Справедливые раскраски гиперграфов в r цветов*

М. АХМЕДЖАНОВА
Московский физико-технический институт
e-mail: mechmathrita@abc.math.msu.su

Д. А. ШАБАНОВ
Московский физико-технический институт,
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
e-mail: dmitry.shabanov@phystech.edu

УДК 519.179.1+519.174

Ключевые слова: гиперграфы, раскраски гиперграфов, правильные раскраски, справедливые раскраски гиперграфов.

Аннотация

В работе изучается задача о возможности справедливой раскраски вершин однородного гиперграфа, т. е. раскраски, в которой одновременно нет одноцветных рёбер и все цветовые классы имеют почти одинаковую мощность. Получена новая оценка числа рёбер n-однородного гиперграфа, которая обеспечивает существование справедливой раскраски вершин этого гиперграфа в r цветов.

Abstract

M. Akhmejanova, D. A. Shabanov, Equitable colorings of hypergraphs with r colors, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 3—23.

The paper deals with a problem concerning equitable vertex colorings of uniform hypergraphs, i.e., colorings under which there are no monochromatic edges and simultaneously all the color classes have almost the same cardinalities. We obtain a new bound on the edge number of an n-uniform hypergraph that guarantees the existence of an equitable vertex coloring with r colors for this hypergraph.

1. Введение

В работе рассматривается известная задача экстремальной комбинаторики, связанная с раскрасками гиперграфов. Напомним основные определения из теории гиперграфов.

Гиперграфом в дискретной математике называется пара $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — конечное множество, называемое *множеством вершин гиперграфа*,

*Исследование Д. А. Шабанова выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 3—23.

а $E = E(H)$ — некоторая совокупность подмножеств V, которые принято назвать *рёбрами гиперграфа*. Гиперграф является *n-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется *правильной*, если в этой раскраске все рёбра из E не являются одноцветными. Если для гиперграфа H существует правильная раскраска в r цветов, то H является *r-раскрашиваемым*. Одна из центральных задач теории гиперграфов — это классическая проблема Эрдёша—Хайнала о нахождении величины $m(n, r)$, равной минимальному числу рёбер в n-однородном гиперграфе, не являющемся r-раскрашиваемым. Данная задача имеет обширную историю, которую можно прочитать в обзоре [11]. Мы же отметим, что при небольшом значении r по сравнению с n наилучшие оценки $m(n, r)$ имеют вид

$$c_1 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{r-1}{r}} r^{n-1} \leqslant m(n, r) \leqslant c_2 n^2 r^n \ln r, \tag{1}$$

где c_1 и c_2 — некоторые абсолютные положительные константы. Верхняя оценка в (1) принадлежит П. Эрдёшу [7], а нижняя — Д. Черкашину и Я. Козику [6]. При больших значениях r по сравнению с n известны более сильные результаты, которые были получены И. А. Акользиным и Д. А. Шабановым [4].

В настоящей работе мы изучаем аналог проблемы Эрдёша—Хайнала для случая справедливых раскрасок. Напомним, что раскраска множества вершин гиперграфа называется *справедливой*, если она является правильной и при этом мощности всех цветовых классов отличаются не более чем на единицу. Значительный интерес к справедливым раскраскам графов и гиперграфов исторически возник в связи со знаменитой теоремой Хайнала—Семереди [9] 1970 года, в которой они доказали следующую гипотезу Эрдёша [8]: любой граф G с максимальной степенью вершины $\Delta(G)$ допускает не только правильную, но и справедливую раскраску в $\Delta(G) + 1$ цвет. Данный результат стал основанием целого ряда направлений теории графов, связанных с так называемыми G-факторами или упаковками.

Справедливые раскраски гиперграфов стали изучаться совсем недавно. В последние годы был сделан акцент на изучение подкласса простых гиперграфов. Достаточные условия справедливой 2-раскрашиваемости однородного гиперграфа в терминах ограничения на максимальную степень вершины (аналоги теоремы Хайнала—Семереди) были получены в [1, 12]. Недавние результаты относительно других обобщений проблемы Эрдёша—Хайнала могут быть найдены, например, в [2, 3, 5].

Основная цель работы — дать достаточное условие справедливой r-раскрашиваемости гиперграфа в терминах ограничения на число рёбер, но уже в общем классе n-однородных гиперграфов. Легко показать, что если число рёбер n-однородного гиперграфа H не превосходит r^{n-1}, то для H существует справедливая раскраска в r цветов. Основной результат настоящей работы усиливает данную оценку следующим образом.

Теорема 1. *Существует такая положительная константа $c \in (0,1)$, что для любого n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ с условиями, что $|V|$ делится на r,*

$$r \leqslant \sqrt{\frac{\ln n}{-(\ln c)(\ln \ln n)^3}}$$

и

$$|E| \leqslant c \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor \log_2(r) \rfloor}{\lfloor \log_2(r) \rfloor + 1}} r^{n-1}, \tag{2}$$

существует справедливая раскраска в r цветов.

Отметим, что полученная нами оценка несколько слабее нижней оценки (1) величины $m(n, r)$, до которой удаётся доказать наличие правильной раскраски. Однако свойство справедливости является очень сильным и совсем неочевидным.

Оставшаяся часть статьи будет состоять в доказательстве теоремы 1, которое, в свою очередь, будет проходить в несколько этапов. Сначала мы покажем, что для гиперграфов с малым числом вершин всё устроено очень просто. Затем построим некоторую случайную раскраску, которая с положительной вероятностью будет правильной, но не обязательно справедливой для H. Наконец, с помощью перекраски небольшого числа вершин мы обеспечим равенство мощностей цветовых классов, сохранив отсутствие одноцветных рёбер.

2. Гиперграфы с небольшим числом вершин

Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф из условия теоремы 1. Обозначим число его вершин через $m = |V|$. Цель этого раздела — показать, что при выполнении неравенств

$$|E| < c \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor \log_2(r) \rfloor}{\lfloor \log_2(r) + 1 \rfloor}} r^{n-1}, \quad |V| < \frac{n(n-1)(r-1)^{\frac{\lfloor \log_2(r) \rfloor + 1}{\lfloor \log_2(r) \rfloor}}}{2 \ln n} \tag{3}$$

гиперграф H допускает справедливую раскраску в r цветов. Для этого нам будет достаточно рассмотреть случайную сбалансированную раскраску в r цветов. Сбалансированной раскраской будем называть раскраску с равными мощностями цветовых классов, т. е. некоторое разбиение множества вершин гиперграфа на r равных долей:

$$V = K_0 \sqcup K_1 \sqcup \dots \sqcup K_{r-1}, \quad |K_0| = |K_1| = \dots = |K_{r-1}| = \frac{m}{r}.$$

Пусть C — это случайная сбалансированная раскраска гиперграфа H в r цветов. Тогда

$$\mathsf{P}(\text{есть одноцветное ребро } H \text{ в } C) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{A\in E} \frac{r\binom{m-n}{m/r-n}\cdot\binom{m-m/r}{m/r}\cdot\ldots\cdot\binom{m/r}{m/r}}{\binom{m}{m/r}\cdot\binom{m-m/r}{m/r}\cdot\ldots\cdot\binom{m/r}{m/r}} =$$
$$= |E|\frac{r\binom{m-n}{m/r-n}}{\binom{m}{m/r}} = |E|\frac{r^{-n+1}\left(1-\frac{r}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{r(n-1)}{m}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor\log_2(r)\rfloor}{\lfloor\log_2(r)\rfloor+1}} \frac{\exp\left(\ln\left(1-\frac{r}{m}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{r(n-1)}{m}\right)\right)}{\exp\left(\ln\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\right)} =$$
$$= c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor\log_2(r)\rfloor}{\lfloor\log_2(r)\rfloor+1}} \prod_{x=1}^{n-1}\exp\left(\ln\left(1-\frac{rx}{m}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{m}\right)\right).$$

Из разложения натурального логарифма в ряд Тейлора следует, что

$$\ln\left(1-\frac{rx}{m}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{m}\right) < -\frac{x(r-1)}{m}$$

при $x \in (0;1)$. Складывая показатели степеней у произведения экспонент, окончательно получаем

$$\mathsf{P}(\text{есть одноцветное ребро в } C) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor\log_2(r)\rfloor}{\lfloor\log_2(r)\rfloor+1}} e^{-\frac{n(n-1)(r-1)}{2m}} \leqslant c\cdot(\ln n)^{-\frac{\lfloor\log_2(r)\rfloor}{\lfloor\log_2(r)\rfloor+1}} < 1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью случайная сбалансированная раскраска C является справедливой. Остаётся рассмотреть гиперграфы, в которых число вершин больше, чем

$$\frac{n(n-1)(r-1)^{\frac{\lfloor\log_2(r)\rfloor+1}{\lfloor\log_2(r)\rfloor}}}{2\ln n}.$$

3. Применение метода случайной перекраски

Пусть теперь гиперграф H удовлетворяет условию теоремы 1, но имеет большое число вершин:

$$m = |V| \geqslant \frac{n(n-1)(r-1)^{\frac{\lfloor\log_2(r)\rfloor+1}{\lfloor\log_2(r)\rfloor}}}{2\ln n}.$$

В этом случае мы применим метод случайной перекраски, а точнее его модификацию из [10]. Суть метода весьма проста: сначала мы осуществляем случайную раскраску, а затем немного подправляем её, чтобы исправить те рёбра, которые получились одноцветными. Опишем всё более подробно.

3.1. Алгоритм 1: построение правильной раскраски

Пусть C^0 — случайная раскраска множества вершин гиперграфа H в r цветов: присваиваем каждой вершине независимо от всех остальных вершин любой из r цветов с одной и той же вероятностью $1/r$. Для удобства обозначений мы считаем, что множество цветов есть множество остатков по модулю r, т. е. равно $\{0, 1, \ldots, r-1\}$.

Для работы алгоритма перекраски зададим набор независимых случайных величин $(\sigma(v),\ v \in V)$, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Величину $\sigma(v)$ будем называть *весом вершины* v. Если $\sigma(v) < p$, где p — некоторый параметр нашей конструкции, то вершину v будем называть *свободной*. Только свободным вершинам будет разрешено перекрашиваться в процессе работе алгоритма. Вариационный ряд случайных величин $(\sigma(v),\ v \in V)$ задаёт случайную нумерацию вершин гиперграфа, которую мы также будем обозначать через σ. Наконец, для удобства будем использовать обозначение $x = \lfloor \log_2 r \rfloor$.

Предположим, что в раскраске C^0 есть одноцветные рёбра. Для её исправления мы используем следующий алгоритм перекраски [10]. Он состоит из x этапов перекраски.

Этап перекраски номер l, $0 < l \leqslant x$.

Рассматриваем все вершины V в порядке, заданном σ. Для рассматриваемой вершины v проверяем следующие условия:

1) v не меняла свой цвет ещё ни на одном этапе перекраски до l;
2) v является свободной;
3) в текущий раскраске имеется инцидентное v одноцветное ребро A, $v \in A$, некоторого цвета $\alpha \in \{0, \ldots, r-1\}$ и никакая из его вершин не была перекрашена на этапе l.

Если выполнены все три условия, то перекрасим вершину v в цвет $(\alpha + 2^{l-1}) \pmod r$. В этом случае будем говорить, что перекрашенная вершина v *обвиняет* ребро A.

Если же какое-то из условий 1)—3) не выполняется, то мы пропускаем вершину v и переходим к следующей. После рассмотрения всех вершин наступает следующий этап перекраски с номером $l + 1$.

Отметим несколько важнейших свойств работы предложенного алгоритма:

— каждая вершина может сменить свой начальный цвет в раскраске C^0 не более одного раза;
— перекрашенная из цвета α вершина имела наименьший вес среди всех вершин начального цвета α того ребра, которое она обвиняет.

Перейдём к анализу итогов работы алгоритма 1.

3.2. Анализ алгоритма 1: T-деревья

Обозначим через C^1 раскраску, которая получилась после работы алгоритма 1 с раскраской C^0. Проанализируем ситуации, в которых он не смог выдать правильную раскраску по итогам работы.

Пусть A — это ребро, оказавшееся одноцветным в раскраске C^1. Обозначим его итоговый цвет через α. Заметим, что в силу специфики алгоритма перекраски ребро A в начальной раскраске C^0 могло содержать вершины только следующих цветов:

$$\alpha,\ \alpha-2^0,\ \alpha-2^1,\ldots,\ \alpha-2^{x-1} \pmod r.$$

Пусть $\{\alpha, i_1^A, i_2^A, \ldots, i_s^A\}$, где $i_j^A = \alpha - 2^{\beta_j - 1}$, — это начальный набор цветов вершин ребра A. Если $A(\beta_j) = \{v \in A\colon C^0(v) = i_j^A\}$ — это набор вершин ребра с начальным цветом i_j^A, то все эти вершины должны были быть перекрашены в α на одном и том же этапе перекраски с номером β_j. Обозначим через $a_A(\beta_j)$ вершину, сменившую свой цвет на α последней в множестве $A(\beta_j)$. По построению алгоритма перекраски это в точности означает, что вершина $a_A(\beta_j)$ имеет наибольший вес среди всех вершин $A(\beta_j)$. Набор вершин $\mathrm{Dominant}(A) = \bigl(a_A(\beta_1), \ldots, a_A(\beta_s)\bigr)$ будем называть *доминантным* набором ребра A, а вершины набора — *доминантными*. Цвет α будем называть *главным* для ребра A.

Точно так же определим доминантный набор вершин и главный цвет для каждого ребра B, которое становилось одноцветным после произвольного этапа перекраски $l < x$.

Начнём построение конфигурации рёбер H, которую мы назовём *T-деревом* с корнем A.

— В качестве корня мы возьмём ребро A, а его потомками будут все рёбра B, которых обвиняют доминантные вершины $\mathrm{Dominant}(A)$ (выбираем одно ребро для каждой вершины). Если $a_A(\beta_j) \in \mathrm{Dominant}(A)$ обвиняет ребро B, то положим код ребра равным $\tau(B) = (\beta_j)$.

— В каждом ребре B есть свой начальный набор цветов и соответствующий ему доминантный набор вершин $\mathrm{Dominant}(B)$, которые были перекрашены до того, как ребро B стало одноцветным своего главного цвета на этапе перекраски $\beta_j - 1$. Подобные вершины обязаны обвинять некоторые новые рёбра C, иначе ребро B не могло бы стать одноцветным и, в свою очередь, никто не смог бы его обвинить. Добавим подобные рёбра C в качестве потомков ребра B. Если $a_B(\gamma_q) \in \mathrm{Dominant}(B)$, то положим код ребра равным $\tau(C) = (\beta_j, \gamma_q)$, причём заметим, что $\gamma_q < \beta_j$.

— Продолжаем процесс построения, пока будет возможно, формируя заодно и коды рёбер. А именно, код потомка получается из кода родителя путём добавления в код родителя номера этапа перекраски, на котором перекрашивалась доминантная вершина из их пересечения.

В результате мы получим древесную структуру, T-дерево, вершинами которого выступают рёбра гиперграфа H, а связь определяется отношениями обвинения. Листьями получившегося дерева будут как раз те рёбра гиперграфа H, которые являлись одноцветными в исходной случайной раскраске C^0. Корнем T-дерева является одноцветное ребро в раскраске C^1.

Введём понятие T-поддерева с корнем B. Для этого рассмотрим вершину $B \in T$. Пусть $N(B)$ — множество всех потомков B в T-дереве. Тогда B вместе с $N(B)$ будем называть *T-поддеревом*. Корнем T-поддерева является ребро, которое было одноцветным на некотором этапе работы алгоритма 1. Под *высотой* $h(B)$ T-поддерева с корнем B будем понимать наибольшее расстояние от вершины T-поддерева до корня B.

Подводя итоги, можно утверждать, что выполнено следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть заданы σ и случайная раскраска C^0. Если алгоритм 1 не смог построить правильную раскраску, то в гиперграфе H появилось хотя бы одно T-дерево.*

3.3. Вспомогательные утверждения о T-деревьях

Проанализируем структуру T-деревьев более детально, оформив их как серию несложных утверждений. Пусть H' — это T-дерево, получившееся в результате работы алгоритма перекраски, A — его корень, а главный цвет корня равен α.

Утверждение 2. *Коды всех рёбер, входящих в T-дерево, различны. Их главные цвета также различны.*

Доказательство. Первое очевидно из индуктивного построения, ведь каждый раз мы у потомков добавляем в код родителя разные числа. Если $\tau(B) = (s_1, \ldots, s_k)$, то главный цвет ребра B равен $\alpha - 2^{s_1-1} - \ldots - 2^{s_k-1}$. Подобные числа также различны, ведь $1 \leqslant s_k < \ldots < s_1 \leqslant x = \lfloor \log_2 r \rfloor$. $\square$

Утверждение 3. *Пусть v — вершина, обвиняющая ребро C, а B — родитель C в H'. Тогда $\{v\} = B \cap C$ — единственная вершина в пересечении.*

Доказательство. Пусть вершина v перекрашивается на этапе номер l из цвета β. Тогда в этот момент в ребре C все вершины имеют цвет β, а в ребре B такова только вершина v, ведь $v \in \mathrm{Dominant}(B)$, а стало быть, она перекрашивается из цвета β последней в B. $\square$

Утверждение 4. *Ребра H' образуют гипердерево в гиперграфе H.*

Доказательство. Связность H' очевидна по построению. Пусть рёбра B и C имеют общую вершину $w \in B \cap C$. Обозначим $\tau(B) = (s_1, \ldots, s_k)$, $\tau(C) = (t_1, \ldots, t_q)$ и будем считать, что $s_k \leqslant t_q$. Согласно утверждению 2 коды и главные цвета рёбер не совпадают. Стало быть, в начале этапа s_k вершина w имела цвет $\gamma_1 = \alpha - 2^{s_1-1} - \ldots - 2^{s_k-1}$, а в начале этапа t_q — не совпадающий с ним цвет $\gamma_2 = \alpha - 2^{t_1-1} - \ldots - 2^{t_q-1}$. Значит, $s_k < t_q$. Подобное возможно, только если она перекрасилась на некотором этапе $l \in [s_k, t_q)$ из цвета γ_1 в цвет γ_2. Следовательно, $\gamma_2 = 2^{l-1} + \gamma_1$, но снова подобное возможно тогда и только тогда, когда $l = s_k$ и $(t_1, \ldots, t_q) = (s_1, \ldots, s_{k-1})$. Последнее же означает, что ребро C является родителем ребра B, а по утверждению 3 w — их единственная общая вершина. Тем самым мы показали, что пересечения рёбер возможны только в случае, когда это в точности пара рёбер родитель-потомок, откуда автоматически следует, что H' — это гипердерево. □

Замечательно и следующее свойство T-дерева.

Утверждение 5. *Структура гипердерева H' однозначно определяет главные цвета рёбер T-дерева при фиксированном главном цвете α корня A.*

Доказательство. Ввиду утверждения 2 достаточно показать, что по структуре можно однозначно восстановить все коды рёбер.

Алгоритм 1 построен так, что если вершина v обвинила ребро B и перекрасилась на этапе номер l из цвета β, то ребро B стало одноцветным цвета β только в начале этапа с номером l, а в начале предыдущего этапа таковым не было. Тем самым l — это последняя цифра кода B.

На этапе $l-1$ некоторые из вершин ребра B перекрасились в цвет β, т. е. у B будет потомок C, бывший одноцветным в начале этапа $l-1$. Продолжая аналогичные рассуждения о C, получаем некоторую цепь $C_{l-1} = C, \ldots, C_1$, в которой C_{j-1} — это потомок C_j и j — это последняя цифра кода C_j. Отметим, что C_1 — это самая удалённая вершина от B в поддереве с корнем B. Стало быть, мы можем заключить, что последняя цифра кода ребра B — это расстояние до самой удалённой вершины в поддереве с корнем в B плюс 1, т. е. в точности $h(B)$.

Значит, мы можем восстановить последние цифры кодов всех рёбер. Но тогда найдены коды прямых потомков A, а далее индуктивно получаем и коды всех оставшихся вершин, ведь для нахождения кода достаточно знать последнюю цифру и код родителя. □

Как следствие получаем оценку на число возможных T-деревьев с заданным главным цветом корня.

Утверждение 6. *Из рёбер гиперграфа H можно составить не более чем $t \cdot \binom{|E|}{t}$ T-деревьев размера t.*

Доказательство. Возьмём произвольный неупорядоченный набор из t рёбер гиперграфа H. Выберем среди них одно ребро, которое будет соответствовать корню A. Если получившийся набор рёбер образует гипердерево, то мы получаем структуру H', а согласно утверждению 5 нет необходимости выбирать главные цвета некорневых рёбер. □

Теперь мы готовы оценить вероятность возникновения T-дерева в процессе перекраски. Первая лемма оценивает вероятность появления T-дерева размера не менее $x+1$.

Лемма 1. *Пусть H' — гипердерево размера $t \geqslant x+1$ в гиперграфе H с выделенным корнем. Тогда вероятность того, что H' образует T-дерево не превосходит*

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t} e^{2(t-1)p} p^{t-1}.$$

Доказательство. Пусть набор рёбер H' образовал T-дерево в результате работы алгоритма перекраски в применении к случайной раскраске C^0. Пусть A — корень H', выберем главный цвет A. Тогда главные цвета всех оставшихся рёбер даёт структура H'.

Пусть B — ребро H', β — его главный цвет,

$$\mathrm{Dominant}(B) = \big(a_B(\beta_1), \ldots, a_B(\beta_{s_B})\big) —$$

его доминантные вершины, а u — вершина, лежащая в пересечении B и его родителя в H' (отметим, что в корне подобной вершины нет). Пусть $\sigma\big(a_B(\beta_j)\big) = x_j(B)$, $j = 1, \ldots, s_B$, $\sigma(u) = y(B)$. Тогда для каждой вершины $v \in B \setminus (\mathrm{Dominant}(B), u)$ у нас есть следующая альтернатива:

- либо её начальный цвет равен $\beta - 2^{\beta_j - 1}$ и $\sigma(v) < x_j(B)$ для некоторого $j = 1, \ldots, s_B$, т. е. вершина успела перекраситься в цвет β до того, как это успела сделать соответствующая доминантная вершина;
- либо её начальный цвет равен β и $\sigma(v) > y(B)$, ведь вершина u обвиняет ребро B.

Отметим, что цвета $\beta - 2^{\beta_j - 1}$, $j = 1, \ldots, s_B$, — это главные цвета потомков ребра B. Кроме того, указанные события независимы для всех вершин. Стало быть, при фиксированных весах $x_1(B), \ldots, x_{s_B}(B), y(B)$, вероятность их пересечения равна

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x_1(B)}{r} + \ldots + \frac{x_{s_B}(B)}{r} + \frac{1 - y(B)}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1} \leqslant \\
&\quad\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1} e^{(n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1)(x_1(B) + \ldots + x_{s_B}(B) - y(B))} \leqslant \\
&\quad\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1} e^{n(x_1(B) + \ldots + x_{s_B}(B) - y(B)) + (|\mathrm{Dominant}(B)| + 1) y(B)} \leqslant \\
&\quad\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1} e^{n(x_1(B) + \ldots + x_{s_B}(B) - y(B)) + (|\mathrm{Dominant}(B)| + 1) p}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того, что вершина u перекрашивалась и, значит, является свободной. Для корня A вероятность выполнения всех указанных условий будет аналогичной, за исключением того, что в нём нет вершины u и условия на вес вершины v, если её начальный цвет является главным:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x_1(A)}{r} + \ldots + \frac{x_{s_A}(A)}{r} + \frac{1}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(A)|} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(A)|} e^{n(x_1(A) + \ldots + x_{s_A}(A))}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество вершин H', которые находятся в пересечении рёбер. Это в точности все доминантные вершины всех рёбер, их число равно

$t-1$. Беря произведение в приведённом выше выражения по всем рёбрам $B \in H'$, получаем

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n-|\operatorname{Dominant}(A)|} e^{n(x_1(A)+\ldots+x_{s_A}(A))} \times$$
$$\times \prod_{B\in E(H')\setminus A} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-|\operatorname{Dominant}(B)|-1} e^{n(x_1(B)+\ldots+x_{s_B}(B)-y(B))+(|\operatorname{Dominant}(B)|+1)p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{nt-t+1-t+1} e^{n\left[\sum_{v\in\mathcal{D}}\sigma(v)-\sum_{u\in\mathcal{D}}\sigma(u)\right]+2(t-1)p} = \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t+2-t} e^{2(t-1)p}.$$

Для получения итоговой оценки вероятности необходимо проинтегрировать по весам всех вершин из $\mathcal{D}$ по отрезку $[0,p]$ (множитель p^{t-1}), ведь все являются свободными, выбрать главный цвет ребра A (r способов) и вспомнить, что тогда начальные цвета всех вершин из $\mathcal{D}$ определены однозначно (множитель r^{1-t}). В итоге

$$\mathsf{P}(H' \text{ is a } T\text{-tree}) \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t} e^{2(t-1)p}p^{t-1}. \qquad \square$$

Вторая лемма рассматривает случай, когда $t < x+1$.

Лемма 2. *Пусть H' — это гипердерево размера $t < x+1$ в гиперграфе H с выделенным корнем. Тогда вероятность того, что H' образует T-дерево не превосходит*

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t} e^{2(t-1)p}p^{t-1}e^{-pn}.$$

Доказательство. Доказательство почти полностью повторяет предыдущий случай, мы только должны учесть, что при $t < x+1$ ребро A стало одноцветным своего главного цвета на этапе с номером меньше x. Значит, у него был шанс исправить ситуацию на следующем этапе, но не удалось это сделать. Это в точности означает, что все вершины из $A \setminus \operatorname{Dominant}(A)$ с начальным главным цветом оказались несвободными. Стало быть, вместо (4) получаем выражение

$$\left(\frac{x_1(A)}{r}+\ldots+\frac{x_{s_A}(A)}{r}+\frac{1-p}{r}\right)^{n-|\operatorname{Dominant}(A)|} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{n-|\operatorname{Dominant}(A)|} e^{n(x_1(A)+\ldots+x_{s_A}(A))-pn+p|\operatorname{Dominant}(A)|}.$$

Продолжая рассуждать как в лемме 1, выводим оценку искомой вероятности:

$$\mathsf{P}(H' \text{— это } T\text{-дерево}) \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t} e^{2(t-1)p}p^{t-1}e^{-pn}. \qquad \square$$

3.4. Итоги работы алгоритма перекраски

Подведём итоги работы алгоритма 1 в применении к случайной раскраске C^0. Для этого нам необходимо сначала выбрать значение параметра p. Его мы положим равным

$$p = \frac{\frac{x+1}{x}\ln n}{n}. \tag{5}$$

Тогда имеет место следующий факт.

Лемма 3. *Вероятность того, что в случайной раскраске C^1 окажется одноцветное ребро, не превосходит $10c$.*

Доказательство. Вероятность исследуемого события не превосходит математического числа T-деревьев в H. Утверждение 6 оценивает число подходящих структур, а леммы 1, 2 вероятности того, что структура является T-деревом. Собирая всё вместе, получаем, что искомая вероятность не превосходит

$$\sum_{t=1}^{x} t\binom{|E|}{t}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t} e^{2(t-1)p}p^{t-1}e^{-pn} + \sum_{t\geqslant x+1} t\binom{|E|}{t}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t} e^{2(t-1)p}p^{t-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{x} \frac{|E|^t}{(t-1)!}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t} e^{2(t-1)p}p^{t-1}e^{-pn} +$$

$$+ \sum_{t\geqslant x+1} \frac{|E|^t}{(t-1)!}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t} e^{2(t-1)p}p^{t-1} \leqslant$$

$$\overset{\substack{\text{(подставляем } p \text{ из (5)}\\ \text{и } |E| \text{ из (2))}}}{\leqslant} \sum_{t=1}^{x} \frac{(ce^{2p})^t}{(t-1)!}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{xt}{x+1}}\left(\frac{\frac{x}{x+1}\ln n}{n}\right)^{t-1} n^{-\frac{x}{x+1}} +$$

$$+ \sum_{t\geqslant x+1} \frac{(ce^{2p})^t}{(t-1)!}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{xt}{x+1}}\left(\frac{\frac{x}{x+1}\ln n}{n}\right)^{t-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{x} \frac{(ce^2)^t}{(t-1)!} n^{-\frac{t-1}{x+1}}(\ln n)^{\frac{t}{x+1}-1} + \sum_{t\geqslant x+1} \frac{(ce^2)^t}{(t-1)!}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{t}{x+1}-1} \leqslant$$

$$\overset{\substack{\text{(в первой сумме } n^{-\frac{t-1}{x+1}}(\ln n)^{\frac{t}{x+1}-1} \leqslant 1,\\ \text{во второй сумме } \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{t}{x+1}-1} \leqslant 1)}}{\leqslant} \sum_{t\geqslant 1} \frac{(ce^2)^t}{(t-1)!} \leqslant 10c$$

для подходящей малой константы $c > 0$. □

3.5. Следствие: количество перекрашенных вершин

Перейдём к обсуждению мощностей цветовых классов по итогам работы алгоритма 1. Сначала поймём, сколько вершин могло сменить свой цвет в рамках процесса перекраски. Обозначим через $X(\alpha)$ случайную величину, равную числу вершин v, перекрашенных в цвет $\alpha \in \{0, \ldots, r-1\}$ в результате работы алгоритма 1. Через $Y(\alpha)$, наоборот, обозначим случайную величину, равную числу вершин, перекрашенных из цвета α. Следующая лемма даёт оценку среднего значения величин $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$.

Лемма 4. *Математические ожидания величин $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$ не превосходят*

$$\frac{10c}{r}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor \log_2(r)\rfloor}{\lfloor \log_2(r)\rfloor+1}}.$$

Доказательство. Заметим, что если вершина v была перекрашена в цвет α в результате работы алгоритма 1, то ей соответствует некоторое T-поддерево H'. Действительно, если вершина v была перекрашена, то это произошло из-за того, что она обвиняла некоторое ребро A. Ребро A, в свою очередь, оказалось одноцветным на некотором этапе процесса перекраски. Стало быть, как и в случае анализа одноцветных рёбер в раскраске C^1, мы фактически получаем структуру T-поддерева H' с корнем A. Единственное отличие: ребро A теперь не является одноцветным по итогу работы алгоритма. Заметим, что главный цвет ребра A в H' равен в точности $(\alpha - 2^{h(A)-1}) \pmod r$, где $h(A)$ — высота H'. Тем самым величина $X(\alpha)$ не превосходит числа подобных поддеревьев, и задача свелась к оцениванию математического ожидания числа T-поддеревьев, у которых главный цвет корня заранее определён.

Для этого мы воспользуемся оценкой вероятности появления T-дерева из леммы 1. Фактически она оценивает вероятность появления T-поддерева, корень которого оказался одноцветным по итогам некоторого этапа алгоритма 1. Оценка также работает для поддеревьев всех размеров, а не только $t > x+1$, как это формулируется в лемме 1. Не забудем также, что главный цвет корня выбирать не нужно. В итоге

$$\mathsf{E}X(\alpha) \leqslant \sum_{t\geqslant 1} t\binom{|E|}{t}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t+1} e^{2(t-1)p}p^{t-1} \leqslant$$

$$\overset{\substack{\text{(подставляем } p \text{ из (5),}\\ |E| \text{ из (2)}\\ \text{и } x=\lfloor \log_2 r\rfloor)}}{\leqslant} \sum_{t\geqslant 1}\frac{(ce^{2p})^t}{r(t-1)!}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{xt}{x+1}}\left(\frac{\frac{x}{x+1}\ln n}{n}\right)^{t-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t\geqslant 1}\frac{(ce^2)^t}{r(t-1)!}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{t}{x+1}-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor \log_2(r)\rfloor}{\lfloor \log_2(r)\rfloor+1}} \sum_{t\geqslant 1}\frac{(ce^2)^t}{(t-1)!}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{t}{x+1}-\frac{1}{x+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{10c}{r}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor \log_2(r)\rfloor}{\lfloor \log_2(r)\rfloor+1}}.$$

Последнее неравенство следует из того, что

$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{t}{x+1}-\frac{1}{x+1}} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \sum_{t\geqslant 1}\frac{(ce^2)^t}{(t-1)!} \leqslant 10c.$$

Математическое ожидание величины $Y(\alpha)$ оценивается аналогично. □

4. Построение справедливой раскраски

Согласно лемме 3 раскраска C^1 является правильной для H с положительной вероятностью. Однако мощности цветовых классов в C^1 могут отличаться от m/r. Наша следующая цель — построить правильную сбалансированную раскраску (справедливую!) из правильной раскраски C^1.

Совершенно понятно, что для реализации данной цели достаточно немного подправить цветовые классы раскраски C^1. Для этого вершины из цветовых классов, в которых много вершин, мы будем перекрашивать в цвета, цветовые классы которых имеют мощности меньше m/r.

4.1. Вспомогательные утверждения о недостатке и избытке

Пусть $K_0, \ldots, K_{r-1}$ — цветовые классы случайной раскраски C^1. Определим для каждого цветового класса K_α неотрицательные целые числа ex_α и sh_α, где ex_α — величина избытка, т. е. на сколько вершин цвета α больше, чем m/r, а sh_α — величина недостатка. Формально

$$\mathrm{ex}_\alpha = \begin{cases} |K_\alpha| - \frac{m}{r}, & \text{если } \ |K_\alpha| - \frac{m}{r} > 0; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathrm{sh}_\alpha = \begin{cases} \frac{m}{r} - |K_\alpha|, & \text{если } \ \frac{m}{r} - |K_\alpha| > 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующая лемма оценивает количества избытков и недостатков.

Лемма 5. *Вероятность того, что в случайной раскраске C^1 найдётся цвет α, для которого $\mathrm{ex}_\alpha > q/2$, не превосходит $21c$ при*

$$q = \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor \log_2(r)\rfloor}{\lfloor \log_2(r)+1\rfloor}} + 2\sqrt{\frac{3m\ln(r/c)}{r}}. \tag{6}$$

То же самое верно и при замене ex_α на sh_α.

Доказательство. Напомним, что мы обозначили через $X(\alpha)$ случайную величину, равную числу вершин v, перекрашенных в цвет α в результате работы алгоритма 1. Для каждого цветового класса α раскраски C^0 обозначим через Z_α его мощность. Ясно, что Z_α имеет биномиальное распределение $\mathrm{Bin}(m, 1/r)$.

Суммируя вышесказанное, получаем, что для каждого цвета α выполнено, что

$$\mathrm{ex}_\alpha \leqslant X(\alpha) + \left(Z_\alpha - \frac{m}{r}\right).$$

Далее применим неравенство Чернова, которое утверждает, что для любой биномиальной случайной величины X и любого $z > 0$ выполнено

$$\mathsf{P}(X > \mathsf{E}X + z) \leqslant \exp\left(-\frac{z^2}{2(\mathsf{E}X + \frac{z}{3})}\right).$$

Применим его для

$$z = \sqrt{\frac{3m\ln(\frac{r}{c})}{r}}.$$

Заметим, что в силу исходных ограничений на параметры r и c выполнено $z < m/(2r)$. Стало быть,

$$\mathsf{P}\left(\exists\alpha\colon Z_\alpha > \frac{m}{r} + z\right) \leqslant r\exp\left(-\frac{z^2}{2(\frac{m}{r} + \frac{z}{3})}\right) < \\ < r\exp\left(-\frac{z^2}{2\cdot\frac{7m}{6r}}\right) = r\exp\left(-\frac{9\ln(\frac{r}{c})}{7}\right) < \frac{cr}{r} = c.$$

Тогда для выбранного параметра q из последнего соотношения и леммы 4 следует, что

$$\mathsf{P}\left(\exists\alpha\colon \mathrm{ex}_\alpha > \frac{q}{2}\right) \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}\left(\exists\alpha\colon Z_\alpha > \frac{m}{r} + z\right) + \mathsf{P}\left(\exists\alpha\colon X(\alpha) > \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor\log_2(r)\rfloor}{\lceil\log_2(r)+1\rceil}}\right) \leqslant \\ \leqslant c + \sum_{\alpha=0}^{r-1}\frac{\mathsf{E}X(\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{\lfloor\log_2(r)\rfloor}{\lceil\log_2(r)+1\rceil}}} \leqslant c + 20c = 21c.$$

Совершенно аналогично получается и оценка вероятности, что найдётся цвет α с условием $\mathrm{sh}_\alpha > q/2$. Здесь мы пользуемся тем, что

$$\mathrm{sh}_\alpha < Y(\alpha) + \left(\frac{m}{r} - Z_\alpha\right),$$

а затем снова применяем неравенство Чернова и лемму 4. □

4.2. Алгоритм 2: построение сбалансированной раскраски

Перейдём к восстановлению баланса цветов. Наш план будет следующим. Мы хотим показать, что внутри каждого цветового класса K_α раскраски C^1 можно будет выбрать такое подмножество W_α размера ex_α, что

1) ни одна из вершин W_α не перекрасилась в рамках работы алгоритма 1;
2) произвольная перекраска множеств W_α не создаст одноцветных рёбер.

Если такой выбор подмножеств возможен, то для исправления баланса цветов можно будет использовать следующий алгоритм.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Пусть цвет i — это первый цвет в недостатке. Берём такое минимальное t, что выполнено

$$\mathrm{ex}_0+\mathrm{ex}_2+\ldots+\mathrm{ex}_t \geqslant \mathrm{sh}_i.$$

В каждом множестве W_s, $s<t$, перекрашиваем в цвет i первые ex_s вершин. В последнем множестве W_t перекрашиваем в цвет i первые $\mathrm{sh}_t-(\mathrm{ex}_1+\mathrm{ex}_2+\ldots+\mathrm{ex}_{t-1})$ вершин. После подобной перекраски мощности тех цветовых классов среди $K_0,\ldots,K_{t-1}$, у которых избыток был положителен, а также K_i становятся равными m/r (может быть, $i\in\{0,1\ldots,t-1\}$). Мы теперь полагаем

$$\mathrm{ex}_0=0,\ \mathrm{ex}_2=0,\ldots,\ \mathrm{ex}_t=\mathrm{ex}_t-\bigl(\mathrm{sh}_t-(\mathrm{ex}_1+\mathrm{ex}_2+\ldots+\mathrm{ex}_{t-1})\bigr).$$

На этом шаг 1 заканчивается.

Шаг 2. Берём следующий цвет, который находится в недостатке. Делаем то же самое, что и на шаге 1. Множества, из которых мы теперь набираем вершины, отличаются от $W_1,\ldots,W_{t-1}$, за исключением множества W_t.

Для обоснования существования (с положительной вероятностью) подходящего набора множеств мы рассмотрим случайное подмножество $V_\alpha\subset K_\alpha$, $\alpha=0,\ldots,r-1$, построенное согласно следующей биномиальной схеме: с вероятностью

$$\tilde p=\frac{4rq}{m} \tag{7}$$

каждый элемент K_α независимо от других входит в V_α.

Какие вершины K_α не подойдут нам в качестве кандидатов в W_α? Ясно, что не подойдут те, кто получил цвет α в рамках процесса перекраски. Число таких вершин равно $X(\alpha)$. Вторая группа вершин — это те, чья перекраска может привести к одноцветному ребру в других цветах. Такая ситуация возникает, если имеется ребро A и такое подмножество вершин $U(A)\subset A$, что

— все вершины $A\setminus U(A)$ покрашены в цвет β в раскраске C^1;

— все вершины $U(A)$ попали в $\bigcup\limits_{\alpha=0}^{r-1} V_\alpha$.

В этом случае мы не хотим взять $U(A)$ полностью в $\bigcup\limits_{\alpha=0}^{r-1} W_\alpha$. Пару $\bigl(A,U(A)\bigr)$ будем называть *опасной*. Пусть Q — это число опасных пар. Наконец, нам необходимо будет перекрасить ex_α вершин.

В итоге для обоснования существования искомых множеств $W_0,\ldots,W_{r-1}$ достаточно показать, что с положительной вероятностью будут выполнены следующие условия:

1) раскраска C^1 не содержит одноцветных рёбер;
2) $|V_\alpha|>Q+X(\alpha)+\mathrm{ex}_\alpha$ для всех $\alpha=0,\ldots,r-1$.

Мы уже показали, что с вероятностью не менее $1-21c$ все величины ex_α и $X(\alpha)$ будут меньше $q/2$ одновременно для всех цветов. Остаётся лишь оценить Q и мощности $|V_\alpha|$.

4.3. Опасные пары и T-сложные деревья

Пусть $\big(A, U(A)\big)$ — это опасная пара, а множество $A' = A \setminus U(A)$ покрашено в цвет β в раскраске C^1. Тогда A' можно рассмотреть как одноцветное «ребро» по итогам работы алгоритма 1, а потому к нему применимы все рассуждения раздела 3 про построение T-деревьев. Можно определить доминантный набор вершин $\mathrm{Dominant}(A')$, а для него — набор рёбер $B_1, \ldots, B_s$, которых обвиняют эти доминантные вершины $\mathrm{Dominant}(A')$.

Начнём построение конфигурации рёбер H, которую мы назовём *T-сложным деревом.*

- Зафиксируем A' и неупорядоченный набор рёбер $B_1, \ldots, B_s$. Теперь в качестве корня мы возьмем псевдоребро A', а его потомками будут все рёбра $B_1, \ldots, B_s$. Как и раньше, если $a(b_j) \in \mathrm{Dominant}(A')$ обвиняет ребро B, то положим код ребра $\tau(B) = (\beta_j)$.
- После этого мы строим уже обычные T-поддеревья с корнями $B_1, \ldots, B_s$. На этом процесс построения заканчивается.

Обозначим получившееся T-сложное дерево через $H' = H'(A, U(A), B_1, \ldots, B_s)$. Тем самым обосновано следующее утверждение.

Утверждение 7. *Число опасных пар не превосходит числа T-сложных деревьев.*

Заметим, что по построению для H' верны все утверждения для T-деревьев из раздела 3.3, образованные $B_1, \ldots, B_s$ поддеревья не пересекаются, а A' и оставшиеся рёбра образуют гипердерево (но уже неоднородное). Более того, остаётся верным следующее утверждение.

Утверждение 8. *Структура $H'(A, U(A), B_1, \ldots, B_s)$ однозначно определяет главные цвета рёбер T-сложного дерева при фиксированном главном цвете β корня A.*

Само $H'(A, U(A), B_1, \ldots, B_s)$ не обязано быть гипердеревом, ввиду того что $U(A)$ может иметь непустое пересечение с $N(B_i)$, $i = 1, \ldots, s$.

По аналогии с T-деревьями можно получить оценку на число возможных T-сложных деревьев с заданным главным цветом корня.

Утверждение 9. *Для фиксированной пары $\big(A, U(A)\big)$ из рёбер гиперграфа H можно составить не более чем $\binom{|E|}{t}$ T-сложных деревьев размера t.*

Доказательство. Корень $A' = A \setminus U(A)$ уже дан, далее повторяем рассуждения из доказательства утверждения 6. □

Теперь оценим вероятность того, что конкретный набор рёбер образует T-сложное дерево.

Лемма 6. *Конфигурация* $H' = H'(A, U(A), B_1, \ldots, B_s)$ *из* $(t+1)$*-го ребра образует* T*-сложное дерево с вероятностью, не превосходящей*

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(t+1)} e^{2tp} p^t (r\tilde{p})^{|U(A)|}.$$

Доказательство. В целом повторяем доказательство леммы 1.

Пусть B — ребро H', не являющееся корнем дерева, γ — его главный цвет, $\mathrm{Dominant}(B) = \big(a_B(\gamma_1), \ldots, a_B(\gamma_{s_B})\big)$ — его доминантные вершины, а u — вершина, лежащая в пересечении B и его родителя в H'. Пусть $\sigma\big(a_B(\gamma_j)\big) = x_j(B)$, $j = 1, \ldots, s_B$, $\sigma(u) = y(B)$. Тогда для каждой вершины $v \in B \setminus (\mathrm{Dominant}(B), u)$ у нас есть следующая альтернатива:

— либо её начальный цвет равен $\gamma - 2^{\gamma_j - 1}$ и $\sigma(v) < x_j(B)$ для некоторого $j = 1, \ldots, s_B$, т. е. вершина успела перекраситься в цвет γ до того, как это успела сделать соответствующая доминантная вершина;

— либо её начальный цвет равен γ и $\sigma(v) > y(B)$, ведь вершина u обвиняет ребро B.

Отметим, что цвета $\gamma - 2^{\gamma_j - 1}$, $j = 1, \ldots, s_B$, — это главные цвета потомков ребра B. Кроме того, указанные события независимы для всех вершин. Стало быть, при фиксированных весах $x_1(B), \ldots, x_{s_B}(B), y(B)$ вероятность их пересечения равна

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x_1(B)}{r} + \ldots + \frac{x_{s_B}(B)}{r} + \frac{1 - y(B)}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1} \leqslant \\
&\quad \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1} e^{(n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1)(x_1(B) + \ldots + x_{s_B}(B) - y(B))} \leqslant \\
&\quad \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1} e^{n(x_1(B) + \ldots + x_{s_B}(B) - y(B)) + (|\mathrm{Dominant}(B)| + 1) y(B)} \leqslant \\
&\quad \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{n - |\mathrm{Dominant}(B)| - 1} e^{n(x_1(B) + \ldots + x_{s_B}(B) - y(B)) + (|\mathrm{Dominant}(B)| + 1) p}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того факта, что вершина u перекрашивалась и, значит, является свободной. Для корня A' вероятность выполнения всех указанных условий будет аналогичной, за исключением того, что в нём нет вершины u и условия на вес вершины v, если её начальный цвет является главным. Кроме того, его мощность теперь не равна n:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x_1(A')}{r} + \ldots + \frac{x_{s_{A'}}(A')}{r} + \frac{1}{r}\right)^{|A'| - |\mathrm{Dominant}(A')|} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{|A'| - |\mathrm{Dominant}(A')|} e^{n(x_1(A') + \ldots + x_{s_{A'}}(A'))}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество вершин, которые находятся в пересечении рёбер гипердерева A' и $E(H') \setminus A$. Это в точности все доминантные вершины всех рёбер, их число равно t. Беря произведение в приведённых выше выражениях по всем рёбрам, получаем

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{|A'|-|\operatorname{Dominant}(A')|} e^{n(x_1(A')+\ldots+x_{s_{A'}}(A'))} \times$$
$$\times \prod_{B\in E(H')\setminus A} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-|\operatorname{Dominant}(B)|-1} e^{n(x_1(B)+\ldots+x_{s_B}(B)-y(B))+(|\operatorname{Dominant}(B)|+1)p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{nt-2t+|A'|} e^{n\left[\sum_{v\in\mathcal{D}}\sigma(v)-\sum_{u\in\mathcal{D}}\sigma(u)\right]+2tp} = \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t+|A'|-t} e^{2tp}.$$

Далее необходимо проинтегрировать по весам всех вершин из $\mathcal{D}$ по отрезку $[0,p]$ (множитель p^t), ведь все они являются свободными, выбрать главный цвет ребра A' (r способов), вспомнить, что тогда начальные цвета всех вершин из $\mathcal{D}$ определены однозначно (множитель r^{-t}). Получим

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t+|A'|-1} e^{2tp}p^t.$$

Остаётся разобраться с $U(A)$. Каждая вершина из пересечения

$$U' = U(A) \cap \bigcup_{B\in E(H')\setminus A} B$$

уже получила свой начальный цвет, и на них есть только условие попадания в соответствующее множество V_α (множитель $\tilde{p}^{|U'|}$). Вершины из $U(A)\setminus U'$ могут иметь любой цвет в качестве начального, не совпадающий с главным цветом A, и также должны попасть в соответствующее множество V_α (множитель $\left((1-1/r)\tilde{p}\right)^{|U(A)\setminus U'|}$). Тем самым

$$\mathsf{P}\left(H' \text{ — это } T\text{-сложное дерево}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t+|A'|-1} e^{2tp}p^t\tilde{p}^{|U(A)|}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{|U(A)|-|U'|} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)t+n-1} e^{2tp}p^t(r\tilde{p})^{|U(A)|}. \qquad \square$$

Теперь мы готовы оценить математическое ожидание числа опасных пар.

Лемма 7.

$$\mathsf{E}Q \leqslant 10c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}} e^{r\tilde{p}n}.$$

Доказательство. Применяя лемму 6 и утверждение 8, получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}Q &\leqslant \sum_{A\in E}\sum_{U(A)\neq\varnothing}\sum_{t\geqslant 0}\binom{|E|}{t}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(t+1)} e^{2tp}p^t(r\tilde{p})^{|U(A)|} \leqslant \\
&\leqslant |E|\sum_{t\geqslant 0}\binom{|E|}{t}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(t+1)} e^{2tp}p^t(1+r\tilde{p})^n \leqslant \\
&\leqslant (1+r\tilde{p})^n|E|r^{1-n}\sum_{t\geqslant 0}\frac{(|E|r^{1-n}e^{2p}p)^t}{t!} \leqslant \\
&\overset{\text{используем (2), (5)}}{\leqslant} e^{r\tilde{p}n}c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}}\sum_{t\geqslant 0}\frac{(ce^{2p})^t}{t!} \leqslant 10c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}} e^{r\tilde{p}n}. \qquad \square
\end{aligned}$$

5. Завершение доказательства теоремы 1

Подведём итоги.

1. Мы показали, что вероятность того, что в раскраске C^1 найдутся одноцветные рёбра, не превосходит $10c$ (лемма 3).

2. Вероятность того, что найдётся цвет α с условием, что либо $\mathrm{ex}_\alpha > q/2$, либо $X(\alpha) > q/2$, не превосходит $21c$ (лемма 5).

3. Вероятность того, что найдётся цвет α с условием, что $Y(\alpha) > q/2$, не превосходит $21c$ (лемма 5).

4. Поймём порядок числа опасных пар Q. Согласно лемме 7

$$\mathsf{P}(Q > q) \leqslant \frac{\mathsf{E}Q}{q} \leqslant \frac{10c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}} e^{r\tilde{p}n}}{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}} + 2\sqrt{\frac{3m\ln(r/c)}{r}}} \leqslant \frac{5c\sqrt{r}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}}}{\sqrt{3m\ln\left(\frac{r}{c}\right)}}e^{r\tilde{p}n}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
rn\tilde{p} = \frac{4r^2nq}{m} &\leqslant \frac{12r^2n\sqrt{\frac{3m\ln(r/c)}{r}}}{m} \leqslant \\
&\overset{\text{воспользуемся тем, что } m\geqslant rn^2/(8\ln n)}{\leqslant} \frac{12r^{3/2}n\sqrt{3\ln\left(\frac{r}{c}\right)}}{\sqrt{\frac{rn^2}{8\ln n}}} \leqslant (24\sqrt{6})r\sqrt{\ln\left(\frac{r}{c}\right)\ln n}.
\end{aligned}$$

Покажем теперь, что

$$(24\sqrt{6})r\sqrt{\ln\left(\frac{r}{c}\right)\ln n} \leqslant \frac{\ln n}{\log_2 r + 1}.$$

Действительно,

$$(24\sqrt{6})r\sqrt{\ln r}(\log_2 r+1)\leqslant(48\sqrt{6}\log_2 e)r(\ln r)^{3/2}\leqslant$$

$$\overset{\substack{\text{по условию теоремы}\\ r\leqslant\sqrt{\frac{\ln n}{\ln\frac{1}{c}(\ln\ln n)^3}}}}{\leqslant}\quad(48\sqrt{6}\log_2 e)\sqrt{\frac{\ln n}{\ln\frac{1}{c}(\ln\ln n)^3}}\left(\frac{\ln\ln n}{2}\right)^{3/2}\leqslant\sqrt{\ln n}$$

при подходящем выборе малой константы c. Отсюда следует, что

$$\mathsf{P}(Q>q)\leqslant\frac{5c\sqrt{r}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}}}{\sqrt{3m\ln\left(\frac{r}{c}\right)}}e^{r\tilde{p}n}\leqslant\frac{5c\sqrt{r}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}}}{\sqrt{3m\ln\left(\frac{r}{c}\right)}}e^{\frac{\ln n}{\log_2 r+1}}\leqslant$$

$$\overset{\substack{\text{воспользуемся тем, что } m\geqslant\frac{rn^2}{8\ln n}\\ \text{и } \frac{x}{x+1}=\frac{\lfloor\log_2 r\rfloor}{\lfloor\log_2 r\rfloor+1}\geqslant\frac{1}{2}}}{\leqslant}\quad\frac{5c\sqrt{r}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{x}{x+1}}}{\sqrt{\frac{3\ln(r/c)rn^2}{8\ln n}}}e^{\frac{\ln n}{\log_2 r+1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{10c(\ln n)^{\frac{1}{2}-\frac{x}{x+1}}}{n^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{6\ln\left(\frac{r}{c}\right)}}n^{\frac{1}{x+1}}\leqslant\frac{5c}{\ln\left(\frac{1}{c}\right)}$$

для всех достаточно больших n.

5. Осталось разобраться с мощностями $|V_\alpha|$. Обозначим через w_α количество вершин, имевших цвет α в исходной раскраске C^0, а затем попавших в множество $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha$. Каждая такая случайная величина имеет биномиальное распределение $\mathrm{Bin}(m,\frac{\tilde{p}}{r})$ со средним $m\frac{\tilde{p}}{r}=4q$. Тогда из неравенства Чернова получаем, что

$$\mathsf{P}(w_\alpha<3q)=\mathsf{P}(w_\alpha<\mathsf{E}w_\alpha-q)\leqslant e^{-\frac{q^2}{8q}}=e^{-\frac{q}{8}}\leqslant\frac{1}{3r}$$

в силу условия на r. Значит, с вероятностью не менее $2/3$ все w_α будут не менее $3q$. Заметим, что $|V_\alpha|>w_\alpha-Y(\alpha)$.

Тем самым с вероятностью не менее

$$\frac{2}{3}-21c-21c-10c-\frac{5c}{\ln\left(\frac{1}{c}\right)}$$

(которая положительна при малом c) для каждого цвета α будет выполнено искомое соотношение

$$\mathrm{ex}_\alpha+Q+X(\alpha)\leqslant 2q<3q-\binom{q}{2}<w_\alpha-Y(\alpha)\leqslant|V_\alpha|.$$

Значит, мы сможем выбрать искомые множества W_α, перекрасив которые согласно алгоритму 2, мы получим справедливую раскраску гиперграфа H. Теорема 1 доказана.

Литература

[1] Акользин И. А. О справедливых раскрасках простых гиперграфов // Тр. МФТИ. — 2017. — Т. 9, № 4. — С. 161—173.

[2] Демидович Ю. А., Райгородский А. М. Двухцветные раскраски однородных гиперграфов // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 4. — С. 623—626.

[3] Akhmejanova M., Shabanov D. A. Colorings of b-simple hypergraphs // Electron. Notes Discrete Math. — 2017. — Vol. 61. — P. 29—35.

[4] Akolzin I. A., Shabanov D. A. Colorings of hypergraphs with large number of colors // Discrete Math. — 2016. — Vol. 339, no. 12. — P. 3020—3031.

[5] Cherkashin D. A note on panchromatic colorings // Discrete Math. — 2018. — Vol. 341, no. 3. — P. 652—657.

[6] Cherkashin D., Kozik J. A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs // Random Struct. Algorithms. — 2015. — Vol. 47, no. 3. — P. 407—413.

[7] Erdős P. On a combinatorial problem, II // Acta Math. Academy of Sciences, Hungary. — 1964. — Vol. 15, no. 3-4. — P. 445—447.

[8] Erdős P. Problem 9 // Theory of Graphs and Its Applications / M. Fieldler, ed. — Prague: Czech. Acad. Sci. Publ., 1964. — P. 159.

[9] Hajnal A., Szemeredi E. Proof of a conjecture of P. Erdős // Combinatorial Theory and Its Applications. Vol. 2. — London: North-Holland, 1969. — P. 601—623.

[10] Kostochka A. V. Coloring uniform hypegraphs with few colors // Random Structures Algorithms. — 2010. — Vol. 24. — P. 1—10.

[11] Raigorodskii A. M., Shabanov D. A. The Erdős—Hajnal problem of hypergraph colouring, its generalizations and related problems // Russ. Math. Surv. — 2011. — Vol. 66, no. 5. — P. 933—1002.

[12] Shabanov D. A. Equitable two-colorings of uniform hypergraphs // Eur. J. Combin. — 2015. — Vol. 43. — P. 185—203.