересечение прямой  $h = \text{const}$  с образом отображения момента (рис. 26). Как было показано выше, граничным точкам отрезка пересечения соответствуют атомы  $A$ , а точкам, попавшим внутрь камер или на пунктирные дуги, — торы. Перестройкам этих

торов соответствуют точки пересечения отрезка с остальными точками бифуркационной диаграммы. Атомы, описывающие эти перестройки, были вычислены в теореме 5.

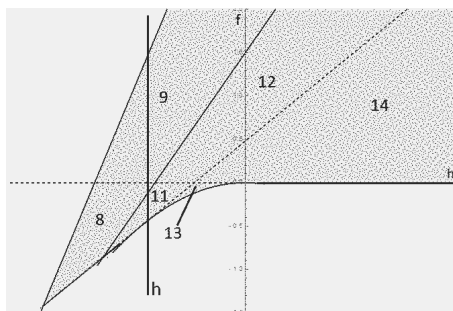


Рис. 26. Бифуркационная диаграмма

В качестве примера разберём случай  $k > 0$  и  $h \in (-k(b - \lambda_0)/2; +\infty)$  (рис. 26). Каждой из камер 11, 8 и 9 соответствуют два тора Лиувилля. Следовательно, и каждой граничной точке отрезка соответствуют два 3-атома  $A$ . Прообразом окрестности точки пересечения отрезка с дугой диаграммы, разделяющей камеры 11 и 8, является 3-атом  $C_2$  (см. теорему 5). В итоге получаем следующую грубую молекулу (рис. 27).

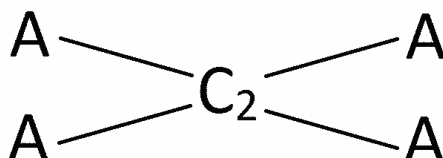


Рис. 27. Грубый инвариант Фоменко–Цишанга для случая  $k > 0$  и  $h \in (-k(b - \lambda_0)/2; +\infty)$

Теперь перейдём к вычислению меток. Для этого используем алгоритм, предложенный В. В. Фокичевой [8].

В качестве примера рассмотрим подсчёт для случая переходов на прямой 4–3–7–6 (рис. 28) при  $k < 0$ .

Циклы  $\lambda$  обозначены чёрными линиями, циклы  $\mu$  — прерывистыми линиями. Первым шагом выбираем цикл  $\lambda$ , исчезающий на критическом слое атома  $A$  в четвёртой области, и цикл  $\mu$ , его дополняющий. Циклы в отрицательной части окрестности атома  $C_2$  выбираем такими же с точностью до ориентации. Матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

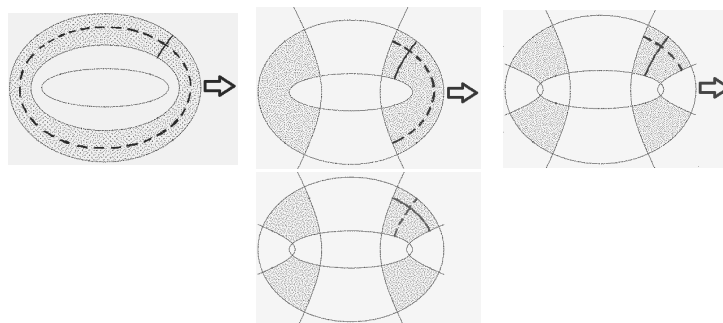


Рис. 28. Перестройка областей возможного движения, оснащённых циклами, при переходе 4–3–7–6 между камерами

она даёт метки на первом ребре  $r = \infty$ ,  $\varepsilon = 1$ . Циклы положительной окрестности атома  $C_2$  выбираются согласованными. Затем повторяем рассуждения. На последнем ребре в окрестности атома  $A$  выбираем исчезающий цикл  $\lambda$  и его дополняющий  $\mu$ . Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которая даёт метки  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ . В результате получили меченую молекулу (рис. 29).

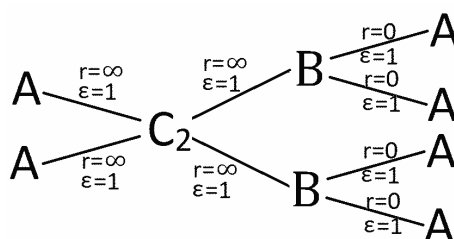


Рис. 29. Инвариант Фоменко—Цишанга

Остальные случаи молекул разбираются аналогично.

## 8. Биллиард в эллипсе в поле гуконской потенциальной силы

Родственная задача о биллиарде в эллипсе в поле гуконской центральной силы была разобрана И. Ф. Кобцевым [5]. Полезно сравнить эти две задачи.

Ниже кратко излагается работа И. Ф. Кобцева.

**Теорема 6** (И. Ф. Кобцев). *Бифуркационные диаграммы и образ отображения момента для случаев  $k > 0$  и  $k < 0$  изображены на рис. 30 и 31 соответственно. Инварианты Фоменко—Цишанга для разных уровней гамильтониана  $H$  показаны в табл. 6—8.*

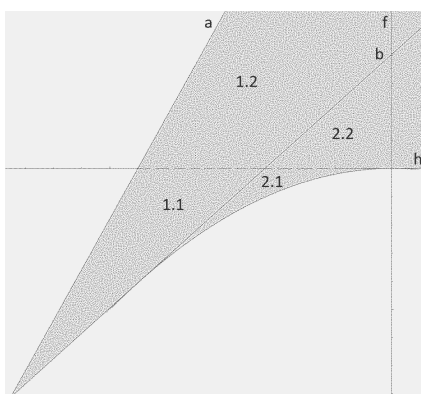


Рис. 30. Диаграмма при  $k > 0$

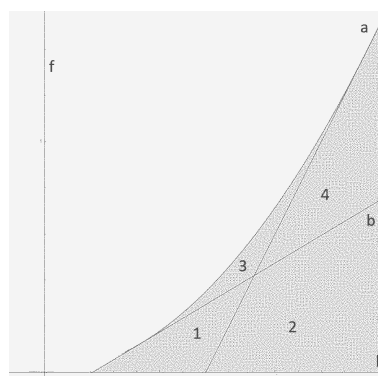


Рис. 31. Диаграмма при  $k < 0$

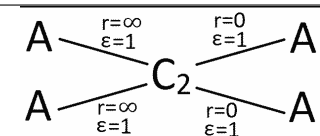
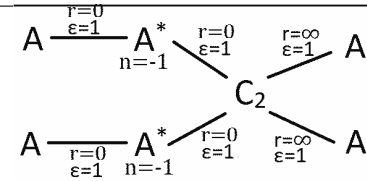
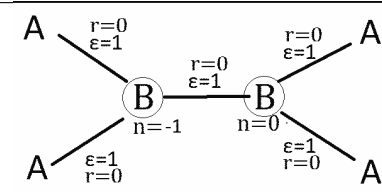
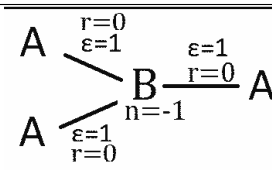
Сравним наши результаты с теоремой Кобцева.

- а) Интересно отметить, что хотя топологически биллиарды в кольце и эллипсе различны, из рис. 30 и 31 видно, что бифуркационные диаграммы совпадают с точностью до пунктирных линий.

Таблица 6. Инварианты Фоменко—Цишанга для разных уровней гамильтониана  $H$  в случае эллипса при  $k > 0$

	Значение $h$	Инвариант Фоменко—Цишанга
$k > 0$	$h \in \left( \frac{-k(a+b)}{2}; \frac{-k(b-\lambda_0)}{2} \right)$	$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$
	$h \in \left( \frac{-k(b-\lambda_0)}{2}; +\infty \right)$	$A \begin{matrix} \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} \\ \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} \end{matrix} B \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$ $n=-1$

Таблица 7. Инварианты Фоменко—Цишанга для разных уровней гамильтониана  $H$  в случае эллипса при  $k < 0, a < 2b$

	Значение $h$	Инвариант Фоменко—Цишанга
$k < 0, a > 2b$	$h \in \left(\frac{-kb}{2}; \frac{-ka}{2}\right)$	$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$ $A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$
	$h \in \left(\frac{-ka}{2}; -kb\right)$	
	$h \in \left(-kb; \frac{-k(a+b)}{2}\right)$	
	$h \in \left(\frac{-k(a+b)}{2}; -ka\right)$	
	$h \in (-ka; +\infty)$	

- б) Важно отметить, что, хотя бифуркационные диаграммы «кольцевого» бильярда и бильярда в эллипсе совпали, многие инварианты Фоменко—Цишанга оказываются существенно различными. Это означает, что эти две бильярдные задачи в целом лиувиллево не эквивалентны. Отличия: в молекулах И. Ф. Кобцева встречается атомы со звездочкой  $A^*$ . Звездочки возникают благодаря тому, что на бильярде присутствуют фокусы.
- в) Всё же есть совпадающие молекулы. Это так, например, для случая  $k < 0, a < 2b$  и  $h \in \left(-ka/2; -kb\right)$ . Это связано с тем, что области возможного движения для данного уровня интегралов не содержат внутренней грани-

Таблица 8. Инварианты Фоменко—Цишанга для разных уровней гамильтониана  $H$  в случае эллипса при  $k < 0, a \leq 2b$

	Значение $h$	Инвариант Фоменко—Цишанга
$k < 0, a \geq 2b$	$h \in \left(\frac{-kb}{2}; -kb\right)$	$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$ $A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$
	$h \in \left(-kb; \frac{-ka}{2}\right)$	$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A^* \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$ $n=-1$
	$h \in \left(\frac{-ka}{2}; \frac{-k(a+b)}{2}\right)$	
	$h \in \left(\frac{-k(a+b)}{2}; -ka\right)$	
	$h \in (-ka; +\infty)$	

цы бильярда. Следовательно, её наличие никак не влияет на перестройку торов Лиувилля, и молекула не меняется.

**Комментарий.** Казалось бы, кольцевой бильярд можно заменить на ему эквивалентный, устремив внутренний эллипс к пределу, где он вырождается в отрезок, и тем самым свести нашу задачу к случаю эллипса. Но при устремлении к пределу всё ещё остаётся стенка внутри бильярда, от которой отражается материальная точка. Следовательно, подобным образом «кольцевой» бильярд нельзя свести к эллиптическому.

## 9. Кольцевой бильярд лиувиллево эквивалентен некоторым другим интегрируемым системам

Так как меченая молекула определяет слоение, системы лиувиллево эквивалентны, если и только если их меченые молекулы совпадают. Таким образом, поставим в соответствие системе данной работы эквивалентные ей другие интегрируемые системы.

**Теорема 7.** Кольцевой бильярд лиувиллево эквивалентен интегрируемым системам динамики твёрдого тела, перечисленным в таблице 9.

Таблица 9. Эквивалентные системы динамики твёрдого тела

Молекула	Случаи интегрируемости для динамики твёрдого тела
$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$	Лагранж (1), Эйлер (1)
$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=\infty} B \begin{cases} \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A \\ \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A \end{cases}$	Ковалевская (5), Жуковский (2)
$A \begin{cases} \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=\infty} C_2 \\ \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=\infty} C_2 \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A \\ \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A \end{cases}$	Эйлер (2), Клебш (10)

Эти же молекулы были получены В. В. Фокичевой [8] для схожих бильярдов, но без потенциала.

Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867).

## Литература

- [1] Биркгоф Дж. Динамические системы. — М.; Л.: Гостехиздат, 1936.
- [2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1. — Ижевск: РХД, 1999.



- [3] Ведюшкина (Фокичева) В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. — 2017. — Т. 81, № 4. — С. 20—67.
- [4] Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т., Харчева И. С. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами // Докл. РАН. — 2018. — Т. 479, № 6. — С. 607—610.
- [5] Кобцев И. Ф. Топология слоения Лиувилля интегрируемого бильярда в потенциальном поле: Курс. работа. — Механико-математический факультет МГУ. Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, 2016.
- [6] Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикл. матем. и мех. — 1995. — Т. 59, № 1. — С. 3—9.
- [7] Федосеев Д. А., Фоменко А. Т. Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем // Фундам. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 6. — С. 217—243.
- [8] Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 10. — С. 127—176.
- [9] Фокичева В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела // Докл. РАН. — 2015. — Т. 465, № 2. — С. 150—153.
- [10] Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приближения к классическим системам // Нелинейная динамика. — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 769—805.
- [11] Якоби К. Лекции по динамике. — М.: Гостехиздат, 1936.
- [12] Fokicheva V. V., Fomenko A. T. Billiard systems as the models for the rigid body dynamics // Studies in Systems, Decision and Control / V. A. Sadvnichiy, M. Z. Zgurovsky, eds. — Springer, 2016. — (Adv. Dynam. Syst. Control; Vol. 69). P. 13—32.
- [13] Fomenko A. T., Konyaev A. Yu. New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems // Topology Its Appl. — 2012. — Vol. 159. — P. 1964—1975.
- [14] Fomenko A. T., Nikolaenko S. S. The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid // J. Geom. Phys. — 2015. — Vol. 87. — P. 115—133.
- [15] Landau L. D., Lifshitz E. M. Mechanics. — Butterworth—Heinemann, 1976.

