Локальная геометрия пространства Громова—Хаусдорфа и вполне несимметричные конечные метрические пространства

А. М. ФИЛИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: zater@mail.ru

УДК 514.13+519.173

Ключевые слова: пространство Громова—Хаусдорфа, расстояние Громова—Хаусдорфа, изометричные вложения, конечные метрические пространства, метрическая геометрия.

Аннотация

В статье исследуется геометрия метрического пространства $\mathcal{M}$ классов изометрии компактных метрических пространств с метрикой Громова—Хаусдорфа в окрестностях конечных метрических пространств с тривиальной группой изометрий. Доказано, что достаточно малые окрестности таких пространств в подпространстве всех n-точечных пространств в $\mathcal{M}$ изометричны соответствующим окрестностям точек пространства $\mathbb{R}^N$ с нормой $|(x_1, \ldots, x_N)| = \max\limits_i |x_i|$. Также в работе построено изометричное вложение произвольного конечного пространства в окрестность некоторого конечного вполне несимметричного пространства.

Abstract

A. M. Filin, Local geometry of the Gromov–Hausdorff metric space and totally asymmetric finite metric spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 263—272.

In the present paper, we investigate the structure of the metric space $\mathcal{M}$ of compact metric spaces considered up to an isometry and endowed with the Gromov–Hausdorff metric in a neighbourhood of a finite metric space, whose isometry group is trivial. It is shown that a sufficiently small ball in the subspace of $\mathcal{M}$ consisting of finite spaces with the same number of points centered at such a space is isometric to a corresponding ball in the space $\mathbb{R}^N$ endowed with the norm $|(x_1, \ldots, x_N)| = \max\limits_i |x_i|$. Also an isometric embedding of a finite metric space into a neighbourhood of a finite asymmetric space in $\mathcal{M}$ is constructed.

1. Введение

«Пространства подмножеств» изучаются специалистами не только по причине своей теоретической значимости, но и из-за важности таких приложений,

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 6, с. 263—272.
© 2019 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

как сравнение и распознавание образов, построение деформации одного геометрического объекта в другой и т. д. Один из возможных подходов к изучению таких пространств — определить функцию расстояния между подмножествами как «меру несхожести» соответствующих объектов. В 1914 г. Ф. Хаусдорф ввёл метрику на семействе замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X. Позднее Д. Эдвардс и независимо М. Громов обобщили конструкцию Хаусдорфа на семейство всех метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии). Полученное метрическое пространство $\mathcal{M}$ называют пространством Громова—Хаусдорфа или суперпространством.

С. Илиадис сформулировал следующую задачу: выяснить, любой ли метрический компакт может быть изометрично вложен в $\mathcal{M}$. Решая эту задачу, А. Иванов и А. Тужилин в [4] определили *метрическое пространство общего положения* как конечное метрическое пространство, у которого все ненулевые расстояния попарно различны и все его неравенства треугольника строгие, доказали, что достаточно малые окрестности таких пространств в подпространстве всех n-точечных пространств в $\mathcal{M}$ изометричны соответствующим окрестностям точек пространства R^N с нормой $|(x_1, \ldots, x_N)| = \max\limits_i |x_i|$, а также построили изометричное вложение произвольного конечного пространства в $\mathcal{M}$.

Изначально перед автором статьи была поставлена следующая задача: при помощи техники из [4] изометрично вложить в $\mathcal{M}$ произвольное счётное компактное метрическое пространство. При её решении понятие пространства общего положения было расширено, а именно было определено *вполне несимметричное метрическое пространство* как пространство с тривиальной группой изометрий. В данной статье изучается геометрия $\mathcal{M}$ в окрестности таких пространств: обобщены главные результаты [4], а также при помощи техники из [4] построено изометричное вложение произвольного конечного метрического пространства в такую окрестность.

Заметим, что вполне несимметричные метрические пространства представляют отдельный интерес. А. Иванов и А. Тужилин активно изучают их в [6] и доказывают, что пространство Громова—Хаусдорфа само вполне несимметрично.

2. Основные определения

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ обозначим открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим

$$U_r(A) = \bigcup_{a \in A} U_r(a).$$

Для непустых $A, B \subset X$ пусть

$$d_{\mathrm{H}}(A, B) = \inf\{r > 0\colon A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [1,2], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множестве всех замкнутых ограниченных подмножеств в X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовём *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{\mathrm{GH}}(X, Y)$ *Громова—Хаусдорфа между X и Y* называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y), такая что $d_{\mathrm{H}}(X', Y') \leqslant r$. Хорошо известно [1,2], что на множестве $\mathcal{M}$ метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии) функция d_{GH} является метрикой.

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$.

Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если ограничения канонических проекций π_X и π_Y, где $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$ для любой пары $(x, y) \in X \times Y$, на R — сюръекции. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ можно рассматривать как многозначное отображение пространства X в пространство Y, поэтому подмножество пространства Y, соответствующее точке $x \in X$, будем обозначать $R(x)$, т. е. $R(x) = \{y \in Y \colon (x, y) \in R\}$.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда для каждого соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ определено его *искажение*

$$\operatorname{dis} R = \sup\bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| \colon (x, y) \in R,\ (x', y') \in R\bigr\}.$$

Следующий результат хорошо известен [1,2].

Предложение 2.1. *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем*

$$d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\{\operatorname{dis} R \colon R \in \mathcal{R}(X, Y)\}.$$

Определение 2.2. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ называется *оптимальным*, если

$$d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = \frac{1}{2} \operatorname{dis} R.$$

Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$.

Как показано в [3, 5, 8], оптимальное соответствие существует для любой пары компактных метрических пространств.

Предложение 2.3. *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y) \neq \varnothing$.*

Если X — метрическое пространство, то через $\operatorname{diam} X$ обозначим его диаметр, т. е. величину $\sup\{|xx'| \colon x, x' \in X\}$.

Изометрией произвольного метрического пространства X называется взаимно-однозначное отображение X в себя, сохраняющее все расстояния. Множество всех изометрий метрического пространства образует группу относительно композиции. Нейтральным элементом является тождественное отображение.

Определение 2.4. Будем говорить, что метрическое пространство X *является вполне несимметричным пространством*, если его группа изометрий тривиальна.

Замечание 2.5. Метрическое пространство общего положения является вполне несимметричным.

Для конечного метрического пространства X определим величины

$$\begin{aligned} s(X) &= \min\{|xy| \colon x \neq y\}, \\ e(X) &= \min\bigl\{\bigl||xy| - |zw|\bigr| \colon x \neq y,\ z \neq w,\ \{x,y\} \neq \{z,w\}\bigr\}, \\ t(X) &= \min\{|xy| + |yz| - |xz| \colon x \neq y \neq z \neq x\}. \end{aligned}$$

При этом $\min\bigl(e(X), t(X)\bigr) > 0$ эквивалентно тому, что X находится в общем положении.

Лемма 2.6. *Для любого конечного метрического пространства X, состоящего из трёх и более точек, верно неравенство*

$$s(X) \geqslant t(X).$$

Доказательство. Так как X конечно, найдутся точки $x, y \in X$, такие что $s(X) = |xy|$. Выберем произвольную точку $z \in X$. Без ограничения общности положим $|xz| - |zy| \geqslant 0$. Тогда

$$(|xz| - |zy| - |xy|) + |xy| \geqslant 0,$$

т. е.

$$s(X) - (|zy| + |xy| - |xz|) \geqslant 0,$$

откуда следует, что

$$s(X) \geqslant |zy| + |xy| - |xz| \geqslant t(X),$$

что и требовалось. □

Через $S(X)$ будем обозначать группу перестановок точек конечного метрического пространства X. Тождественную перестановку будем обозначать id. Для перестановки $\sigma \in S(X)$, как для любого другого отношения, определено искажение:

$$\operatorname{dis}\sigma = \max\bigl\{\bigl||\sigma(x)\sigma(y)| - |xy|\bigr| \colon x, y \in X\bigr\}.$$

Для конечного метрического пространства X положим

$$e'(X) = \min\{\operatorname{dis}\sigma \colon \sigma \in S(X),\ \sigma \neq \mathrm{id}\}.$$

Лемма 2.7. *Пусть $|X| < \infty$. Тогда условие $e'(X) > 0$ эквивалентно тому, что X вполне несимметрично.*

Доказательство. Пусть X вполне несимметрично. Тогда для любой нетождественной перестановки $\sigma \in S(X)$ существует пара точек $x, y \in X$, такая что $\operatorname{dis}\sigma \geqslant \bigl||\sigma(x)\sigma(y)| - |xy|\bigr| > 0$ (иначе σ будет нетривиальной изометрией). Следовательно, $e'(X) > 0$.

Пусть
$$e'(X) = \min\{\operatorname{dis}\sigma\colon \sigma \in S(X),\ \sigma \neq \mathrm{id}\} = 0.$$
Тогда найдётся нетривиальная перестановка $\sigma \in S(X)$, такая что $\operatorname{dis}\sigma = 0$. Следовательно, для любых точек $x, y \in X$ выполнено равенство $\big||\sigma(x)\sigma(y)| - |xy|\big| = 0$, а значит, σ — нетривиальная изометрия и пространство X не является вполне несимметричным. □

Замечание 2.8. Для счётных метрических компактов лемма 2.7 неверна. Например, у метрического пространства
$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0\right\} \subset \mathbb{R},$$
являющегося сходящейся в своей метрике последовательностью, группа изометрий тривиальна, так как все расстояния разные, но $e'(M) = 0$.

3. Устройство $\mathcal{M}$ в окрестности конечного вполне несимметричного пространства

Метрические компакты, достаточно близкие по Громову—Хаусдорфу к конечным метрическим пространствам, имеют определённую структуру. При этом расстояние между вполне несимметричным конечным метрическим пространством и близким к нему произвольным метрическим компактом достигается на единственном оптимальном соответствии.

Предложение 3.1. *Пусть $M = \{1, \ldots, n\}$ — конечное метрическое пространство, такое что $e'(M) > 0$. Тогда для любого $0 < \varepsilon \leqslant \min\big(s(M), e'(M)\big)/2$ и каждого метрического компакта X, такого что $2d_{\mathrm{GH}}(M, X) < \varepsilon$, существует единственное оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(M, X)$. Это соответствие порождает разбиение*
$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} R(i),$$
обладающее следующими свойствами:

1) $\operatorname{diam} R(i) < \varepsilon$;
2) *для любых $i, j \in M$ и любых $x_i \in R(i)$ и $x_j \in R(j)$ (здесь индексы i и j могут быть равны друг другу) выполняется $\big||x_i x_j| - |ij|\big| < \varepsilon$.*

Доказательство. По предложению 2.3 существует оптимальное соответствие между M и X. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(M, X)$. Если $R(i) \cap R(j) \neq \varnothing$ при некоторых $i \neq j$, то $\operatorname{dis} R \geqslant |ij| \geqslant s(M)$, поэтому $2d_{\mathrm{GH}}(M, X) = \operatorname{dis} R > \varepsilon$, противоречие. Таким образом, $\{R(i)\}_{i=1}^{n}$ — разбиение X.

Заметим, что
$$\operatorname{dis} R = \max_{i,j}\big\{\operatorname{diam} R(i),\ \operatorname{dis}\big[\big(\{i\} \times R(i)\big) \cup \big(\{j\} \times R(j)\big)\big],\ j \neq i\big\} < \varepsilon,$$

поэтому $\operatorname{diam} R(i) < \varepsilon$ при всех i и $\big||x_i x_j| - |ij|\big| < \varepsilon$ при всех $j \neq i$ и всех $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$. Если же $i = j$, то $x_i, x_j \in X_i$ и

$$\big||x_i x_j| - |ij|\big| = |x_i x_j| \leqslant \operatorname{diam} R(i) < \varepsilon.$$

Покажем единственность такого соответствия. Пусть $R' \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(M, X)$, но $R' \neq R$. Соответствие R' порождает разбиение пространства

$$X = \bigsqcup_{i \in M} R'(i).$$

Предположим, что для некоторого j множество $R'(j)$ содержит $x_k \in R(k)$ и $x_l \in R(l)$ для некоторых $k \neq l$. Рассмотрим искажение R':

$$\operatorname{dis} R' \geqslant \big||x_k x_l| - |jj|\big| = (|x_k x_l| - |kl|) + |kl| > -\varepsilon + s(M) > -\varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon,$$

так как $\big||x_k x_l| - |kl|\big| < \varepsilon$ по уже доказанному свойству 2). Противоречие. Следовательно, $R'(j) = R(l)$, т. е. $l = \sigma(j)$ для некоторой $\sigma \in S(X)$.

В силу вполне несимметричности M найдутся точки $m, p \in M$, такие что

$$\operatorname{dis} \sigma \geqslant \big||mp| - |\sigma(m)\sigma(p)|\big| \geqslant e'(M) > 2\varepsilon.$$

С другой стороны, для любых $x_m \in R(m) = R'\big(\sigma(m)\big)$ и $x_p \in R(p) = R'\big(\sigma(p)\big)$ выполняется

$$\big||x_m x_p| - |mp|\big| < \varepsilon$$

(в силу оптимальности R) и

$$\big||x_m x_p| - |\sigma(m)\sigma(p)|\big| < \varepsilon$$

(в силу оптимальности R'), откуда следует, что

$$\begin{aligned}\big||mp| - |\sigma(m)\sigma(p)|\big| = \big||mp| - |x_m x_p| + |x_m x_p| - |\sigma(m)\sigma(p)|\big| \leqslant \\ \leqslant \big||mp| - |x_m x_p|\big| + \big||x_m x_p| - |\sigma(m)\sigma(p)|\big| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Противоречие. Таким образом, R — единственное оптимальное соответствие между M и X, и оно порождает единственное разбиение пространства X с такими свойствами. □

Лемма 3.2. *Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — конечное метрическое пространство. Тогда для любого $0 < \varepsilon \leqslant s(M)/2$ и каждого n-точечного метрического пространства $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, такого что $2d_{\mathrm{GH}}(M, X) < \varepsilon$, расстояние по Громову—Хаусдорфу между M и X достигается на биективном соответствии.*

Доказательство. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(M, X)$. Предположим, что R не является биекцией. Тогда найдутся точки $k, l \in M$, $x \in X$, такие что $(k, x), (l, x) \in R$. Следовательно,

$$2d_{\mathrm{GH}}(M, X) = \operatorname{dis} R \geqslant |kl| \geqslant s(M) \geqslant \varepsilon.$$

Противоречие. □

Предложение 3.3. *Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — конечное метрическое пространство, такое что $e'(M) > 0$. Тогда для любого $0 < \varepsilon \leqslant \min\bigl(s(M), e'(M)\bigr)/2$ и любых n-точечных метрических пространств $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, таких что $4d_{\mathrm{GH}}(M, X) < \varepsilon$, $4d_{\mathrm{GH}}(M, Y) < \varepsilon$, расстояние по Громову—Хаусдорфу между X и Y достигается на единственном биективном соответствии $R = R_X R_Y^{-1}$, где R_X, R_Y — биективные оптимальные соответствия между M и X и между M и Y соответственно.*

Доказательство. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$. Предположим, что R не является биекцией. Тогда в соответствии R лежат пары вида (x_i, y), (x_j, y), где $y \in Y$, $x_i, x_j \in X$. Пусть $x_i = R_X(i)$, $x_j = R_X(j)$. Следовательно,

$$2d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = \operatorname{dis} R \geqslant |x_i x_j| = (|x_i x_j| - |ij|) + |ij| > -\frac{\varepsilon}{2} + s(M) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon = \frac{3}{2}\varepsilon.$$

С другой стороны, по неравенству треугольника имеем

$$2d_{\mathrm{GH}}(X, Y) \leqslant 2d_{\mathrm{GH}}(M, X) + 2d_{\mathrm{GH}}(M, Y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Противоречие. Таким образом, оптимальное соответствие между X и Y биективно.

Покажем, что R единственно. Пусть $R' \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$, но $R' \neq R$. Пусть $x_i = R_X(i)$, $y_i = R_Y(i)$, $i = 1, \dots, n$. По доказанному R' — биекция, поэтому $R'(x_i) = y_{\sigma(i)}$, $i = 1, \dots, n$, где $\sigma \in S(M)$. Так как M вполне несимметрично, найдутся точки $k, l \in M$, такие что

$$\operatorname{dis} \sigma \geqslant \bigl||kl| - |\sigma(k)\sigma(l)|\bigr| \geqslant e'(M) > 2\varepsilon.$$

Пусть $R_X(k) = x_k \in X$, $R_X(l) = x_l \in X$, $R_Y\bigl(\sigma(k)\bigr) = y_{\sigma(k)}$, $R_Y\bigl(\sigma(l)\bigr) = y_{\sigma(l)}$ — такие точки, что $(x_k, y_{\sigma(k)}), (x_l, y_{\sigma(l)}) \in R'$. Для них выполняются следующие неравенства:

1) $\bigl||y_{\sigma(k)} y_{\sigma(l)}| - |\sigma(k)\sigma(l)|\bigr| < \varepsilon/2$ (в силу оптимальности R_Y),
2) $\bigl||x_k x_l| - |kl|\bigr| < \varepsilon/2$ (в силу оптимальности R_X),
3) $\bigl||x_k x_l| - |y_{\sigma(k)} y_{\sigma(l)}|\bigr| < \varepsilon$ (в силу оптимальности R'),

откуда получаем

$$\begin{aligned}
&\bigl||kl| - |\sigma(k)\sigma(l)|\bigr| = \\
&\quad = \bigl||kl| - |x_k x_l| - |\sigma(k)\sigma(l)| + |y_{\sigma(k)} y_{\sigma(l)}| - |y_{\sigma(k)} y_{\sigma(l)}| + |x_k x_l|\bigr| \leqslant \\
&\quad \leqslant \bigl||kl| - |x_k x_l|\bigr| + \bigl||y_{\sigma(k)} y_{\sigma(l)}| - |\sigma(k)\sigma(l)|\bigr| + \bigl||y_{\sigma(k)} y_{\sigma(l)}| - |x_k x_l|\bigr| < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Противоречие. Следовательно, R — единственное биективное оптимальное соответствие между X и Y. По предложению 3.1 R_X, R_Y единственны, а по лемме 3.2 биективны, а также из полученного противоречия следует, что перестановка σ, порождённая R', тождественна. Следовательно, $R = R_X R_Y^{-1}$. $\square$

Пусть $\mathbb{R}^k_\infty$ — пространство действительных k-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ с нормой $\|\vec{x}\| = \max\limits_i |x_i|$. Расстояние между двумя векторами в $\mathbb{R}^k_\infty$, порождённое этой нормой, будем обозначать $|\vec{x}\vec{y}|_\infty$.

Предложение 3.4. *Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — конечное метрическое пространство, $\vec{d}_M = (|12|, \dots, |1n|, \dots, |(n-1)(n)|)$ — вектор в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}_\infty$, компоненты которого — элементы множества расстояний пространства M. Тогда в условиях предложения 3.3 множество расстояний пространства X можно единственным образом упорядочить и представить в виде вектора $\vec{d}_X \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}_\infty$ так, что $2d_{\mathrm{GH}}(M, X) = |\vec{d}_M \vec{d}_X|_\infty$, а множество расстояний пространства Y можно единственным образом упорядочить и представить в виде вектора $\vec{d}_Y \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}_\infty$ так, что $2d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = |\vec{d}_X \vec{d}_Y|_\infty$ и $2d_{\mathrm{GH}}(M, Y) = |\vec{d}_M \vec{d}_Y|_\infty$.*

Доказательство. Положим

$$\vec{d}_X = (|R_X(1)R_X(2)|, \dots, |R_X(1)R_X(n)|, \dots, |R_X(n-1)R_X(n)|),$$
$$\vec{d}_Y = (|R_Y(1)R_Y(2)|, \dots, |R_Y(1)R_Y(n)|, \dots, |R_Y(n-1)R_Y(n)|).$$

По предложению 3.1 соответствия R_X, R_Y определены однозначно, а по лемме 3.2 они биективны. Следовательно, имеем

$$2d_{\mathrm{GH}}(M, X) = \operatorname{dis} R_X = \max\bigl\{\bigl||kl| - |x_k x_l|\bigr| \colon (k, x_k) \in R_X,\ (l, x_l) \in R_X\bigr\} = \\ = \max_{(k,l)} \bigl||kl| - |R_X(k)R_X(l)|\bigr| = \bigl|\vec{d}_M \vec{d}_X\bigr|_\infty.$$

Аналогично

$$2d_{\mathrm{GH}}(M, Y) = \operatorname{dis} R_Y = \bigl|\vec{d}_M \vec{d}_Y\bigr|_\infty.$$

По предложению 3.3 $R = R_X R_Y^{-1}$. Следовательно, имеем

$$2d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = \operatorname{dis} R = \max\bigl\{\bigl||x_k x_l| - |y_k y_l|\bigr| \colon (x_k, y_k) \in R,\ (x_l, y_l) \in R\bigr\} = \\ = \max_{(k,l)} \bigl||R_X(k)R_X(l)| - |R_Y(k)R_Y(l)|\bigr| = \bigl|\vec{d}_X \vec{d}_Y\bigr|_\infty. \quad \square$$

4. Основные результаты

Обозначим через $\mathcal{M}_{[n]}$ подмножество в пространстве Громова—Хаусдорфа, состоящее из n-точечных метрических пространств. Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — n-точечное вполне несимметричное метрическое пространство, такое что $t(M) > 0$. Положим $\delta = (1/2)\min\bigl(e'(M), t(M)\bigr)$, $U = U_{\delta/4}(M) \subset \mathcal{M}_{[n]}$, $V = U_{\delta/4}(d_M) \subset \mathbb{R}^{n(n-1)/2}_\infty$.

Теорема 4.1. *Отображение*

$$\nu \colon U \to V, \quad X \mapsto \frac{1}{2}\vec{d}_X$$

является биективной изометрией.

Доказательство. По лемме 2.6 верно следующее неравенство: $s(M) \geqslant t(M)$. Значит, окрестность U удовлетворяет условиям предложения 3.3 и, следовательно, по предложению 3.4 ν инъективно и изометрично. Осталось показать, что ν сюръективно.

Выберем произвольный вектор $\vec{d}_Z = (\rho_{12}, \dots, \rho_{1n}, \dots, \rho_{(n-1)n}) \in V$ и построим по нему метрическое пространство $Z \in U$. Для этого положим $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Так как $\vec{d}_Z \in U_{\delta/4}(\vec{d}_M)$, имеем $\big||ij| - \rho_{ij}\big| < \delta/4$ при всех $i \neq j$. Следовательно,

$$\rho_{ij} > -\frac{\delta}{4} + |ij| \geqslant -\frac{\delta}{4} + s(M) \geqslant -\frac{\delta}{4} + t(M) \geqslant \frac{3}{4}\delta > 0.$$

Проверим неравенство треугольника. Выберем произвольные попарно различные $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$. Тогда

$$\rho_{ij} + \rho_{jk} - \rho_{ik} > (|ij| + |jk| - |ik|) - \frac{3}{4}\delta \geqslant t(M) - \frac{3}{4}\delta > \delta - \frac{3}{4}\delta = \frac{1}{4}\delta > 0.$$

Таким образом, числа ρ_{ij} задают некоторую метрику на множестве $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ по правилу $|z_i z_j| = \rho_{ij}$.

Покажем, что $Z \in U$. Пусть $R_Z \in \mathcal{R}(Z, M)$ — биекция $z_i \mapsto i$. Тогда

$$d_{\mathrm{GH}}(Z, M) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{dis} R_Z = \frac{1}{2} \max_{i,j} \big\{ \big||z_i z_j| - |ij|\big| \big\} < \frac{\delta}{4},$$

следовательно, $Z \in U_{\delta/4}(M) \subset \mathcal{M}_{[n]}$, и при этом $\nu(Z) = \vec{d}_Z$. □

Хорошо известно [7], что любое метрическое пространство можно изометрично вложить при помощи отображения Куратовского в банахово пространство непрерывных ограниченных функций на нём.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ — произвольное конечное метрическое пространство. В данном случае вложение Куратовского $\mathcal{K}\colon X \to \mathbb{R}^k_\infty$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x_1 \mapsto (0, |x_1x_2|, |x_1x_3|, \dots, |x_1x_k|),\\
&x_2 \mapsto (|x_2x_1|, 0, |x_2x_3|, \dots, |x_2x_k|),\\
&\quad \dots\\
&x_k \mapsto (|x_kx_1|, |x_kx_2|, \dots, 0).
\end{aligned}$$

Теорема 4.2. *Для любого конечного метрического пространства X найдётся конечное вполне несимметричное метрическое пространство M, в окрестность которого в пространстве Громова—Хаусдорфа можно изометрично вложить X.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ — произвольное конечное метрическое пространство. Рассмотрим сначала случай, когда $k = n(n-1)/2$ для некоторого натурального n.

Пусть d — диаметр X. Рассмотрим n-точечное вполне несимметричное пространство M, такое что $1/2\min\bigl(t(M), e'(M)\bigr) > 4d$. Заметим, что такое пространство можно получить, растянув в нужное количество раз любое n-точечное вполне несимметричное пространство, все неравенства треугольника которого строгие. Обозначим $\delta = (1/2)\min\bigl(t(M), e'(M)\bigr)$. Тогда множество $\vec{d}_M + \mathcal{K}(X)$, полученное из $\mathcal{K}(X)$ сдвигом на вектор $\vec{d}_M$, содержится в $U_{\delta/4}(\vec{d}_M) \subset \mathbb{R}^k_\infty$. Заметим, что сдвиг на фиксированный вектор в $\mathbb{R}^k_\infty$ есть изометрия.

Положим $U = U_{\delta/4}(M) \subset \mathcal{M}_{[n]}$, $V = U_{\delta/4}(\vec{d}_M) \subset \mathbb{R}^k_\infty$. Тогда по теореме 4.1 отображение $\nu\colon U \to V$ является изометрией. Значит, $\nu^{-1}\bigl(\vec{d}_M + \mathcal{K}(X)\bigr) \subset \mathcal{M}_{[n]} \subset$ $\subset \mathcal{M}$ — подмножество, изометричное X.

Пусть теперь $k \neq n(n-1)/2$ ни для какого натурального n. Найдём наименьшее n, для которого $k < n(n-1)/2$. Расширим X до метрического пространства X', состоящего из $n(n-1)/2$ точек, сохранив неизменными все расстояния в X и положив все остальные расстояния равными $\operatorname{diam} X$. В силу предыдущих рассуждений X' изометрично некоторому подмножеству $U_{\delta/4}(M) \subset \mathcal{M}$, поэтому X изометрично соответствующей части этого подмножества. $\square$

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору А. О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также профессору А. А. Тужилину за полезные обсуждения. Работа частично поддержана грантом РФФИ, проект 16-01–00378, и грантом Президента РФ поддержки Ведущих научных школ России (соглашение 075-02-2018-867).

Литература

[1] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. — Москва; Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2004.

[2] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова—Хаусдорфа: случай компактов. — М.: Изд. Попечит. совета мех.-мат. фак. МГУ, 2017.

[3] Chowdhury S., Memoli F. Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces. — 2016. — `arXiv:1603.02385`.

[4] Iliadis S., Ivanov A., Tuzhilin A. Local structure of Gromov—Hausdorff space, and isometric embeddings of finite metric spaces into this space // Topology Its Appl. — 2017. — Vol. 221. — P. 393—398.

[5] Ivanov O., Iliadis S., Tuzhilin A. Realizations of Gromov—Hausdorff Distance. — 2016. — `arXiv:1603.08850`.

[6] Ivanov A., Tuzhilin A. Isometry Group of Gromov—Hausdorff Space. — 2018. — `arXiv:1806.02100`.

[7] Kuratowski C. Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables // Fund. Math. — 1935. — Vol. 25. — P. 534—545.

[8] `http://mathoverflow.net/questions/135184/for-which-metric-spaces-is-gromov-hausdorff-distance-actually-achieved?rq=1`.