

Бифуркации бинарных типов минимальных сетей Штейнера на плоскости

Е. И. СТЕПАНОВА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ekfila@gmail.com

УДК 514.77+519.176+515.165.7

Ключевые слова: проблема Штейнера, сеть Штейнера, бифуркационная диаграмма.

Аннотация

Работа является продолжением нашего исследования «Бифуркации топологий деревьев Штейнера на плоскости», где рассматриваются топологии сетей Штейнера фиксированного бинарного типа. В настоящей работе построены бифуркационные диаграммы бинарных типов минимальных сетей Штейнера для четырёх граничных точек и изучены некоторые свойства таких диаграмм для любого числа точек.

Abstract

E. I. Stepanova, Bifurcations of binary types of Steiner minimal networks in the plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 227–252.

This paper is a continuation of the paper “Bifurcations of Steiner tree topologies in the plane,” where topologies of Steiner networks of a fixed binary type are considered. Here bifurcation diagrams of binary types of Steiner minimal networks for four boundary points are constructed and some properties of such diagrams for any number of points are discussed.

1. Введение

Данная работа посвящена изучению проблемы Штейнера.

Проблема Штейнера — известная задача о поиске кратчайшей сети, затягивающей конечное множество точек в метрическом пространстве. Её изучение началось, вероятно, в XVII веке, с работ П. Ферма [11], в которых рассматривался случай трёх точек на плоскости. Решением задачи Ферма о трёх точках занимались В. Вивиани, Б. Кавальери, Э. Торричелли, Т. Симпсон. Тот же вопрос для четырёх точек изучали К. Бопп [6], К. Гаусс и Г. Шумахер, Э. Клапейрон, Г. Ламе. Очень хороший исторический обзор проблемы Штейнера дан в [7], где утверждается, что впервые для любого числа точек плоскости эту задачу начал изучать Ж. Д. Жергонн в 1811 году в [12] и нашёл практически то же решение, что и З. А. Мелзак [16] спустя 150 лет. В 1934 году В. Ярник

и О. Кёсслер [15] сделали ещё большее обобщение, разрешив соединять сеть произвольное число точек в евклидовом пространстве любой размерности. Однако в известной книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» [9] эта задача была названа именем Якоба Штейнера, с тех пор название прочно закрепилось. В общем случае рассматривается произвольное множество точек в некотором метрическом пространстве и требуется построить граф наименьшей длины с вершинами в этом пространстве, который соединял бы все эти точки (он, очевидно, является деревом). Решение этой задачи называется *минимальным деревом Штейнера*.

Важнейший вопрос, без которого невозможно решение проблемы Штейнера, — какую *топологию* будет иметь искомое дерево при заданном положении исходных точек в пространстве, т. е. какие вершины, помимо данных, нужно добавить и какие вершины дерева будут соединены между собой рёбрами. Помимо уже упомянутых авторов, эту проблему исследовали также для вершин выпуклых четырёхугольников Г. Поллак [18], Д. Чж. Ду, Ф. К. Хванг, Г. Д. Сонг и Г. Ю. Тинг [10], а также К. Оллереншо [17] и многие другие. В [19] Цз. Ф. Вэн рассматривал также частные случаи невыпуклых четырёхугольников. Все эти авторы представили некоторые геометрические признаки и критерии того, что минимальное дерево Штейнера будет иметь конкретную топологию.

В настоящей работе вопрос о топологиях минимальных сетей Штейнера (это обобщение минимальных деревьев Штейнера, точное определение см. ниже) полностью изучен для всех множеств, состоящих из четырёх точек на евклидовой плоскости, благодаря построению теории бифуркаций сетей. Данная работа является естественным продолжением работы [5], в которой изучались бифуркации топологий сетей Штейнера фиксированного бинарного типа. В настоящей работе бифуркационные диаграммы для разных бинарных типов рассматриваются одновременно, что позволяет получить картину изменения бинарных типов при изменении конфигурации исходных точек. Получены некоторые свойства кривых на бифуркационных диаграммах.

Автор выражает благодарность А. О. Иванову и А. А. Тужилину за постановку задачи, плодотворные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (соглашение № 075-02-2018-867 по гранту НШ-6399.2018.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-01-00378-а).

2. Постановка задачи Штейнера

Мы будем использовать традиционную терминологию теории графов (см., например, [1]). Напомним некоторые определения теории минимальных сетей, используемые также в [5].

Все рассматриваемые графы предполагаются простыми, т. е. не содержащими петель и кратных рёбер, поэтому такие графы задаются парами (V, E) ,

где V — конечное множество, а E — некоторое семейство двухэлементных подмножеств V . Часто, как это принято в теории графов, для графа $G = (V, E)$ множество вершин V будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер E — через $E(G)$, а ребро $\{v, w\} \in E$ — через vw .

2.1. Графы в метрическом пространстве

Мы будем изучать *графы, лежащие в метрическом пространстве*, т. е. графы, вершины которых принадлежат метрическому пространству. Расстояние между точками x и y метрического пространства будем обозначать через $|xy|$.

Определение 1. Для графа G в метрическом пространстве определим *длину ребра* $e = vw \in E(G)$, положив её равной $|vw|$; эту длину будем также обозначать через $|e|$. *Длиной $|G|$ графа G , лежащего в метрическом пространстве*, назовём сумму длин всех его рёбер.

Замечание 1. Все вершины графа в метрическом пространстве — различные точки этого пространства, т. е. длины всех рёбер такого графа положительны. Далее будут рассмотрены сети, в которых этого ограничения уже не будет.

2.2. Графы с границей

В дальнейшем мы будем работать со следующей конструкцией.

Определение 2. Выберем некоторое множество M и рассмотрим связный граф G , множество вершин которого содержат это M . Тогда множество M будем называть *границей* графа G и обозначать ∂G , его элементы естественно назовём *граничными вершинами для G* , а оставшиеся вершины графа G — *внутренними*. Про граф G скажем, что он *соединяет M* .

Определение 3. Ребро соединяющего графа G , хотя бы один конец которого является граничной вершиной, называется *граничным*. Ребро, у которого оба конца — внутренние вершины графа G , называется *внутренним*.

2.3. Постановка задачи Штейнера

Множество графов в метрическом пространстве X , соединяющих $M \subset X$, обозначим через $G(M)$. В задаче Штейнера требуется построить граф из $G(M)$ минимальной возможной длины. Очевидно, что, если такой граф существует, он является деревом, так как из любого соединяющего графа с циклом можно убрать хотя бы одно ребро из этого цикла так, что при этом длина графа уменьшится и он по-прежнему будет принадлежать $G(M)$. Поэтому решение задачи Штейнера называется *минимальным деревом Штейнера*. Дадим более формальное определение.

Определение 4. Число

$$\text{smt}(M) = \inf_{G \in G(M)} |G|$$

называется *длиной минимального дерева Штейнера для M* , а каждый граф G из $G(M)$, такой что $|G| = \text{smt}(M)$, называется *минимальным деревом Штейнера для M* . Для минимального дерева Штейнера будем использовать сокращение SMT (Steiner minimal tree), а множество всех минимальных деревьев Штейнера для M будем обозначать через $\text{SMT}(M)$.

Определение 5. Внутренние вершины SMT будем называть его *точками Штейнера*.

2.4. Конфигурационное пространство границ

Рассмотрим метрическое пространство X и множество M из m точек в нём. Для удобства будем считать, что точки в M перенумерованы. Тогда M образует некоторую *конфигурацию*, задаваемую вектором (x_1, \dots, x_m) , где x_i — положение i -й точки в пространстве X . Таким образом, конфигурация M — вектор в *конфигурационном пространстве X^m* .

Минимальные деревья Штейнера — это графы в метрическом пространстве X с границей M в конфигурационном пространстве X^m , состоящей из m вершин. Так как в графах все вершины различны, то в векторе (x_1, \dots, x_m) не может быть двух одинаковых элементов. Чтобы убрать это ограничение, далее воспользуемся понятием *сетей*.

3. Минимальные деревья Штейнера на плоскости

3.1. Геометрическая реализация графов

Так как в данной работе мы имеем дело с евклидовым пространством, в котором каждые две точки x, y соединяются единственным отрезком длины $|xy|$, то этот отрезок мы можем поставить в соответствие ребру xy длины $|xy|$ графа H , лежащего в евклидовом пространстве; назовём его *геометрической реализацией ребра xy* . Множество вершин графа H , объединённое с множеством геометрических реализаций его рёбер, называется *геометрической реализацией графа H* [3]. Далее под графом, соединяющим точки евклидова пространства, или его частью мы будем понимать соответствующую геометрическую реализацию.

3.2. Деревья Штейнера

Утверждение 3.1 [13, 15]. *Минимальное дерево Штейнера на плоскости существует для любой границы. Все углы между ребрами в нём не меньше 120° .*

Из этого следует, что степень любой вершины SMT не больше 3 и во всех вершинах степени 3 рёбра сходятся под углом ровно 120° . Также из неравенства треугольника получается, что в каждой внутренней вершине степени 2 рёбра сходятся под углом 180° . Такую внутреннюю вершину можно удалить

из множества вершин, склеив инцидентные ей рёбра в одно. Или наоборот, можно добавить сколь угодно много таких вершин, поделив ими существующие рёбра. При этом длина дерева не изменится, и, более того, оно останется совпадающим, как подмножество объемлющего пространства, с исходным деревом. Поэтому мы будем считать деревья, отличающиеся только количеством внутренних вершин степени 2, эквивалентными. Всё только что сказанное позволяет ограничиться изучением деревьев, не содержащих внутренних вершин степени 2. Внутренних вершин степени 1 также нет, так как стягивание ребра, инцидентного такой вершине, дало бы дерево меньшей длины. Далее будем считать, что все внутренние вершины имеют степень 3.

Определение 6. *Топологией Штейнера* будем называть дерево, у которого все граничные вершины имеют степени 1, 2 или 3, а внутренние — степень 3.

Определение 7. *Деревом Штейнера* в [13] называется любое дерево на плоскости (не обязательно минимальной длины) с топологией Штейнера и углами между рёбрами не меньше 120° . Для него будем использовать обозначение ST.

Замечание 2 [16]. Ясно, что SMT на плоскости — кратчайшее из всех деревьев Штейнера с той же границей. На этой идее основан алгоритм Мелзака построения SMT на плоскости.

Следующий результат позволяет искать внутренние вершины ST в ограниченной области.

Утверждение 3.2 [13]. *Дерево Штейнера лежит в выпуклой оболочке $\text{conv}(M)$ своей границы M . Каждая вершина степени 3 лежит внутри $\text{conv}(M)$.*

Следующее утверждение следует из утверждения 3.1 и условия минимальности длины SMT.

Утверждение 3.3 [16]. *Если ST разбить на две части по граничной вершине степени 2 или 3, то полученные деревья также будут являться ST (для соответствующих границ). То же верно с заменой ST на SMT.*

Под n -угольником будем понимать множество из n граничных точек.

3.3. Дерево Штейнера для треугольника на плоскости

Со случая трёх граничных точек начиналась задача Штейнера, и на его основе было выведено утверждение 3.1. Поэтому следующие факты хорошо известны и упоминаются в [3, 9, 13, 14] и других источниках.

Утверждение 3.4. *Для треугольника SMT единственно.*

Утверждение 3.5. *Для треугольников, у которых все углы меньше 120° , дерево Штейнера состоит из трёх рёбер, сходящихся в единственной внутренней точке. Для треугольников с углом $\beta \geq 120^\circ$ дерево Штейнера состоит из сторон этого треугольника, угол между которыми β .*

Утверждение 3.6. Пусть для треугольника ABC с углами, меньшими 120° , построено SMT с внутренней точкой O , а на сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники ABC' , BCA' , CAB' . Тогда

- 1) окружности, описанные около треугольников ABC' , BCA' и CAB' , пересекаются в точке O ;
- 2) прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в точке O и длина минимального дерева Штейнера для треугольника ABC равна

$$AO + OA' = AA' = BO + OB' = BB' = CO + OC' = CC'.$$

3.4. Деревья Штейнера для четырёхугольника

Далее приведём несколько утверждений, касающихся четырёхугольников на плоскости.

Для этого нам понадобится понятие усов дерева.

Определение 8. Если $v \in V(t)$ — вершина степени $k+1 \geq 3$ в дереве t , смежная с k вершинами w_1, \dots, w_k степени 1, то множество рёбер $\{vw_1, \dots, vw_k\}$ назовём *усами* дерева t . Вершины w_1, \dots, w_k будем называть также *усами* или *концами усов*.

Определение 9. Если $k = 2$ и w_1, w_2 лежат в векторном пространстве, то будем говорить, что усы $\{vw_1, vw_2\}$ *опираются* на отрезок w_1w_2 .

В [16] З. А. Мелзак впервые представил алгоритм построения деревьев Штейнера на плоскости за конечное число шагов. Используя алгоритм Мелзака, получаем следующее утверждение для четырёх точек.

Утверждение 3.7. Для четырёхугольника $ABCD$ существует дерево Штейнера с двумя внутренними точками O_1 и O_2 и усами $\{AO_1, BO_1\}$ и $\{CO_2, DO_2\}$, опирающимися на AB и CD соответственно, тогда и только тогда, когда оно может быть построено следующим способом.

На стороне AB строится правильный треугольник ABO'_1 . Далее строится дерево Штейнера для треугольника O'_1CD . Точка Штейнера $\triangle O'_1CD$ является также точкой Штейнера четырёхугольника $ABCD$, обозначим её O_2 (если она не может быть построена, то не может быть построено и искомое ST). Затем на отрезке O'_1O_2 внутри $ABCD$ строится точка O_1 , из которой отрезок AB виден под углом 120° (если она не может быть построена, то также не может быть построено искомое ST).

При этом длина построенного дерева Штейнера равна длине SMT для $\triangle O'_1CD$.

Определение 10. Будем называть многоугольник *строго выпуклым*, если он выпуклый и никакие три его вершины не лежат на одной прямой.

Следующий результат принадлежит Г. Поллаку.

Утверждение 3.8 [18]. Если четырёхточечное подмножество M евклидовой плоскости соединяется минимальным деревом Штейнера с двумя различными внутренними точками, то M — вершины строго выпуклого четырёхугольника.

4. Сети в метрическом пространстве

Расширим теперь понятие минимального дерева Штейнера до минимальной сети Штейнера, разрешив произвольные элементы-векторы в конфигурационном пространстве границ, включая границы с совпадающими вершинами. Далее везде будем рассматривать связные графы без циклов, т. е. деревья.

4.1. Миноры графов

Рассмотрим множество \mathcal{G} графов (не лежащих в метрическом пространстве). Пусть G и G' — графы из \mathcal{G} , причём $V(G) \setminus V(G') = \{v, w\}$ и $V(G') \setminus V(G) = u$.

Определение 11. *Стягиванием* или *вырождением ребра* $e = \{v, w\}$ в графе G называется отображение $\mu^*: V(G) \rightarrow V(G')$, такое что μ^* отображает любую вершину, кроме v и w , в себя и $\mu^*(v) = \mu^*(w) = u$. При этом говорят, что v и w из $V(G)$ *склеиваются* в одну вершину $u \in V(G')$. Все рёбра, не инцидентные ни v , ни w , переходят в себя, а рёбра, инцидентные одной из этих вершин, становятся инцидентными вершине u в графе G' (другой конец сохраняется). Граф G' содержит на одно ребро меньше, чем G .

Замечание 3. Так как мы ограничиваемся рассмотрением деревьев, то при стягивании ребра не получается кратных рёбер и дерево переходит в дерево.

Определение 12. Граф G' называется *минором* графа G , если G' получен из G с помощью вырождения нескольких рёбер. Композицию стягиваний рёбер будем называть *миноризацией* и обозначать через μ . Ясно, что минор дерева является деревом.

4.2. Миноры графов с границей

Пусть граф G имеет границу N . При стягивании ребра, у которого хотя бы один конец — граничная вершина, новая вершина будет граничной, иначе — внутренней. Кроме того, нам важно, какие именно граничные вершины склеиваются, поэтому перенумеруем все вершины из N числами от 1 до n . При склеивании вершин новая вершина, если становится граничной, помечается списком из меток склеенных граничных вершин.

Определение 13. Граф G' с помеченными таким образом граничными вершинами будем называть *графом с помеченной границей* и обозначать через G'_l , метку граничной вершины v обозначим через $l(v)$. Множество графов с помеченной границей будем обозначать через \mathcal{G}_l .

Определение 14. Графы G_l и G'_l из \mathcal{G}_l будем считать *изоморфными* тогда и только тогда, когда G и G' изоморфны и существует изоморфизм из G в G' , при котором метка любой граничной вершины v графа G совпадает с меткой её образа в G' . Далее через G_l будем обозначать любой граф из класса изоморфных G_l графов.

Таким образом, мы определили миноризацию также на графах с помеченной границей.

4.3. Визуализации графов

Определение 15. Пусть M — множество из t точек в метрическом пространстве X , каждый элемент которого имеет метку, и множество всех меток составляет разбиение множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ больших первых n букв некоторого алфавита, $n \geq t$. Множество M с такими метками будем называть *помеченным множеством* и обозначать через M_l .

В рамках данной статьи мы будем использовать латинский алфавит для меток множества в метрическом пространстве.

Далее всегда будем считать, что у графа, не лежащего в метрическом пространстве, граница помечена списками номеров, а у графа в метрическом пространстве — списками букв.

Пусть граф G_l имеет границу N с граничными вершинами, помеченными номерами от 1 до n , а граф G'_l — его минор с границей из t элементов. Как и в задаче о дереве Штейнера, мы рассматриваем только графы, у которых все вершины степени 1 и 2 граничные, поэтому G_l (а значит, и G'_l) не имеет внутренних вершин степени 1 и 2.

Пусть \mathcal{H} — множество графов в X , а \mathcal{H}_l — множество графов с помеченной границей в X . Пусть $H_l \in \mathcal{H}_l$ имеет границу M_l .

Определение 16. *Визуализацией графа G'_l в X с границей M_l* назовём изоморфизм $\nu: G_l \rightarrow H_l$, такой что $\partial G'_l$ отображается им в $\partial H_l = M_l$, а метки граничных вершин G'_l переходят в метки граничных вершин графа H_l следующим образом: метка $\{i_1, \dots, i_k\}$ переходит в метку $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\}$, где α_{i_k} — i_k -я большая буква в латинском алфавите.

4.4. Сети, их типы и топологии

Определение 17. *Сетью Γ в метрическом пространстве X* называется композиция миноризации $\mu: G_l \rightarrow G'_l$ и визуализации $\nu: G'_l \rightarrow H_l$. Будем говорить, что сеть $\Gamma: G_l \rightarrow H_l$ *соединяет множество M_l* и имеет границу $\partial\Gamma = M_l$, если M_l — граница графа H_l . *Следом сети Γ* назовём граф H , т. е. H_l без меток.

Пусть сеть Γ — композиция миноризации $\mu: G_l \mapsto G'_l$ и визуализации $\nu: G'_l \mapsto H_l$.

Определение 18. Ограничение сети Γ на ребро e графа G_l , т. е. $\Gamma|_e$, называется *ребром сети* Γ , а ограничение Γ на вершину v графа G_l , т. е. $\Gamma|_v$, называется *вершиной сети* Γ .

Замечание 4. *Длиной ребра сети* $\Gamma|_e$ естественно называть длину образа e в X , а длиной всей сети — длину её образа.

Определение 19. Будем говорить, что сеть *стягивает* или *вырождает ребро* ij графа G_l и *склеивает его концы* i и j , если $\Gamma(i) = \Gamma(j)$. Ясно, что при этом ребро сети $\Gamma(ij)$ имеет нулевую длину.

Замечание 5. Границу сети Γ удобно рассматривать как вектор (x_1, \dots, x_n) конфигурационного пространства X^n , где $x_i = \Gamma(v)$, а i — метка вершины v в G_l . При этом x_i — положение точки α_i в X . Только теперь, в отличие от границ графов, точки из границы могут совпадать, так как $\Gamma: G_l \rightarrow H_l$ может склеивать вершины ∂G_l . Таким образом, мы дополнили конфигурационное пространство границ.

Для того чтобы изучать бифуркации сетей, нам необходимо определить, что такое тип и топология сети.

Определение 20. Граф G'_l будем называть *топологией*, а граф G_l — *типом* сети Γ .

Таким образом, тип сети не содержит склеенных вершин, а топология может их содержать. Топология сети однозначно показывает количество элементов в границе и то, какие граничные вершины типа сети склеиваются этой сетью.

4.5. Минимальные сети Штейнера

Расширим теперь понятие минимального дерева Штейнера до минимальной сети Штейнера. В минимальной сети Штейнера можно склеивать граничные вершины.

Рассмотрим помеченное множество точек M_l в метрическом пространстве X (т. е. множество M с метками) и всевозможные сети Γ , соединяющие M_l , т. е. $\Gamma: G_l \rightarrow H_l$, для которых $M_l = \partial H_l$. Обозначим это множество сетей через $\Gamma(M_l)$.

Определение 21. *Минимальной сетью Штейнера* или *кратчайшей сетью, стягивающей* M_l , называется любая сеть из $\Gamma(M_l)$, у которой длина равна $\text{smt}(M)$. Такую сеть будем обозначать через SMN , а множество всех таких сетей для M — через $\text{SMN}(M)$.

Отметим, что след H минимальной сети Штейнера обязан быть минимальным деревом Штейнера, так как длина сети равна длине её образа по определению. Однако для одного и того же графа H возможно бесконечно много сетей различных типов с разным количеством элементов в границе.

4.6. Типы минимальных сетей Штейнера

Напомним, что в рассматриваемых графах нет внутренних вершин степеней 1 и 2 и все эти графы являются деревьями.

Определение 22. *Бинарным* будем называть дерево G_l с граничными вершинами, помеченными номерами от 1 до n , у которого все внутренние вершины имеют степень 3, а граничные — степень 1.

Рассмотрим операцию, обратную стягиванию ребра, — расщепление вершины степени больше 1.

Определение 23. *Расщеплением вершины v степени больше 1 графа G_l или вытягиванием ребра с концом v* называется замена v на две вершины v и v' и вклейка ребра $\{vv'\}$. При этом множество U вершин, которые были смежны с v , делится на два непустых множества, $U = U_1 \sqcup U_2$, так, что вершины из U_2 остаются смежными с v , а вершины из U_1 становятся смежными с v' . Вершина v сохраняет свою метку, если была помеченной, а вершина v' становится внутренней. Расщепление вершины степени больше 1 даёт новый граф, у которого по сравнению с прежним прибавляются одна вершина и одно ребро.

Замечание 6. Для сетей Штейнера нам понадобится только такое расщепление вершины, для которого U_1 содержит ровно две вершины (и, значит, степень v' равна 3), а U_2 — все остальные (U_2 пусто, если степень v была равна 2).

Замечание 7. Если степень вершины v была больше 2, то разбиение $U = U_1 \sqcup U_2$ неоднозначно, а значит, неоднозначно и вытягивание ребра. Иначе вытягивание ребра однозначно.

Определение 24. Пусть вершина v имеет степень 1 и смежна с вершиной w . *Расщеплением граничной вершины v степени 1 с меткой $l(v)$ из $k > 1$ номеров графа G_l или вытягиванием бинарной ветви с k граничными рёбрами из вершины w* называется следующая последовательность действий:

- 1) замена v на k граничных вершин с номерами из списка $l(v)$;
- 2) соединение этих вершин бинарным деревом;
- 3) разбиение любого ребра этого дерева внутренней вершиной и соединение её с w .

Замечание 8. Вытягивание бинарной ветви неоднозначно тогда и только тогда, когда $k > 2$, так как в этом случае бинарное дерево из пункта 2) состоит из более чем одного ребра и в пункте 3) ребро можно выбрать по-разному.

Пусть граф G_l содержит вершины v и v' , а граф G'_l получен из G_l склейкой v и v' в вершину w , причём w граничная, помечена списком из $k > 1$ номеров и её степень d больше 1. Среди вершин v и v' может быть как одна граничная и одна внутренняя, так и две граничные. В первом случае G_l получается из G'_l вытягиванием ребра, а для второго случая введём новую операцию.

Определение 25. *Расщеплением граничной вершины w степени $d > 1$ с меткой $l(w)$ из $k > 1$ номеров графа G'_l на две граничные вершины v*

и v' или удвоением граничной вершины называется замена w на v и v' , вклейка ребра $\{vv'\}$ и разделение $l(w)$ на два непустых списка, которые становятся метками вершин v и v' . При этом множество U вершин, которые были смежны с w , делится на два непустых множества, $U = U_1 \sqcup U_2$, так, что вершины из U_2 становятся смежными с v , а вершины из U_1 — с v' .

Замечание 9. Удвоение граничной вершины неоднозначно всегда, так как можно по-разному делить и метку w , и множество инцидентных ей рёбер.

Теорема 4.1. Любой граф G'_l является минором бинарного дерева G_l . Для нахождения всех возможных G_l достаточно вытягивания ребра, вытягивания бинарной ветви и удвоения граничной вершины.

Доказательство. Если граф G'_l не является бинарным деревом, то G'_l содержит хотя бы одну вершину хотя бы одного из следующих трёх типов:

- 1) граничную вершину степени больше 1 с меткой из одного номера;
- 2) внутреннюю вершину степени больше 3;
- 3) граничную вершину степени больше 1 с меткой из $k > 1$ номеров;
- 4) граничную вершину степени 1, помеченную списком из $k > 1$ номеров.

Вершины третьего типа, как было замечено выше, расщепляются либо вытягиванием ребра, либо удвоением граничной вершины. Прделаем эти операции несколько раз, пока не останутся только вершины первого, второго и третьего типов.

Если теперь есть вершина первого или второго типа, обозначим её через v . Расщепим её, добавив внутреннюю вершину v' . Теперь степень v уменьшилась на 1, а степень v' равна 3. Будем повторять расщепление v , пока её степень не станет нужной. Прделаем эти действия для каждой граничной вершины степени больше 1 и внутренней вершины степени больше 3.

Если после этих действий есть вершины четвёртого типа, то вытянем бинарные ветви из вершин, смежных с ними.

Все возможные способы расщепления вершин дают все возможные графы G_l . \square

Далее под типом минимальной сети Штейнера всегда будем понимать её бинарный тип.

Замечание 10. Из теоремы 4.1 следует, что бинарный тип сети не единственный, если и только если в её топологии есть граничные вершины степени больше 2, внутренние вершины степени больше 3, граничные вершины, помеченные списком из трёх или более букв, или граничные вершины степени больше 2, помеченные списками из двух или более букв.

4.7. Минимальные параметрические сети

Определение 26. Рассмотрим граф G_l с границей, помеченной числами от 1 до n , и помеченное множество $M_l \subset X$, метки которого составляют разбиение

множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ первых n букв латинского алфавита. Число

$$\text{mrp}(M_l, G_l) = \inf_{\Gamma: G_l \rightarrow H_l} |H_l|,$$

где H_l соединяет M_l , а Γ отображает вершины графа G_l в элементы множества M_l корректно, т. е. метка i переходит в метку α_i , называется *длиной минимальной параметрической сети типа G_l* . Сеть $\Gamma: G_l \rightarrow H_l$ типа G_l , для которой $M_l = \partial H_l$, имеющая длину $\text{mrp}(M_l, G_l)$, называется *минимальной параметрической сетью типа G_l для M_l* .

Замечание 11. Из теоремы 4.1 следует, что

$$\text{smt}(M) = \inf_{G_l \in \text{Bin}(n)} \text{mrp}(M_l, G_l),$$

где $\text{Bin}(n)$ — множество всех бинарных типов с границей из n элементов, а n — число точек в границе M .

Утверждение 4.2 [3]. Для любого бинарного типа G_l с n граничными вершинами существует не более одного дерева Штейнера, соединяющего данную границу M_l из n точек плоскости.

5. Обозначение сетей Штейнера с четырёхточечной границей

Лемма 5.1. Пусть G'_l — минор G_l , полученный стягиванием единственного ребра e ; G_l и G'_l — топологии Штейнера. Тогда ребро e граничное. Ребро e может быть любым граничным, только если оно не соединяет две граничные вершины степени 3.

Доказательство. Если e является внутренним ребром или соединяет граничные вершины степени 3, то при вырождении ребра e его концы склеиваются в одну вершину степени 4, но топология Штейнера не содержит вершин степени 4. Значит, e граничное.

Если же один из концов ребра e — граничная вершина степени меньше 3, то сумма степеней на его концах не более 5, при вырождении e его концы склеиваются в граничную вершину степени не больше 3, и значит, получена топология Штейнера. \square

Для обозначения сети Штейнера SN с границей, помеченной A, B, C, D , будем действовать следующим образом. Рассмотрим бинарный тип G_l сети топологии G'_l , обозначим его внутреннее ребро через e . Заметим, что в некоторых минорах G_l ребро e превращается в граничное и при переходе с помощью стягиваний рёбер от таких миноров к G'_l может выродиться. Итак, воспользуемся следующим алгоритмом.

1. Бинарный тип с усами $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ обозначим через $AB-CD$, с усами $\{B, C\}$ и $\{A, D\}$ — через $AD-BC$, с усами $\{A, C\}$ и $\{B, D\}$ — через $AC-BD$. Знак — соответствует ребру e .

2. Если в G'_l выродились некоторые граничные рёбра и не выродилось e , то в обозначении сети точкам, инцидентным вырожденным рёбрам, соответствуют не большие, а маленькие буквы. При этом если в усах одно ребро вырожденное, а другое нет, то маленькие буквы встают рядом с $-$, а большие по краям. Маленькие буквы от одних усов, так же как и большие, упорядочиваются по алфавиту. Например, $ab-cD$ обозначает ломаную из двух звеньев, у которой на одном конце — совпадающие точки A и B , на другом конце — D и звенья сходятся в точке C . Ещё два примера: $Ba-dC$ — ломаная, состоящая из отрезков BA , AD и DC ; $Da-BC$ — дерево, в котором одна внутренняя вершина, а вершина A имеет степень 2.
3. Если в G'_l выродилось и e , то в обозначении сети отсутствует знак черты. Например, $ABdC$ — это звезда из трёх отрезков DA , DB и DC бинарного типа $AB-CD$; эта же звезда, полученная вырождением рёбер в бинарном дереве $AD-BC$, будет обозначаться через $AdBC$. Если в бинарном дереве $AB-CD$ стянуть усы с концами A и B , а также ребро e , то получится сеть $abCD$. Такие обозначения отражают и тип, и топологию сети.

6. Дифференцируемость и непрерывность

Пусть X — связное полное дифференцируемое риманово многообразие, $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, $n > 1$, и $M_t = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, $t \in [0, 1]$, $x_i(0) = x_i$, — некоторая гладкая деформация множества M , т. е. набор гладких кривых $x_i(t)$.

А. О. Ивановым и А. А. Тужиным в [2] были доказаны следующие теоремы о длинах минимального дерева Штейнера и минимальной параметрической сети и сохранении топологии SMT при малых деформациях границы.

Утверждение 6.1 [2]. *Функции $\text{smt}(M_t)$ и $\text{mnp}(M_t, G)$ дифференцируемы при $t = 0+$.*

Замечание 12. В частности, $\text{smt}(M_t)$ и $\text{mnp}(M_t, G)$ являются непрерывными функциями по отношению к деформациям граничного множества M_t .

Утверждение 6.2 [2]. *Если при данном положении граничного множества существует только одно минимальное дерево Штейнера, то при малых деформациях граничного множества его топология сохраняется и остаётся единственной.*

7. Бифуркационные диаграммы

В следующих разделах мы будем работать с бифуркационными диаграммами, разделёнными на страты. Зафиксируем на плоскости все помеченные граничные вершины, кроме одной. Оставшаяся граничная вершина подвижная, множество её возможных положений — вся плоскость (граничные вершины могут попасть в одну точку плоскости). В зависимости от её позиции реализуются

разные топологии и разные бинарные типы SMN. Позицию подвижной граничной вершины будем называть *параметром бифуркационной диаграммы*. Мы будем пользоваться бифуркационными диаграммами сетей Штейнера фиксированного бинарного типа, построенными в [5], для того чтобы построить бифуркационные диаграммы бинарных типов SMN. И то и другое — бифуркационные диаграммы сетей. Дадим необходимые определения.

Определение 27. *Бифуркационная диаграмма сетей* — это разбиение плоскости как множества значений параметра, такое что на каждом элементе разбиения свой набор реализующихся топологий или бинарных типов сетей. По замечанию 12 и утверждениям из [5] она представляет собой плоскость, разбитую на точки и множества, гомеоморфные одномерным и двумерным открытым дискам. *Стратом размерности r* называется r -мерный элемент разбиения. При этом замыкание каждого страта состоит из него самого и конечного числа стратов меньших размерностей.

Определение 28. *Бифуркация* — изменение набора реализующихся топологий или типов при малом изменении параметра (происходит при переходе подвижной граничной вершины из одного страта в другой).

Понятно, что при разных положениях фиксированных граничных вершин могут получиться разные бифуркационные диаграммы сетей, и далее мы это увидим.

Определение 29. *Типом бифуркационной диаграммы* будем называть набор реализующихся для данной конфигурации фиксированных граничных вершин стратов, их взаимное расположение и множество типов или топологий сетей, соответствующих каждому страту.

8. Бифуркации сетей Штейнера одного бинарного типа

Рассмотрим конфигурацию M точек A, B, C, D . Зафиксируем на плоскости три точки A, B, C . Четвёртую точку D будем располагать произвольно на плоскости. Без ограничения общности рассмотрим бинарный тип $AB-CD$. В [5] описывались сети Штейнера типа $AB-CD$, реализующиеся в зависимости от конфигурации границы. Приведём кратко эти результаты, так как они лежат в основе дальнейшего изложения.

Через $\angle A, \angle B$ и $\angle C$ обозначим углы $\triangle ABC$.

Будем говорить, что топология G'_i реализуется на множестве Ω для $M = \{A, B, C, D\}$, если при $D \in \Omega$ для M реализуется дерево Штейнера топологии G'_i .

В [5] было показано, что плоскость стратифицируется так, что на каждом страте (кроме одного двумерного и части его границы, где не реализуется ни од-

на топология типа $AB-CD$) реализуется только одна топология типа $AB-CD$. Это бифуркационная диаграмма деревьев Штейнера типа $AB-CD$.

Также в [5] было показано, что при изменении углов $\angle A$ и $\angle B$ некоторые страты могут исчезать или появляться, т. е. будет меняться тип бифуркационной диаграммы.

9. Бифуркации типов минимальных сетей Штейнера

Фиксируем положение точек A, B, C ; точка D будет занимать произвольное положение на плоскости. При этом будут меняться бинарные типы SMN для M .

Пусть сначала точки A, B, C различны. Из утверждения 6.2 следует, что при этом в каждом двумерном страте бинарный тип один. Их разделяют одномерные страты, при попадании точки D на которые становятся равными длины двух минимальных параметрических сетей, т. е. реализуются два бинарных типа. Одномерные страты пересекаются в точках с тремя типами SMN.

Чтобы определить, какие бинарные типы SMN реализуются при каждой позиции точки D , наложим друг на друга бифуркационные диаграммы разных типов (из [5]) для одной и той же границы и сравним длины сетей Штейнера этих типов (рис. 1).

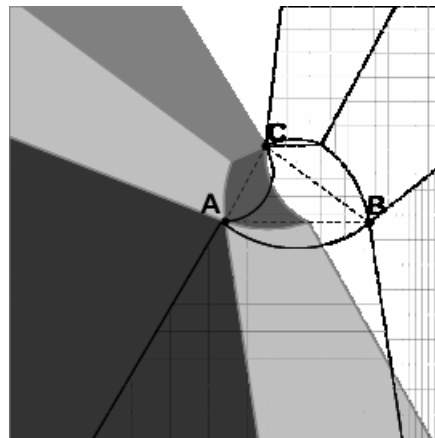


Рис. 1. Наложение бифуркационных диаграмм двух разных типов (один тип обозначен цветом, другой — штриховкой)

Нам достаточно изучить одномерные страты, так как двумерные ими ограничены, а нульмерные являются их границей.

Определение 30. Назовём *smt*-кривой множество положений точки D , для которых длины двух минимальных параметрических сетей равны $\text{smt}(M)$, т. е. одномерный страт на бифуркационной диаграмме типов SMN.

Определение 31. Назовём *smt*-кривую, на которой равны длины типов SMN $AB-CD$ и $AC-BD$, *smt_a-кривой*, *smt*-кривую, на которой равны длины типов SMN $AB-CD$ и $BC-AD$, *smt_b-кривой* и *smt*-кривую, на которой равны длины типов SMN $AC-BD$ и $BC-AD$, *smt_c-кривой*.

Если $\triangle ABC$ содержит точку Штейнера S , то в S пересекаются все три *smt*-кривые, так как при попадании D в S реализуются топологии SMN $ABdC$, $AdBC$ и $ACdB$ (т. е. в S реализуются три бинарных типа SMN, но их следы совпадают). По утверждению 3.6 S — точка пересечения окружностей, описанных около правильных треугольников ABC' , BCA' , CAB' . Если точка D лежит внутри окружности, проходящей через A , B , C' , то $\angle ADB > 120^\circ$, значит, для такой точки D сеть SMN типа $AB-CD$ не реализуется [5]. Аналогично для двух других окружностей. В пересечении двух открытых кругов, ограниченных этими окружностями, возможна только одна топология SMN, та, в которой есть ребро, соединяющее точку D с точкой пересечения границ кругов, являющейся вершиной $\triangle ABC$. Вне таких двух кругов расположена соответствующая *smt*-кривая. Она начинается от точки S и сначала идёт внутри третьего круга. После того как точка D по *smt*-кривой выйдет из $\triangle ABC$, четырёхугольник $ABCD$ становится выпуклым, и для него реализуются только два типа SMN.

Пусть точка D лежит внутри угла $\angle C_bBA_b$, где A_b и C_b — точки, симметричные A и C относительно B . Из [5] следует, что три типа SMN реализуются тогда и только тогда, когда все углы $\angle ABD$, $\angle CBD$ и $\angle ABC$ не больше 120° , т. е. все они равны 120° , а значит, только для $\triangle ABC$ с углом 120° . В этом случае луч с началом в B , составляющий угол 120° с AB и BC , даёт все положения точки D , при которых есть три типа SMN (с одинаковыми следами).

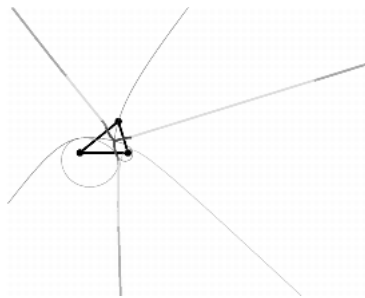
Если $\angle B > 120^\circ$, то *smt_b-кривая* проходит через точку B и продолжается за неё в обоих направлениях.

Будем двигаться по *smt_b-кривой* от точки S или B по направлению к стороне AC . Опираясь на бифуркационные диаграммы нужных бинарных типов, заключаем, что, пока точка D не встретит одномерный страт на какой-нибудь из этих диаграмм, на *smt_b-кривой* равны длины деревьев Штейнера топологий $Ad-BC$ и $AB-dC$. Как только встретится одна (или две) из этих границ, одна топология (или обе топологии) равных по длине сетей Штейнера меняется.

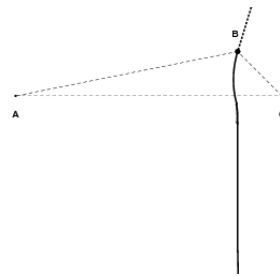
При дальнейшем движении точки D по *smt*-кривой одна топология (или обе топологии) деревьев Штейнера одинаковой длины меняется в момент пересечения одномерного страта хотя бы на одной из бифуркационных диаграмм.

В случае $\angle B > 120^\circ$ при движении точки D по *smt_b-кривой* за точку B вне $\triangle ABC$ меняются сразу две топологии SMN. Здесь равны длины топологий SMN $Ab-CD$ и $AD-bC$ типов $AB-CD$ и $AD-BC$ соответственно. Области этих топологий пересекаются по углу, так как $\angle B > 120^\circ$.

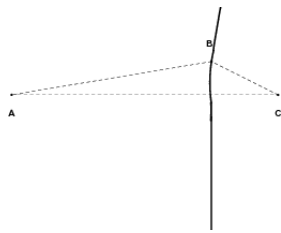
Таким образом, *smt*-кривая склеивается из кусков ветвей кривых, задаваемых различными уравнениями в некоторой системе координат (рис. 2). Из [5] следует, что *smt*-кривые могут пересекаться только в точке *S*.



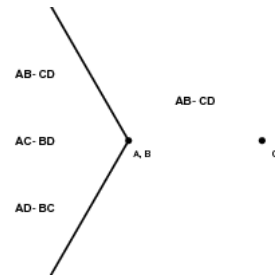
a — все углы $\triangle ABC$ меньше 120° . Плоскость делится на три части, в каждой из которых свой тип SMN. Их разделяют *smt*-кривые с двумя типами, которые пересекаются в точке Штейнера $\triangle ABC$, где реализуются SMN трёх типов (с одинаковыми следами). Тонкие кривые — ветви алгебраических кривых, кусками которых являются части *smt*-кривой, пересекающей нижнюю сторону треугольника



б — $\angle B = 120^\circ$. На луче с началом в точке *B*, составляющем 120° с *AB* и *BC*, реализуются три типа SMN (но один след), на единственной *smt*-кривой — два типа. В двух областях по одному типу



v — $\angle B > 120^\circ$. Реализуются только два типа SMN, плоскость делится на две части единственной *smt*-кривой



г — точки *A* и *B* совпадают. Две части плоскости, в одной из которых один тип SMN, а в другой — три. На разделяющей кривой также три типа. *smt*-кривых нет

Рис. 2. Типы бифуркационных диаграмм типов SMN для четырёх граничных точек, когда вершины *A*, *B*, *C* не в одной точке. Все *smt*-кривые состоят из кусков алгебраических кривых

Теорема 9.1. При четырёх граничных точках любой кусок *smt*-кривой, проходящий по одной паре двумерных стратов на бифуркационных картинах соответствующих фиксированных типов, является частью ветви алгебраической кривой порядка не выше 8.

Доказательство. Каждое из рассматриваемых деревьев Штейнера равно по длине некоторой ломаной (из алгоритма Мелзака). В случае четырёх граничных точек отрезков в ломаных не более трёх: если *ST* содержит две внутренние точки, то его длина равна длине соответствующего отрезка (утверждение 3.7), если одну — длине ломаных из двух звеньев (по утверждениям 3.3 и 3.6). Если же оно не содержит внутренних точек, то, очевидно, это ломаная из трёх звеньев.

Пусть координаты точки *D* в некоторой прямоугольной системе координат — (x, y) .

Лемма 9.2. Координаты всех вершин этой ломаной — линейные функции от координат (x, y) точки *D* в любой прямоугольной системе координат.

Доказательство. В ходе алгоритма Мелзака строятся правильные треугольники на двух уже заданных вершинах (будем их называть *опорными* точками). Если обе опорные точки фиксированные, то координаты построенной вершины не зависят от координат точки *D*. Если для построения правильного треугольника мы используем независимые от *D* опорные точки, то, очевидно, и вновь построенная точка также не зависит от *D*.

Если же одна из опорных точек — это точка *D*, а другая имеет координаты (x_0, y_0) , то координаты построенной вершины *E* — линейные функции от x, y , так как *E* получается из *D* поворотом вокруг точки (x_0, y_0) на 60° , т. е. линейным преобразованием.

Если одна из опорных точек не зависит от *D* и имеет координаты (x_0, y_0) , а вторая имеет линейные по x, y координаты $L_1(x, y), L_2(x, y)$, то координаты построенной вершины будут также линейны по x, y . \square

Замечание 13. Две опорные вершины не могут одновременно зависеть от *D*, так как в алгоритме Мелзака каждая граничная вершина бывает опорной не более одного раза.

Координаты вершины правильного треугольника с двумя другими вершинами — *D* и одной из *A, B, C* — выражаются линейно через x, y . Поэтому квадрат длины любого отрезка в рассматриваемой ломаной — квадратичная функция от x, y . Обозначая многочлены второй степени от переменных x, y через $Q_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots$, многочлены первой степени через $L_i(x, y)$, а константы, не зависящие от точки *D*, через C_i , $i = 1, 2, \dots$, можно записать равенство длин этих деревьев Штейнера следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 \sqrt{Q_1(x, y)} + a_2 \sqrt{Q_2(x, y)} + a_3 C_1 = r, \\ b_1 \sqrt{Q_3(x, y)} + b_2 \sqrt{Q_4(x, y)} + b_3 C_2 = r, \end{cases}$$

где $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots$, равны нулю или единице, причём $a_1 + a_2 \neq 0$ и $b_1 + b_2 \neq 0$, $r = \text{smn}(M)$. Каждое слагаемое в левой части отвечает за своё звено ломаной.

1. Допустим, что все a_i и b_i в этой системе уравнений равны 1, т. е. обе ломаные состоят из трёх звеньев. Тогда эти самые ломаные и есть $\text{SMT}(M)$.

Лемма 9.3. *Для четырёх граничных точек двух SMT , являющихся трёхзвенными ломаными, не бывает.*

Доказательство. Пусть они существуют. Без ограничения общности считаем, что первая ломаная — дерево Штейнера $Ab-cD$. Тогда все углы при вершинах A и D меньше 120° , и вторая ломаная может быть только $Ac-bD$. Но $\angle ACB$ также меньше 120° , поэтому второе дерево Штейнера, являющееся ломаной с тремя звеньями, не может существовать. \square

Значит, хотя бы один из шести коэффициентов a_i, b_i равен нулю.

2. Пусть равен нулю ровно один из коэффициентов a_i, b_i . Тогда оба SMT равны по длине ломаным, у одной из них три звена и вершина D степени 2, а другая состоит из двух звеньев. Без ограничения общности считаем, что первое SMT — это $Ad-bC$. Его тип $AD-BC$. Значит, второе SMT имеет тип $AB-CD$ или $AC-BD$.

Лемма 9.4. *Если точки четырёхточечного множества $M = \{A, B, C, D\}$ соединяются трёхзвенной ломаной L в последовательности A, B, C, D с углами между звеньями не меньше 120° и точками A и D по разные стороны от прямой, проходящей через B и C , то L является единственным SMT , соединяющим M .*

Доказательство. По лемме 9.3 второго SMT , являющегося ломаной из трёх звеньев, быть не может.

Значит, если существует второе SMT для M , то оно должно иметь хотя бы одну внутреннюю вершину O , которая лежит внутри или на стороне $\text{conv}(ABCD)$ (утверждение 3.2).

Допустим, что внутренняя точка O единственна. По утверждению 3.3 точка O должна быть также внутренней вершиной в $\text{SMT}(\triangle ABC)$, $\text{SMT}(\triangle BCD)$, $\text{SMT}(\triangle BDA)$ или $\text{SMT}(\triangle CDA)$. Но в каждом из этих треугольников есть угол, который больше или равен 120° , поэтому ни один из них не может содержать внутренней вершины (утверждение 3.5). Противоречие.

Пусть теперь второе SMT содержит две внутренние точки. По утверждению 3.8 точки A, B, C, D образуют выпуклый четырёхугольник. Его диагонали — AD и BC , значит, SMT типа $AD-BC$ не реализуется. Единственный оставшийся тип — $AC-BD$. Попробуем построить SMT с двумя внутренними точками типа $AC-BD$ по алгоритму Мелзака. Отрезок AC из точки B виден под углом больше 120° , но внутренняя точка O , смежная с A и C , лежит в $\text{conv}(M)$, поэтому O обязана лежать в $\triangle BCD$. Поэтому $\angle BOD \geq 120^\circ$, и вторую внутреннюю точку SMT мы построить не сможем. \square

Замечание 14. Если в лемме 9.4 убрать условие, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC , то ломаная с углами не меньше 120° может не быть SMT.

Пример. Возьмём прямоугольный $\triangle ABC$ с прямым углом $\angle C$ и углом 60° при вершине B и отрезем от него правильный треугольник с вершиной B отрезком DE так, что D лежит на AB , а E — на BC , причём сторона отрезанного треугольника $\varepsilon < AB - AC$. Тогда $ADEC$ — ломаная с углами 120° , длина которой $AD + DE + EC > DE + EC + CA$. Но $DECA$ — ломаная, у которой один угол равен 90° , значит, SMT для $ABCD$ не является ломаной.

Следствие 9.5. Если M соединяется двумя SMT, одно из которых — ломаная с тремя звеньями, то M — выпуклый или нестрого выпуклый четырёхугольник.

Итак, по следствию 9.5, $ADBC$ — выпуклый или нестрого выпуклый четырёхугольник. Значит, отрезки AB и CD пересекаются, поэтому ST типа $AB-CD$ не реализуется. Поэтому второе SMT имеет тип $AC-BD$. Так как оно содержит одну внутреннюю точку, то оно должно содержать либо отрезок AC , либо отрезок BD . Однако AC оно содержать не может, так как и в $\triangle ABD$, и в $\triangle CBD$ есть углы не меньше 120° . Значит, оно обязательно содержит отрезок BD . Приравняем длины двух SMT:

$$AD + DB + BC = BD + \sqrt{Q_3(x, y)},$$

т. е.

$$\sqrt{Q_1(x, y)} + C_1 = \sqrt{Q_3(x, y)}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$Q_1(x, y) + C_1^2 + 2C_1\sqrt{Q_1(x, y)} = Q_3(x, y),$$

откуда следует, что

$$4C_1^2Q_1(x, y) = (Q_3(x, y) - Q_1(x, y) - C_1^2)^2,$$

а это уравнение алгебраической кривой не выше четвёртого порядка.

3. Пусть теперь $a_3 = b_3 = 0$, а a_1, a_2, b_1, b_2 не равны нулю.

Тогда длины обоих SMT вычисляются через длины ломаных, у которых D — вершина степени 2, и обе состоят из двух звеньев. Без ограничения общности считаем, что первое SMT — $Ad-BC$, а второе — $AC-dB$. Тогда длина первого — $AD + DA'$, а второго — $BD + DB'$, где A' и B' — вершины правильных треугольников из утверждения 3.6.

Из утверждения 3.6 следует, что отрезки AA' и BB' пересекаются в точке O под углом 60° и $AA' = BB'$. Так как при гомотетии тип бифуркационной диаграммы не меняется, положим $AA' = BB' = 1$. Найдём геометрическое место точек D , таких что $AD + DA' = BD + DB'$, — кривую $(A, A'; B, B')$.

Кривая $(A, A'; B, B')$ — это множество точек пересечения пар эллипсов с фокусами A, A' и B, B' и большими осями, равными между собой. Она непрерывна, так как параметр $r = AD + DA' = BD + DB'$ меняется непрерывно от 1 до $+\infty$. Очевидно, точка $O = AA' \cap BB'$ принадлежит $(A, A'; B, B')$.

Лемма 9.6. *В точке O кривая $(A, A'; B, B')$ имеет самопересечение.*

Доказательство. Рассмотрим пару эллипсов, заданных уравнениями $AD + DA' = AA' + \varepsilon$ и $BD + DB' = AA' + \varepsilon$, где ε достаточно мало. Эти эллипсы пересекаются в четырёх точках, лежащих в разных частях, на которые плоскость делится прямыми, содержащими оси эллипсов. При $\varepsilon \rightarrow 0$ все четыре точки пересечения (а они принадлежат кривой $(A, A'; B, B')$) переходят в точку O , что и означает утверждение леммы. \square

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке O и осью абсцисс, направленной по биссектрисе угла $\angle A'OB = 60^\circ$ внутрь этого угла, и осью ординат, направленной внутрь $\angle A'OB'$. Обозначим через (x_P, y_P) координаты точки $P \neq D$; координаты точки D будем обозначать через (x, y) .

Возьмём число $r \in [1; \text{inf})$. Тогда, очевидно, искомую кривую можно представить как множество решений следующей системы алгебраических уравнений при каждом r :

$$\begin{cases} \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{r} - \sqrt{(x - x_{A'})^2 + (y - y_{A'})^2}, \\ \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} = \sqrt{r} - \sqrt{(x - x_{B'})^2 + (y - y_{B'})^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим расстояние OB' через a . Тогда

$$\begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = (1 - a) \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Пусть (α, β) — вектор длины $|OA' - OB'|$, параллельный отрезку OA' , т. е. $\alpha = \sqrt{3}\beta$. Тогда координаты точек A, A' можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = (1 - a) \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Подставим координаты точек A, A', B, B' в систему уравнений (1) и после преобразований каждого уравнения (нескольких возведений в квадрат), учитывая равенство $\alpha = \sqrt{3}\beta$, получим следующую систему как следствие исходной:

$$\begin{cases} r^2 + (1 - 2(a + 2\beta) + \sqrt{3}x + y)^2 = \\ = 4r \left(x^2 + y^2 + (a + 2\beta)^2 + \frac{1}{2}(1 - 2(a + 2\beta))(1 + \sqrt{3}x + y) \right), \\ r^2 + (1 - 2a - \sqrt{3}x + y)^2 = \\ = 4r \left(x^2 + y^2 + a^2 + \frac{1}{2}(1 - 2a)(1 - \sqrt{3}x + y) \right). \end{cases}$$

Пусть $t = r - 1 \in [0; \text{inf})$. Преобразуем полученную систему, взяв в качестве первого уравнения новой системы разность двух прежних, а второе оставив без изменений:

$$\begin{cases} t[(2\beta + 2a - 1)(2\beta - \sqrt{3}x) - 2\beta y] = \sqrt{3}xy, \\ t^2 - 2t[(1 - \sqrt{3}x + y)(1 - 2a) + 2(x^2 + y^2 + a^2) - 1] = (x + \sqrt{3}y)^2. \end{cases}$$

Далее через $L_i(x, y)$ будем обозначать линейные функции от переменных x, y , а через $Q_i(x, y)$ квадратичные, $i = 1, 2, 3$. Перепишем систему в этих обозначениях:

$$\begin{cases} tL_1(x, y) = Q_1(x, y), \\ t^2 - 2tQ_2(x, y) = Q_3(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

Из первого уравнения видим, что если $L_1(x, y) = 0$, то и $Q_1(x, y) = 0$. Иначе подставим $t = Q_1(x, y)/L_1(x, y)$ во второе уравнение и получим, домножив его на $L_1^2(x, y)$, что

$$Q_1^2(x, y) - 2Q_1(x, y)Q_2(x, y)L_1(x, y) = Q_3(x, y)L_1^2(x, y). \quad (3)$$

Но из этого уравнения также получается, что если $L_1(x, y) = 0$, то и $Q_1(x, y) = 0$. Значит, оно равносильно системе (2).

Мы получили уравнение пятого порядка, задающее на плоскости множество, подмножеством которого является кривая $(A, A'; B, B')$, так как все проделанные преобразования не уменьшали множества решений системы. А значит, рассматриваемая часть smt-кривой является частью алгебраической кривой порядка не выше пяти.

4. Остаётся случай, когда одно из SMT содержит две внутренние точки. Тогда равенство длин SMT запишется следующим образом:

$$\sqrt{Q_1(x, y)} = b_1\sqrt{Q_3(x, y)} + b_2\sqrt{Q_4(x, y)} + b_3C_2.$$

Переместив константу в левую часть уравнения и возведя обе части в квадрат, получим

$$\begin{aligned} Q_1(x, y) + b_3^2C_2^2 - 2b_3C_2\sqrt{Q_1(x, y)} = \\ = 2b_1b_2\sqrt{Q_3(x, y)Q_4(x, y)} + b_1^2Q_3(x, y) + b_2^2Q_4(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} (Q_1(x, y) - b_1^2Q_3(x, y) - b_2^2Q_4(x, y) + b_3^2C_2^2)^2 = \\ = 4b_3^2C_2^2Q_1(x, y) + 4b_1^2b_2^2Q_3(x, y)Q_4(x, y) + 8b_1b_2b_3C_2\sqrt{Q_1(x, y)Q_2(x, y)Q_3(x, y)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$64b_1^2b_2^2b_3^2C_2^2Q_1(x, y)Q_2(x, y)Q_3(x, y) = P^8(x, y),$$

где $P^8(x, y)$ — многочлен восьмой степени. Если хотя бы один из коэффициентов b_1, b_2, b_3 равен нулю, то потребуется меньше возведений в квадрат и получится уравнение не выше четвёртой степени.

Значит, искомая кривая — алгебраическая кривая не выше восьмого порядка, причём восьмой порядок достигается, только если одно SMT с двумя внутренними точками, а второе — ломаная из трёх звеньев.

Теорема доказана. \square

Если какие-то из точек A, B, C совпадают, то получаются другие типы бифуркационных диаграмм.

Теорема 9.7. *Если точки A и B совпали, а C с ними не совпала, то бифуркационная диаграмма имеет тип, изображённый на рис. 2, г, и содержит кривую и область, на которых реализуются три типа SMN, и область с одним типом SMN.*

Доказательство. Если D совпадает с A и B , то по теореме 4.1 эту вершину следа SMN можно расщепить тремя способами вытягивания бинарной ветви, значит, реализуется три типа SMN.

Если $\angle DAC = \angle ABC \geq 120^\circ$, то след SMN для $\{A, B, C, D\}$ — ломаная из двух звеньев, у которой вершина степени 2 помечена двумя буквами. По теореме 4.1 эту вершину можно расщепить тремя способами (два раздвоения граничной вершины и одно вытягивание бинарной ветви), значит, для таких точек D реализуется три типа SMN.

Иначе в следе SMN вершина с меткой A, B имеет степень 1 и расщепление единственно. След содержит три граничные вершины, соединяемые SMT единственным образом. Значит, тип SMN однозначен: $AB-CD$. \square

Теорема 9.8. *Если совпали A, B, C , то бифуркационная диаграмма состоит из одного страта, на котором реализуются все три типа SMN.*

Доказательство. Бинарную ветвь с вершинами A, B, C можно вытянуть тремя различными способами, значит, и типа три при любом положении точки D . \square

9.1. Бифуркации бинарных типов SMN для любого числа граничных точек

Зафиксируем $n - 1$ точку, а одну точку D будем двигать по плоскости; обозначим это множество граничных точек через M^n . Аналогично тому как это делалось для четырёх точек, накладывая друг на друга бифуркационные диаграммы для разных бинарных типов, можно получить бифуркационные диаграммы типов, на которых показано, как меняются бинарные типы SMN для M_n при изменении положения одной граничной точки. Будем обозначать бифуркационные диаграммы бинарных типов для n граничных точек через BD_n . Обобщим понятие smt-кривой.

Определение 32. Будем называть smt^q -стратом страт на бифуркационной диаграмме BD_n , на котором реализуется q минимальных сетей Штейнера.

Определение 33. Будем называть *smt-кривой* одномерный smp^2 -страт на BD_n . Это определение согласуется с прежним определением *smt-кривой*, однако теперь его можно использовать для любого количества граничных точек.

Как мы уже видели, BD_4 бывает следующих типов:

- 1) три двумерных smp^1 -страта, три одномерных smp^2 -страта и один нульмерный smp^3 -страт; получается при условии, что граничные фиксированные точки образуют треугольник с углами меньше 120° ;
- 2) два двумерных smp^1 -страта и один одномерный smp^2 -страт; получается при условии, что граничные фиксированные точки образуют треугольник с углом больше 120° ;
- 3) два двумерных smp^1 -страта, один одномерный smp^2 -страт, один одномерный smp^3 -страт и один нульмерный smp^3 -страт; получается при условии, что граничные фиксированные точки образуют треугольник с углом 120° ;
- 4) один двумерный smp^1 -страт, один двумерный smp^3 -страт и один одномерный smp^3 -страт; получается при условии, что ровно две фиксированные граничные точки совпали;
- 5) один двумерный smp^3 -страт; получается при условии, что все три фиксированные точки совпали.

Теорема 9.9. Если при $n > 3$ среди $n - 1$ фиксированных граничных вершин $k > 1$ попали в одну точку, то BD_n содержит двумерные страты, на которых реализуются несколько типов SMN, имеющих один и тот же след.

Доказательство. Если $k = 2$, то подвижную вершину можно расположить так, что совпадающие точки образуют вершину степени 2 в следе SMN, и по теореме 4.1 её можно расщепить по-разному. Если $k > 2$, то из вершины, склеенной из этих k вершин, можно вытянуть бинарную ветвь несколькими способами. Из непрерывности длины минимальной параметрической сети следует, что нужные положения подвижной граничной вершины образуют двумерный страт. \square

Теорема 9.10. При $n > 4$ бифуркационная диаграмма BD_n может содержать двумерные smp^2 -страты с разными следами SMN.

Доказательство. Докажем, что при $n \geq 5$ в BD_n возможны двумерные smp^2 -страты с разными следами SMN. Так будет тогда, когда среди $n - 1$ фиксированных точек одна лежит на smp^2 -страте на BD_{n-1} и существует вершина v , имеющая степень 1 в обоих деревьях, длины которых равны на этом smp^2 -страте. Тогда n -ю граничную точку можно добавить так, что v станет вершиной степени 2 в каждом из новых деревьев Штейнера. Из непрерывности длины минимальной параметрической сети следует, что такие положения n -й точки образуют область, которая и будет искомым smp^2 -стратом. \square

Пример. Построим для вершин квадрата два различных минимальных дерева Штейнера. Возьмём любую вершину v квадрата и продолжим диагональ квадрата за v . Возьмём произвольную точку k на построенном луче и соединим k с v . Объединение каждого из SMT для исходных четырёх точек и отрезка kv

даёт SMT для всех пяти точек. Множество положений точки k в пределах угла, стороны которого образуют углы не менее 120° с рёбрами SMT, входящими в v , даёт искомый двумерный страт.

Теорема 9.11. *При любом n любой кусок smt-кривой, проходящий по паре областей на соответствующих бифуркационных картинах, является частью ветви алгебраической кривой порядка не выше 16.*

Доказательство. По алгоритму Мелзака каждое дерево Штейнера по длине равно некоторой ломаной. Пусть на рассматриваемом одномерном smt^2 -страте (обозначим его через s) равны длины деревьев ST_1 и ST_2 . Пусть ST_1 равно по длине ломаной с вершинами A_1, \dots, A_{k_1} , а ST_2 — ломаной с вершинами B_1, \dots, B_{k_2} . При этом по замечанию 13 только одна A_i и одна B_j зависят от D , обозначим их через A_0 и B_0 .

По лемме 9.2 координаты A_0 и B_0 — линейные функции от координат x, y точки D . Точки A_0 и B_0 являются концами не более чем двух звеньев в своих ломаных, и длины этих звеньев являются корнями из квадратичных функций от x, y , обозначим их через $\sqrt{Q_1(x, y)}$, $\sqrt{Q_2(x, y)}$ для ST_1 и $\sqrt{Q_3(x, y)}$, $\sqrt{Q_4(x, y)}$ для ST_2 (квадратичные функции тождественно равны нулю, если соответствующие звенья отсутствуют). Суммы длин остальных звеньев каждой ломаной не зависят от x, y , обозначим их через C_1 и C_2 для ST_1 и ST_2 соответственно. Получаем систему уравнений для smt-кривой:

$$\begin{cases} \sqrt{Q_1(x, y)} + \sqrt{Q_2(x, y)} + C_1 = r, \\ \sqrt{Q_3(x, y)} + \sqrt{Q_4(x, y)} + C_2 = r, \end{cases}$$

где r — длина каждой ломаной. Преобразуя уравнения так же, как в теореме 9.1, получаем систему из двух уравнений порядка 4 от трёх неизвестных, задающую в трёхмерном пространстве либо поверхность (тогда это не smt-кривая), либо кривую порядка не выше 16. Проекция этой кривой на плоскость (x, y) является кривой, очевидно, также порядка не выше 16. \square

Следствие 9.12. *Каждая smt-кривая кусочно-дифференцируема.*

Литература

- [1] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
- [2] Иванов А. О., Тужилин А. А. Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 6. — С. 31—50.
- [3] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [4] Карпунин Г. А. Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщённая проблема Штейнера // Матем. сб. — 2000. — Т. 191, № 5. — С. 64—90.

- [5] Степанова Е. И. Бифуркации топологий деревьев Штейнера на плоскости // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2016. — Т. 21, № 6. — С. 183–204.
- [6] Bopp K. Über das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten: Thesis. — Univ. Göttingen, 1879.
- [7] Brazil M., Graham R. L., Thomas D., Zachariasen M. On the history of the Euclidean Steiner tree problem // *Arch. History Exact Sci.* — 2014. — Vol. 68, no. 3. — P. 327–354.
- [8] Cockayne E. J., Schiller D. G. Computation of Steiner minimal trees // *Combinatorics / D. J. A. Welsh, D. R. Woodal, eds.* — Inst. Math. Appl., 1972. — P. 53–71.
- [9] Courant R., Robbins H. *What is mathematics?* — Oxford Univ. Press, 1941.
- [10] Du D. Z., Hwang F. K., Song G. D., Ting G. Y. Steiner minimal trees on sets of four points // *Discrete Comput. Geom.* — 1987. — Vol. 2. — P. 401–414.
- [11] De Fermat P. *Oeuvres*. Vol. 1. — Paris: 1891.
- [12] Gergonne J. D. Solutions purement géométriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problèmes analogues // *Ann. Math. Pures Appl.* — 1811. — Vol. 1. — P. 375–384.
- [13] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // *SIAM J. Appl. Math.* — 1968. — Vol. 16, no. 1. — P. 1–29.
- [14] Hwang F. K., Richards D. S., Winter P. The Steiner Tree Problem // *Ann. Discrete Math.* — 1992. — Vol. 53.
- [15] Jarník V., Kössler O. O minimálních grafech obsahujících n daných bodů // *Čas. Pěst. Mat. Fys.* — 1934. — Vol. 63, no. 8. — P. 223–235.
- [16] Melzak Z. A. On the problem of Steiner // *Can. Math. Bull.* — 1961. — Vol. 4. — P. 143–148.
- [17] Ollerenshaw K. Minimal networks linking four points in a plane // *Inst. Math. Appl.* — 1978. — Vol. 15. — P. 208–211.
- [18] Pollak H. O. Some remarks on the Steiner problem // *J. Combin. Theor., Ser. A.* — 1978. — Vol. 24. — P. 278–295.
- [19] Weng J. F. Variational approach and Steiner minimal trees on four points // *Discrete Math.* — 1994. — Vol. 132, no. 1-3. — P. 349–362.