Бифуркации минимальных заполнений для четырёх точек евклидовой плоскости

Е. И. СТЕПАНОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ekfila@gmail.com

УДК 514.77+519.176+515.165.7

Ключевые слова: минимальные основные деревья, минимальные заполнения конечных метрических пространств, проблема Штейнера, отношение Штейнера, бифуркационная диаграмма, метрическая геометрия, дискретная оптимизация.

Аннотация

Минимальные заполнения конечного метрического пространства — взвешенные графы минимального возможного веса, затягивающие это пространство так, что вес любого пути в них не меньше расстояния между его концами. В данной работе построены бифуркационные диаграммы типов и веса минимальных заполнений для четырёх точек евклидовой плоскости.

Abstract

E. I. Stepanova, Bifurcations of minimal fillings for four points on the Euclidean plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 253—261.

A minimal filling of a finite metric space is a weighted graph of a minimal possible weight spanning this space so that the weight of any path in it is not less than the distance between its ends. Bifurcation diagrams of types and the weight of minimal fillings for four points of the Euclidean plane are built in the present work.

1. Введение

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства была поставлена А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [5]. Она возникла на стыке двух известных проблем: проблемы Штейнера о кратчайшей сети (подробно см. в [4] или [7]) и проблемы Громова о минимальном заполнении риманова многообразия. Задача состоит в поиске взвешенного графа наименьшего веса, затягивающего данное конечное метрическое пространство так, что для любых двух точек этого метрического пространства вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве.

Введём необходимые определения.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 6, с. 253—261.

1.1. Графы с границей

Напомним, что *граф* G — это пара (V, E), состоящая из конечного непустого множества V, элементы которого называются *вершинами* графа G, и множества E, состоящего из некоторых неупорядоченных пар различных вершин из V, эти пары называются *рёбрами* графа G. Чтобы подчеркнуть принадлежность вершин и рёбер графу G, будем обозначать множества V и E через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Определения других элементарных понятий теории графов содержатся, например, в [2].

Определение 1. Пусть M — произвольное конечное множество и G — связный граф, для которого $V(G) \supset M$, тогда будем говорить, что *граф G соединяет M*. Множество M назовём множеством *граничных вершин* (*границей*) графа G, а множество $V(G) \setminus M$ — множеством его *внутренних вершин*. Рёбра, инцидентные хотя бы одной граничной вершине, также будем называть *граничными*; остальные рёбра назовём *внутренними*. Путь в графе G, соединяющий граничные вершины графа G, будем называть *граничным*.

Определение 2. Если $v \in V(G)$ — внутренняя вершина степени $k+1 \geqslant 3$ в графе G, смежная с k граничными вершинами $w_1, \ldots, w_k$ степени 1, то множество вершин $\{w_1, \ldots, w_k\}$, а также множество рёбер $\{vw_1, \ldots, vw_k\}$, назовём *усами* графа G. Вершины $w_1, \ldots, w_k$ будем называть *концами усов*.

1.2. Минимальные заполнения

Определение 3. Пусть G — произвольный граф, $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ — некоторое отображение в неотрицательные вещественные числа $\mathbb{R}_+$, называемое *весовой функцией*. Пара (G, ω) называется *взвешенным графом*, число $\omega(e)$ для каждого ребра $e \in E(G)$ — *весом ребра* e, а величина

$$\omega(G) = \sum_{e \in E(G)} \omega(e) \text{ —}$$

весом графа G. Если H — произвольный подграф в G, то число

$$\omega(H) = \sum_{e \in E(H)} \omega(e)$$

называется *весом подграфа* H. В частности, определён *вес* любого *пути* во взвешенном графе (G, ω).

Определение 4. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное псевдометрическое пространство (т. е. расстояния между различными точками могут равняться нулю) и (G, ω) — взвешенный граф, соединяющий M. Такой граф называется *заполнением пространства* $\mathcal{M}$, если для любого пути γ, соединяющего вершины v и w из M, выполняется $\omega(\gamma) \geqslant \rho(v, w)$. Граф G назовём *типом заполнения* (G, ω). Обозначим через $F(\mathcal{M})$ множество всех заполнений пространства $\mathcal{M}$.

Определение 5. Величина

$$\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \inf_{(G,\omega)\in F(\mathcal{M})} \omega(G)$$

называется *наименьшим весом заполнений пространства* $\mathcal{M}$, а каждое заполнение (G,ω) пространства $\mathcal{M}$, для которого $\omega(G) = \mathrm{mf}(\mathcal{M})$, — *минимальным заполнением пространства* $\mathcal{M}$. Минимальное заполнение будем обозначать через MF.

Определение 6. Если мы фиксируем тип G заполнений $\mathcal{M}$ и ищем $\inf\omega(G)$ только по заполнениям типа G, то полученное число будем называть *весом минимального параметрического заполнения типа* G и обозначать через $\mathrm{mpf}(\mathcal{M},G)$. Любое заполнение типа G, имеющее вес $\mathrm{mpf}(\mathcal{M},G)$, называется *минимальным параметрическим заполнением типа* G.

Замечание 1. Очевидно, что

$$\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \min_G \mathrm{mpf}(\mathcal{M},G),$$

где минимум берётся по всевозможным графам, соединяющим M.

Если (X,ρ) — произвольное метрическое пространство, то n точек в X (быть может, среди них есть совпадающие) можно рассматривать как конечное псевдометрическое пространство, если взять ограничение метрики ρ. Множество этих n точек обозначим через M и будем называть *конфигурацией*. Тогда для псевдометрического пространства (M,ρ) можно рассмотреть минимальные заполнения и минимальные параметрические заполнения. В этом случае будем говорить, что имеются минимальные заполнения и минимальные параметрические заполнения для конфигурации M. Эти графы не будут лежать в X, так как ни одна вершина, отличная от элемента M, не принадлежит X. Вес минимального заполнения конфигурации M будем обозначать через $\mathrm{mf}(M)$, а вес минимального параметрического заполнения типа G — через $\mathrm{mpf}(M,G)$.

Утверждение 1.1 [5]. *Каждое конечное псевдометрическое пространство имеет минимальное заполнение.*

Следствие 1.2. *Любая конечная конфигурация евклидовой плоскости имеет минимальное заполнение.*

Если минимальное заполнение содержит цикл, то все рёбра в цикле имеют нулевой вес, так как, убрав ребро ненулевого веса, мы получили бы заполнение меньшего веса. Таким образом, можно считать, что каждое минимальное заполнение является деревом (из каждого цикла можно убрать любое ребро, от этого вес не поменяется).

В каждом минимальном заполнении можно убирать и добавлять рёбра нулевого веса, от этого вес его не изменится. Профакторизуем MF по рёбрам нулевого веса, а затем вклеим другие рёбра нулевого веса так, чтобы все вершины степени больше трёх расщепились до вершин степени 3. Теперь мы получили более конкретный вид дерева минимального заполнения.

Определение 7. *Бинарным деревом* будем называть дерево, в котором все граничные вершины имеют степень 1, а внутренние — 3.

Таким образом, минимальное заполнение мы будем считать бинарным деревом, и для выбора его среди минимальных параметрических заполнений достаточно рассматривать только бинарные типы. Далее все минимальные параметрические заполнения мы тоже будем считать бинарными деревьями.

Утверждение 1.3 [5]. *Минимальное заполнение и минимальные параметрические заполнения можно считать бинарными деревьями, при этом вес каждых усов в минимальном заполнении равен расстоянию между граничными точками, являющимися концами этих усов.*

Обозначим n-точечную конфигурацию через M_n. Пусть p_i, где $i = 1, 2, \ldots, n,$ — элементы M_n, ρ_{ij} — расстояние между точками p_i и p_j. В [5] найдены удобные формулы веса минимальных заполнений для трёхточечных и четырёхточечных конфигураций, которые представлены в следующих двух утверждениях.

Утверждение 1.4. *Вес минимального заполнения трёхточечной конфигурации можно вычислить по формуле*

$$\mathrm{mf}(M_3) = \frac{\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31}}{2}.$$

Утверждение 1.5. *Вес минимального заполнения четырёхточечной конфигурации можно вычислить по формуле*

$$\mathrm{mf}(M_4) = \frac{1}{2}(\min\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\} + \\ + \max\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\}).$$

Если минимум в этой формуле равен $\rho_{ij} + \rho_{kl}$, то минимальное заполнение представляет собой бинарное дерево, усы которого — $\{p_i, p_j\}$ и $\{p_k, p_l\}$.

Следствие 1.6. *Вес минимального заполнения для выпуклого четырёхугольника на евклидовой плоскости равен полусумме длин его диагоналей и двух противоположных сторон, сумма длин которых минимальна.*

Следствие 1.7. *Вес минимального заполнения четырёх точек, одна из которых лежит внутри выпуклой оболочки трёх других, равен полупериметру того из трёх невыпуклых четырёхугольников, чей периметр средний.*

Для большего числа точек в произвольном псевдометрическом пространстве вес минимального заполнения можно вычислить по более сложной формуле, найденной А. Ю. Ерёминым в [3].

1.3. Дифференцируемость и непрерывность

Пусть X — связное полное риманово многообразие, $M = \{p_1, \ldots, p_n\}$ — n-точечная конфигурация в X и $M_t = \{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$, $t \in [0, 1]$, $p_i(0) = p_i$, — некоторая гладкая деформация множества M, т. е. набор гладких кривых $p_i(t)$.

Утверждение 1.8 [6]. *Функции* $\mathrm{mpf}(M_t, G)$ *и* $\mathrm{mf}(M_t)$ *дифференцируемы при* $t = 0+$.

Следствие 1.9. *Функции* $\mathrm{mpf}(M, G)$ *и* $\mathrm{mf}(M)$ *являются непрерывными по отношению к гладким деформациям граничного множества* M.

Следствие 1.10. *Если при данном положении граничного множества существует только одно минимальное заполнение, то при малых деформациях граничного множества его тип сохраняется и остаётся единственным.*

Автор благодарит А. О. Иванова и А. А. Тужилина за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (соглашение № 075-02-2018-867 по гранту НШ-6399.2018.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-01-00378-а).

2. Бифуркации минимальных заполнений для четырёхточечных границ плоскости

Будем рассматривать $\{A, B, C, D\}$ — всевозможные конфигурации на плоскости, состоящие из четырёх точек.

Фиксируем точки A, B, C. Посмотрим, как будут меняться свойства минимальных заполнений, затягивающих границу $\{A, B, C, D\}$, в зависимости от положения точки D — *параметра бифуркационной диаграммы*. В качестве свойств MF мы будем рассматривать его тип и формулу веса.

Определение 8. *Бифуркационная диаграмма свойства* MF — это такое разбиение плоскости как множества значений параметра, что на каждом элементе разбиения имеется своя реализация рассматриваемого свойства MF. По следствию 1.10 и формуле веса минимального заполнения из [3] (частные случаи — утверждения 1.4 и 1.5) она представляет собой плоскость, разбитую на точки и одномерные и двумерные открытые множества. *Стратом размерности* r называется r-мерный элемент разбиения. При этом замыкание каждого страта состоит из него самого и конечного числа стратов меньших размерностей.

Бифуркация — изменение реализации свойства (набора типов MF или формулы веса) при малом изменении параметра (происходит при переходе подвижной граничной вершины из одного страта в другой).

Пусть сначала точки A, B, C различны и не лежат на одной прямой.

Существуют три различных четырёхугольника (не обязательно простых) с вершинами A, B, C, D. По утверждению 1.5 вес минимального заполнения равен полупериметру того из них, чей периметр не больше и не меньше остальных. Найдём положения точки D, в которых таких четырёхугольников два (их периметры равны).

Введём следующие обозначения:

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c, \quad AD = x, \quad BD = y, \quad CD = z.$$

Сначала найдём геометрическое место точек D, таких что

$$a + b + x + y = a + c + x + z.$$

Переписывая равенство, получаем, что

$$b - c = z - y,$$

а это ветвь гиперболы с фокусами B и C, проходящая через точку A (если $b = c$, то она вырождается в прямую). Назовём её mf_a-*кривой*.

Точно так же находим положения точки D, в которых равны периметры других пар четырёхугольников. Это ветви гипербол с фокусами в двух вершинах треугольника, проходящие через третью вершину, назовём их mf_b- и mf_c-*кривыми*. Если неважно, какая из трёх кривых имеется в виду, будем говорить просто о mf-*кривой*.

Построенные гиперболы (имеющие по две ветви) называются *гиперболами Содди* [10]. Точку пересечения ветвей, проходящих через вершины треугольника, называют *точкой равного обхода* ($X(176)$ [9]), а точку пересечения других ветвей— *изопериметрическим центром* ($X(175)$ [9]). Встречается также термин «*точки Содди*» [1, 9]. В [9] утверждается, что впервые эти точки были рассмотрены Э. Лемуаном в 1890 году.

В 2007 году в [8] было найдено необходимое и достаточное условие того, что для $\triangle ABC$ существует две точки равного обхода: $\operatorname{tg} A/2 + \operatorname{tg} B/2 + \operatorname{tg} C/2 > 2$. Одна из этих точек всегда существует и лежит внутри $\triangle ABC$, а другая, если существует, лежит вне него.

Замечание 2. Очевидно, точки равного обхода — это точки равенства трёх минимальных параметрических заполнений.

Итак, mf-кривые делят плоскость $\triangle ABC$ на несколько открытых областей. Какой тип реализуется в каждой области?

Будем обозначать тип с усами $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ через AB–CD, $\{A, C\}$ и $\{B, D\}$ — через AC–BD, $\{A, D\}$ и $\{B, C\}$ — через AD–BC.

Рассмотрим область, на границе которой лежит точка C и которую пересекает отрезок BC. В ней выполнены следующие соотношения:

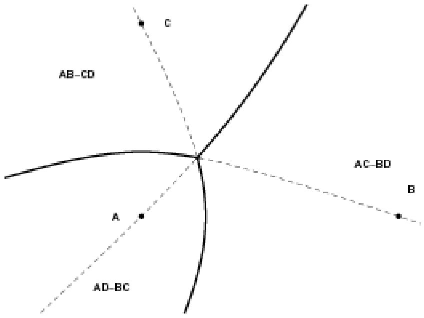
$$x - y > b - a, \quad x - z > c - a, \quad y - z > c - b.$$

Это равносильно неравенствам

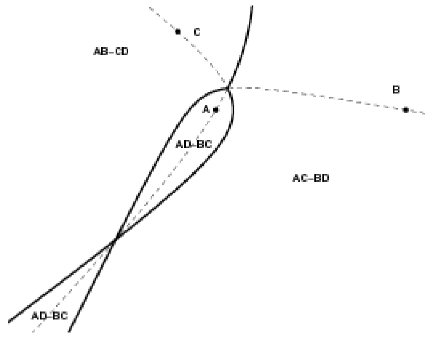
$$x + a > y + b, \quad x + a > z + c, \quad y + b > z + c,$$

т. е. $x + a > y + b > z + c$. По утверждению 1.5 $\mathrm{mf} = (x + a + z + c)/2$, а усы минимального заполнения — $\{C, D\}$ и $\{A, B\}$.

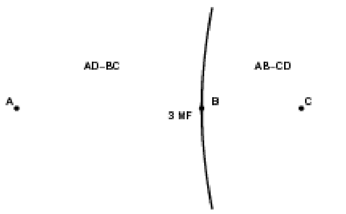
Аналогично определяются тип и вес минимального заполнения для остальных частей. В итоге имеем бифуркационные диаграммы, представленные на рис. 1 и 2.



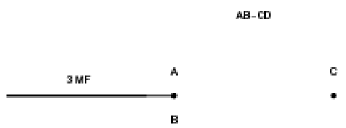
а — $\triangle ABC$ с одной точкой равного обхода



б — $\triangle ABC$ с двумя точками равного обхода



в — A, B, C на одной прямой



г — A, B совпали

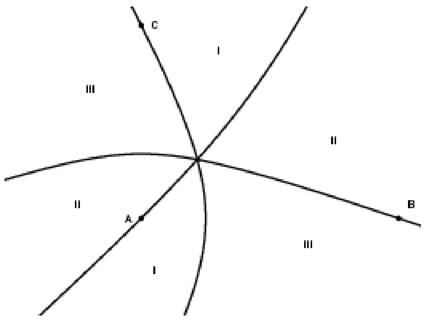
Рис. 1. Бифуркационные диаграммы типов минимальных заполнений для четырёх граничных точек

Рассмотрим теперь случай, когда точки A, B, C лежат на одной прямой, но все различны и, скажем, B лежит между A и C. Тогда mf_a и mf_c-кривые «схлопываются» в лучи BA и BC. Если D лежит на луче BA, то $z - y = a = b - c$, $z - x = b > a - c$, $y - x = c = b - a > a - b$, т. е. $z + c = y + b$, $z + c > a + x$, $y + b > a + x$. Поэтому MF имеет тип $AD–BC$, но для mf подходят две формулы: $(a + x + b + y)/2$ и $(a + x + c + z)/2$. На луче BC, аналогично, один тип $AB–CD$, но две формулы веса минимального заполнения: $(c + z + a + x)/2$ и $(c + z + b + y)/2$. Все эти формулы соотносятся с тем, что, очевидно, вес минимального заполнения точек на одной прямой равен наибольшему расстоянию между ними.

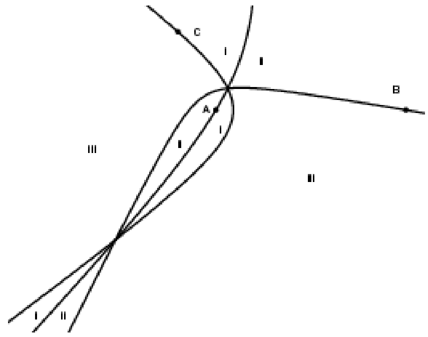
Ветвь гиперболы Содди, проходящая через точку B, остаётся ветвью гиперболы (или прямой, если $AB = BC$), и на ней реализуются типы минимального заполнения $AD–BC$ и $AB–CD$. Однако в точку B теперь попадает точка равного обхода и, если и только если D совпала с B, получается три типа MF.

Бифуркационные диаграммы для трёх точек на одной прямой изображены на рис. 1, *в* и 2, *в*.

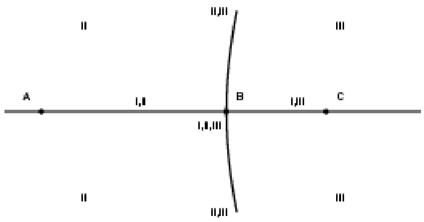
Следующий случай — когда две точки из A, B, C совпали, например A и B. Тогда $z + c = y + b = x + a$ тогда и только тогда, когда A и B лежат между C



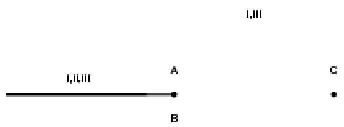
a — $\triangle ABC$ с одной точкой равного обхода



$б$ — $\triangle ABC$ с двумя точками равного обхода



$в$ — A, B, C на одной прямой



$г$ — A, B совпали

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы весов минимальных заполнений для четырёх граничных точек. Через I обозначена формула $(x + a + z + c)/2$, через II — $(x + a + y + b)/2$, через III — $(y + b + z + c)/2$

и D (тогда получаются три типа и три формулы). В остальных случаях $z + c < a + x = b + y$, поэтому реализуется один тип MF AB–CD и две формулы для mf: $(z + c + b + y)/2$ и $(z + c + a + x)/2$ (см. рис. 1, $г$ и 2, $г$).

Последний случай — когда все три точки A, B, C совпали. Тогда, очевидно, при любом положении точки D реализуются все типы MF.

Замечание 3. Фактически мы сейчас представили ещё одно доказательство следствия 1.10.

Литература

[1] Акопян А. В. Геометрия в картинках. — М.: МЦНМО, 2011.

[2] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.

[3] Ерёмин А. Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 9. — С. 51—72.

[4] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[5] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65—118.

[6] Степанова Е. И. Дифференцирование по направлениям веса минимального заполнения на римановом многообразии // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2015. — № 1. — С. 15—20.

[7] Brazil M., Graham R. L., Thomas D., Zachariasen M. On the history of the Euclidean Steiner tree problem // Arch. History Exact Sci. — 2014. — Vol. 68, no. 3. — P. 327—354.

[8] Hajja M., Yff P. The isoperimetric point and the point(s) of equal detour in a triangle // J. Geometry. — 2007. — Vol. 87, no. 1-2. — P. 76—82.

[9] Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. — http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[10] Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle: Florida Atlantic Univ. Lect. Notes. — 2001.