Оценивание в моделях разладки

Л. БАИ
Университет Лозанны, Швейцария
e-mail: Long.Bai@unil.ch

УДК 519.218

Ключевые слова: гауссовские поля, константа Пикандса, константа Питербарга, модель разладки.

Аннотация

Исследуются асимптотики вероятностей высоких экстремумов гауссовских полей в контексте их применения в моделях разладки. С использованием выражений для вероятностей высоких экстремумов строятся критерии правдоподобия высокого уровня значимости и соответствующие оценки момента разладки, т. е. момента изменения распределения в выборке.

Abstract

L. Bai, Estimation of change-point models, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 51—73.

We consider the testing and estimation of change-points, locations where the distribution abruptly changes, in a sequence of observations. Motivated by this problem, in this contribution we first investigate the extremes of Gaussian fields with trend, which then help us give asymptotic p-value approximations of the likelihood ratio statistics from change-point models.

1. Введение

Статистические модели разладки возникли первоначально в задачах контроля качества, когда в последовательности наблюдений некоторого показателя качества в какие-то моменты происходит уход от нормы μ_0 наблюдаемого показателя и требуется определить эти моменты — моменты разладки. Имеется обширная литература по последовательному статистическому оцениванию момента разладки (см. [3, 24, 26]). Обзор последних результатов в этом направлении можно найти в [18, 19]. В [25] предложен предварительный отбор нескольких множеств, где возможны разладки, после этого отбора строится модель для принятия окончательного решения.

Опишем теперь рассматриваемую здесь модель разладки (подробные описания см. также в [21—23, 29]). Примем для простоты, что X_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, —

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 51—73.

независимые нормально распределённые случайные величины с математическими ожиданиями μ_i и единичными дисперсиями. Мы рассматриваем задачу проверки гипотезы

$$\mathbf{H}_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m (= \mu_0)$$

против альтернативы

$$\mathbf{H}_1\colon \text{найдутся } 1 \leqslant \rho_1 < \rho_2 \leqslant m, \text{ такие что } \mu_1 = \ldots = \mu_{\rho_1} = \mu_0,$$
$$\mu_{\rho_1+1} = \ldots = \mu_{\rho_2} = \mu_0 + \delta,\ \mu_{\rho_2+1} = \ldots = \mu_m = \mu_0.$$

Обозначим

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} X_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Если предположить, как в [21], что μ_0 и δ известны, то отношение правдоподобия для проверки H_0 против H_1 имеет вид

$$Z_1 = \delta \max_{0 \leqslant i < j \leqslant m} \left[S_j - j\mu_0 - (S_i - i\mu_0) - (j-i)\frac{\delta}{2} \right] = \max_{0 \leqslant i < j \leqslant m} [\tilde{S}_j - \tilde{S}_i],$$

где

$$\tilde{S}_i = \delta \left[S_i - i\left(\mu_0 + \frac{\delta}{2} \right) \right].$$

Если же μ_0 неизвестно, единственный способ решения предложен в [23]: замена μ_0 на его оценку S_m/m при верной H_0. Это приводит к следующей статистике:

$$Z_2 = \delta \max_{0 \leqslant i < j \leqslant m} \left[S_j - j\frac{S_m}{m} - \left(S_i - i\frac{S_m}{m} \right) - (j-i)\frac{\delta}{2} \right].$$

В [23] вместо нормального распределения берутся распределения Пуассона или Бернулли. Поскольку μ_0 является мешающим параметром, предлагается рассматривать условное распределение Z_2 при условии заданного S_m. Для нормального распределения условное и безусловное распределения Z_2 равны, однако в других случаях вычисление условного распределения является важной частью решения задачи.

Альтернативный подход состоит в максимизации отношения правдоподобия по μ_0, ρ_1 и ρ_2. Это приводит к статистике

$$Z_3 = \delta \max_{0 \leqslant i < j \leqslant m} \left[S_j - S_i - (j-i)\frac{S_m}{m} - \frac{1}{2}\delta(j-i) \times \left(1 - \frac{j-i}{m} \right) \right]. \tag{1}$$

Если и δ неизвестно, то можно брать как Z_2, так и Z_3, взятые при минимальном значении δ_0, которое ещё можно рассматривать как дефект показателя надёжности, или же просто максимизировать (1) и по δ, т. е.

$$Z_4 = \max_{0 \leqslant i < j \leqslant m} \frac{[S_j - S_i - (j-i)S_m/m]^+}{[(j-i) \times (1 - (j-i)/m)]^{1/2}},$$

где $x^+ = \max(x, 0)$. Каждая из этих статистик является максимумом некоторого гауссовского поля. Для того чтобы оценить уровень значимости p критерия, важно знать асимптотику хвоста распределения максимума соответствующих гауссовских полей.

Учитывая свойство автомодельности гауссовского случайного блуждания, преобразуем Z_2 следующим образом:

$$\mathbb{P}\{Z_2 > dn\} = \mathbb{P}\left\{\delta \max_{0\leqslant i<j\leqslant m}\left[S_j - j\frac{S_m}{m} - \left(S_i - i\frac{S_m}{m}\right) - (j-i)\frac{\delta}{2}\right] > dn\right\} =$$
$$= \mathbb{P}\left\{\max_{(s,t)\in S_d}\left[(S_t - S_s) - (t-s)S_1 - \frac{\delta}{2}(t-s)\sqrt{m}\right] > \frac{dn}{\delta\sqrt{m}}\right\},$$

где $d, n > 0$ и

$$\mathcal{S}_d = \left\{(s,t)\colon s = \frac{i}{m},\ t = \frac{j}{m},\ i,j = 1,\ldots,m.\right\}.$$

Теперь мы можем рассмотреть приближённую задачу: оценить вероятность

$$p_2(n) := \mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\left(\big(B(t) - B(s)\big) - (t-s)B(1) - c(t-s)\sqrt{m} > d\frac{n}{\sqrt{m}}\right)\right\}$$

для больших n, где $B(t)$ — стандартное броуновское движение, c и d — положительные константы и

$$\mathcal{S} = \{(s,t)\colon 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Поскольку $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}_d$, вероятность $p_2(n)$ является оценкой сверху вероятности $\mathbb{P}\{Z_2 > dn\}$.

Вероятность, соответствующая статистике Z_1, равна

$$p_1(d) := \mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\big(B(t) - B(s)\big) - c(t-s) > d\right\} =$$
$$= \mathbb{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\big(B(t) - ct\big) > d\right\} = \Psi(d+c) + e^{-2cd}\Psi(d-c),$$

где $\Psi(\cdot)$ — функция надёжности (хвост распределения для $\mathcal{N}(0,1)$), а последнее равенство — хорошо известный результат из [14]. Аналогично для вероятностей, соответствующих Z_3 и Z_4, имеем, что

$$p_3(n) :=$$
$$:= \mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\big(B(t) - B(s)\big) - (t-s)B(1) - c(t-s)\times\big(1-(t-s)\big)\sqrt{m} > d\frac{n}{\sqrt{m}}\right\},$$

и

$$p_4(d) := \mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\frac{\big(B(t) - B(s)\big) - (t-s)B(1)}{\sqrt{(t-s)\times\big(1-(t-s)\big)}} > d\right\}.$$

В разделе 3 приводятся асимптотические оценки для $p_i(n)$, $i = 2, 3$, для двух разных сценариев: параметр n большой, при этом $n = m$, и параметры n и m меняются независимо, при этом в вероятности $p_4(d)$ уровень d остаётся большим.

Поскольку мы отметили, что распределения статистик Z_i, $i = 1, 2, 3, 4$, определяются как решения задачи первого достижения для гауссовских случайных полей, в первую очередь мы приводим в разделе 2 общие результаты для максимумов гауссовских полей со сносами.

Структура остальной части работы следующая: в разделе 2 приводятся асимптотики хвоста распределения супремума для семейства полей со сносами. Раздел 3 посвящён применениям этих результатов. Наконец, доказательства приведены в разделе 4.

2. Основные результаты

Введём необходимые обозначения. Для чисел $\lambda, \lambda_1 > 0$ и некоторой непрерывной функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначим

$$\mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)} := \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)}(\lambda, \lambda) \in (0, \infty),$$

$$\mathcal{Q}_\alpha := \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{Q}_\alpha(\lambda, \lambda) \in (0, \infty),$$

$$\mathcal{H}_\alpha := \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \mathcal{H}_\alpha(\lambda) \in (0, \infty),$$

где

$$\mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)}(\lambda, \lambda_1) := \mathbb{E}\left\{ \sup_{0\leqslant s\leqslant\lambda,\ |s-t|\leqslant\lambda_1} e^{\sqrt{2}(B_\alpha^{(1)}(s)+B_\alpha^{(2)}(t))-|s|^\alpha-|t|^\alpha-f(s-t)} \right\},$$

$$\mathcal{Q}_\alpha(\lambda, \lambda_1) := \mathbb{E}\left\{ \sup_{0\leqslant s\leqslant\lambda,\ 0\leqslant s-t\leqslant\lambda_1} e^{\sqrt{2}(B_\alpha^{(1)}(s)+B_\alpha^{(2)}(t))-|s|^\alpha-|t|^\alpha} \right\},$$

$$\mathcal{H}_\alpha(\lambda) := \mathbb{E}\left\{ \sup_{0\leqslant t\leqslant\lambda} e^{\sqrt{2}B_\alpha(t)-|t|^\alpha} \right\}.$$

Через $B_\alpha^{(1)}(t)$, $B_\alpha^{(2)}(t)$, $B_\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}$, здесь обозначены независимые стандартные дробные броуновские движения с параметром Хёрста $\alpha \in (0, 2]$. Свойства этих констант, включая их положительность и конечность, рассмотрены в [1, 2, 5—10, 13, 15—17, 20, 27]. Здесь и далее знак $\sim$ обозначает асимптотическую эквивалентность, кроме того, $(x)_+ = \max(x, 0)$ и $\mathbb{I}_{\{\cdot\}}$ — индикаторная функция.

Теорема 1. *Пусть* $X(s,t)$, $(s,t) \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E} = \{(s,t)\colon s \in [S_1, S_2],\ |s-t| < T\}$, $0 < T \leqslant S_1 < S_2$, *— центрированное гауссовское поле с непрерывными траекториями, функцией дисперсии* σ^2 *и функцией корреляции* r. *Предположим, что* $\sigma(s,t)$ *достигает на множестве* $\mathcal{E}$ *своего максимума, равного* 1, *во всех точках множества*

$$(s,t) \in \mathcal{L} = \{(s,t)\colon (s,t) \in \mathcal{E},\ s-t=0\},$$

при этом для некоторых $b > 0$ *и* $\beta \in (0, 2]$ *имеет место соотношение*

$$1 - \sigma(s,t) \sim b|s-t|^\beta, \quad |s-t| \to 0. \tag{2}$$

Предположим также, что для некоторых $a > 0$, $\alpha \in (0, 2]$ выполнено соотношение

$$1 - r(s, t, s', t') \sim a(|s - s'|^\alpha + |t - t'|^\alpha), \quad |s - s'|, |t - t'|, |s - t|, |s' - t'| \to 0, \quad (3)$$

а соотношение

$$r(s, t, s', t') < 1 \quad (4)$$

выполняется при $(s, t), (s', t') \in \mathcal{E}$, $(s, t) \neq (s', t')$. Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ при $u \to \infty$ выполнено

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{(s,t)\in\mathcal{E}} \big(X(s, t) - c(s - t)\big) > u \Big\} \sim \mathbf{C}_1 u^{2/\alpha + (2/\alpha - 2/\beta)_+} \Psi(u), \quad (5)$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \begin{cases} 2(S_2 - S_1) a^{2/\alpha} (\mathcal{H}_\alpha)^2 b^{-1/\beta} \Gamma\left(\dfrac{1}{\beta} + 1\right) e^{(c^2/(4b))\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}}, & \text{если } \alpha < \beta, \\ (S_2 - S_1) a^{1/\alpha} \mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)}, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 2^{1/\alpha} u^{2/\alpha} (S_2 - S_1) a^{1/\alpha} \mathcal{H}_\alpha, & \text{если } \alpha > \beta, \end{cases}$$

и

$$f(t) = \frac{b}{a}|t|^\alpha + \frac{c}{\sqrt{a}} t \mathbb{I}_{\{\alpha=2\}}.$$

При $u \to \infty$ выполнено

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{(s,t)\in\mathcal{E}} \big(X(s, t) - c(s - t)^2\big) > u \Big\} \sim \mathbf{C}_2 u^{2/\alpha + (2/\alpha - 2/\beta)_+} \Psi(u), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{C}_2 = \begin{cases} 2(S_2 - S_1) a^{2/\alpha} (\mathcal{H}_\alpha)^2 b^{-1/\beta} \Gamma\left(\dfrac{1}{\beta} + 1\right), & \text{если } \alpha < \beta, \\ (S_2 - S_1) a^{1/\alpha} \mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)}, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 2^{1/\alpha} (S_2 - S_1) a^{1/\alpha} \mathcal{H}_\alpha, & \text{если } \alpha > \beta, \end{cases}$$

и

$$f(t) = \frac{b}{a}|t|^\alpha.$$

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 будет видно, что форма множества $\mathcal{E}$ не является в точности параллелограммом. Если $\mathcal{L}$ лежит внутри $\mathcal{E}$ (это значит, что все точки множества $\mathcal{L}$, за исключением двух крайних, являются внутренними точками множества $\mathcal{E}$), то значение имеет только длина $\mathcal{L}$.

3. Применения полученных результатов

Вернёмся к первоначальной задаче, описанной в разделе 1. Сначала рассмотрим сценарий $n = m$ для $p_i(n)$, $i = 2, 3$, и вероятность $p_4(d)$. Обозначим

$$Y(s, t) = B(t) - B(s) - (t - s)B(1), \quad u = \sqrt{n}.$$

Предложение 1.

1. *Если* $c, d > 0$, *то при* $u \to \infty$ *имеем, что*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}(Y(s,t) - c(t-s)u) > du\right\} \sim 32\frac{d^2(d+c)^3}{(2d+c)^3}u^2 e^{-2d(c+d)u^2}.$$

2. *Если* $c > 4d > 0$, *то при* $u \to \infty$ *имеем, что*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\big(Y(s,t) - c(t-s)\times\big(1-(t-s)\big)u\big) > du\right\} \sim$$

$$\sim \frac{32cd}{\sqrt{c(c-4d)}}u^2 e^{-2cdu^2}.$$

3. *При* $d \to \infty$ *выполнено*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\frac{Y(s,t)}{\sqrt{(t-s)\times\big(1-(t-s)\big)}} > d\right\} \sim 2d^4\Psi(d).$$

Теперь рассмотрим сценарий, когда в $p_i(n)$, $i = 2, 3$, числа n и m меняются независимо.

Предложение 2. *Для любого* $c \in \mathbb{R}$ *при* $u \to \infty$ *выполнено*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\big(Y(s,t) - c(t-s)\big) > u\right\} \sim 4u^2 e^{-2u^2-2cu}$$

и

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\Big(Y(s,t) - c(t-s)\times\big(1-(t-s)\big)\Big) > u\right\} \sim 4u^2 e^{-(1/2)(2u+c/2)^2}.$$

4. Доказательства

В этом разделе приводятся доказательства основной теоремы и предложений раздела 3.

Доказательство теоремы 1. Ниже будем обозначать через $\mathbb{Q}_i$, $i \in \mathbb{N}$, положительные константы, которые могут отличаться от строчки к строчке. Без потери общности будем доказывать теорему для $c \geqslant 0$. Обозначим

$$E(\delta) = \left\{(s,t)\colon |t-s| \leqslant \frac{\delta}{3},\ s \in [S_1, S_2]\right\}$$

и

$$E(u) = \left\{(s,t)\colon |t-s| \leqslant \left(\frac{\ln u}{u}\right)^{2/\beta},\ s \in [S_1, S_2]\right\}.$$

Ввиду соотношения (2) для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдётся достаточно малое $\delta \in (0,1)$, такое что для всех $(s,t) \in E(\delta)$ выполнены неравенства

$$1 + (1-\varepsilon)b|s-t|^{\beta} \leqslant \frac{1}{\sigma(s,t)} \leqslant 1 + (1+\varepsilon)b|s-t|^{\beta}. \tag{7}$$

Ввиду соотношения (3) можно выбрать достаточно малое $\delta \in (0,1)$, такое что для $(s,t),(s',t') \in E(\delta)$ и $|s-s'| \leqslant \delta$ выполняется

$$\frac{1}{2}(a|s-s'|^{\alpha} + a|t-t'|^{\alpha}) \leqslant 1 - r(s,t,s',t') \leqslant 2(a|s-s'|^{\alpha} + a|t-t'|^{\alpha}). \tag{8}$$

Для $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ положим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_u(\Delta_1) := \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\Delta_1}\big(X(s,t) - c(s-t)\big) > u\Big\},\\
&\mathbf{P}_u(\Delta_1,\Delta_2) :=\\
&\quad := \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\Delta_1}\big(X(s,t) - c(s-t)\big) > u,\ \sup_{(s,t)\in\Delta_2}\big(X(s,t) - c(s-t)\big) > u\Big\}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{E}}\big(X(s,t) - c(s-t)\big) > u\Big\} = \mathbf{P}_u(\mathcal{E})$$

и

$$\mathbf{P}_u\big(E(u)\big) \leqslant \mathbf{P}_u(\mathcal{E}) \leqslant \mathbf{P}_u\big(E(u)\big) + \mathbf{P}_u\big(E(\delta)\setminus E(u)\big) + \mathbf{P}_u\big(\mathcal{E}\setminus E(\delta)\big). \tag{9}$$

Поскольку

$$\sigma_m := \sup_{(s,t)\in\mathcal{E}\setminus E(\delta)} \sigma(s,t) < 1,$$

по неравенству Бореля—Цырельсона—Ибрагимова—Судакова (БЦИС, см. [4]) получаем, что

$$\mathbf{P}_u\big(\mathcal{E}\setminus E(\delta)\big) \leqslant e^{-(u-\mathbb{Q}_1)^2/(2\sigma_m^2)} = o\big(\Psi(u)\big), \quad u \to \infty, \tag{10}$$

где

$$\mathbb{Q}_1 = \mathbb{E}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{E}\setminus E(\delta)} X(s,t)\Big\} < \infty.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
&D_k(\delta) = \{(s,t)\colon s \in S_1 + [k\delta,(k+1)\delta],\ |s-t| \leqslant \delta\}, \quad k \in \mathbb{N},\\
&M(\delta) = \left\lfloor \frac{S_2 - S_1}{\delta} \right\rfloor + 1.
\end{aligned}$$

Имея в виду соотношение (7), получаем для достаточно больших u, что

$$\inf_{(s,t)\in E(\delta)\setminus E(u)} \frac{1}{\sigma(s,t)} \geqslant 1 + \mathbb{Q}_2\left(\frac{ln u}{u}\right)^2,$$

и ввиду соотношения (8) для $(s,t),(s',t')\in D_k(\delta)$ и $0\leqslant k\leqslant M(\delta)$ имеем, что

$$\mathbb{E}\big\{\big(\bar X(s,t)-\bar X(s',t')\big)^2\big\}=2\big(1-r(s,t,s',t')\big)\leqslant 4a(|s-s'|^\alpha+|t-t'|^\alpha).$$

Следовательно, согласно [28, теорема 8.1] для достаточно больших u получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_u\big(E(\delta)\setminus E(u)\big)&\leqslant \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in E(\delta)\setminus E(u)} X(s,t)>u\Big\}\leqslant\\ &\leqslant \mathbb{P}\bigg\{\sup_{(s,t)\in E(\delta)\setminus E(u)}\bar X(s,t)>u\bigg(1+\mathbb{Q}_2\left(\frac{lnu}{u}\right)^2\bigg)\bigg\}\leqslant\\ &\leqslant\sum_{k=0}^{M(\delta)}\mathbb{P}\bigg\{\sup_{(s,t)\in D_k(\delta)}\bar X(s,t)>u\bigg(1+\mathbb{Q}_2\left(\frac{lnu}{u}\right)^2\bigg)\bigg\}\leqslant\\ &\leqslant \mathbb{Q}_3M(\delta)u^{2\alpha}\Psi\bigg(2\bigg(1+\mathbb{Q}_2\left(\frac{lnu}{u}\right)^2\bigg)\bigg)=o\big(\Psi(u)\big),\quad u\to\infty.\end{aligned}\tag{11}$$

Из этого соотношения с учётом соотношений (9), (10) и того, что

$$\mathbf{P}_u\big(E(u)\big)\geqslant \mathbb{P}\{X(S_1,S_1)>u\}=\Psi(u),$$

выводим эквивалентность

$$\mathbf{P}_u(\mathcal{E})\sim\mathbf{P}_u\big(E(u)\big),\quad u\to\infty.\tag{12}$$

Рассмотрим теперь вероятность $\mathbf{P}_u\big(E(u)\big)$.

Случай 1: $\alpha<\beta$. Пусть $\lambda>0$, введём следующие обозначения:

$$D_{k,l}(u)=\left[k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},(k+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right]\times\left[l\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},(l+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right],\quad k,l\in\mathbb{Z},$$

$$M_1(u)=\left\lfloor\frac{S_1u^{2/\alpha}}{\lambda}\right\rfloor-1,\quad M_2(u)=\left\lfloor\frac{S_2u^{2/\alpha}}{\lambda}\right\rfloor+1,$$

$$N(u)=\left\lfloor\frac{u^{2/\alpha-2/\beta}(\ln u)^{2/\beta}}{\lambda}\right\rfloor+1,$$

$$\mathcal{J}_1(u)=\{(k,l)\colon D_{k,l}(u)\subset E(u)\},\quad \mathcal{J}_2(u)=\{(k,l)\colon D_{k,l}(u)\cap E(u)\neq\varnothing\},$$

$$\mathcal{K}_1(u)=\{(k,l,k_1,l_1)\colon (k,l),(k_1,l_1)\in\mathcal{J}_1(u),\ (k,l)\neq(k_1,l_1),\ k\leqslant k_1,\\ D_{k,l}(u)\cap D_{k_1,l_1}(u)\neq\varnothing\},$$

$$\mathcal{K}_2(u)=\bigg\{(k,l,k_1,l_1)\colon (k,l),(k_1,l_1)\in\mathcal{J}_1(u),\ k\leqslant k_1,\\ D_{k,l}(u)\cap D_{k_1,l_1}(u)=\varnothing,\ u^{-2/\alpha}|k-k_1|\lambda\leqslant\frac{\delta}{2}\bigg\},$$

$$\mathcal{K}_3(u)=\bigg\{(k,l,k_1,l_1)\colon (k,l),(k_1,l_1)\in\mathcal{J}_1(u),\ k\leqslant k_1,\\ D_{k,l}(u)\cap D_{k_1,l_1}(u)=\varnothing,\ u^{-2/\alpha}|k-k_1|\lambda\geqslant\frac{\delta}{2}\bigg\},$$

$$u_{k,l}^{+\varepsilon} = \left(u + c(k-l+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right)\left(1 + (1+\varepsilon)b(|k-l|+1)^{\beta}\frac{\lambda^{\beta}}{u^{2\beta/\alpha}}\right),$$
$$u_{k,l}^{-\varepsilon} = \left(u + c(k-l-1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right)\left(1 + (1-\varepsilon)b\big(\max(|k-l|-1,0)\big)^{\beta}\frac{\lambda^{\beta}}{u^{2\beta/\alpha}}\right).$$

Для достаточно больших u имеем, что

$$\bigcup_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)} D_{k,l}(u) \subseteq E(u) \subseteq \bigcup_{(k,l)\in\mathcal{J}_2(u)} D_{k,l}(u).$$

Применяя неравенство Бонферрони, получаем, что

$$\sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)} \mathbf{P}_u\big(D_{k,l}(u)\big) - \sum_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i(u) \leqslant \mathbf{P}_u\big(E(u)\big) \leqslant \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_2(u)} \mathbf{P}_u\big(D_{k,l}(u)\big), \quad (13)$$

где

$$\mathcal{A}_i(u) = \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_i(u)} \mathbf{P}_u\big(D_{k,l}(u), D_{k_1,l_1}(u)\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_i(u)} \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_{k,l}(u)} \bar{X}(s,t) > u_{k,l}^{-\varepsilon},\ \sup_{(s,t)\in D_{k_1,l_1}(u)} \bar{X}(s,t) > u_{k_1,l_1}^{-\varepsilon}\Big\},$$
$$i = 1,2,3.$$

Положим

$$X_{u,k,l}^{(1)}(s,t) = \bar{X}(ku^{-2/\alpha}\lambda + s, lu^{-2/\alpha}\lambda + t), \quad (s,t)\in D_{0,0}(u), \quad (k,l)\in\mathcal{J}_2(u).$$

Пользуясь соотношением (3) и леммой 1, получаем, что

$$\lim_{u\to\infty}\sup_{(k,l)\in\mathcal{J}_2(u)}\left|\frac{\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_{0,0}(u)} X_{u,k,l}^{(1)}(s,t) > u_{k,l}^{-\varepsilon}\Big\}}{\Psi(u_{k,l}^{-\varepsilon})} - \big(\mathcal{H}_{\alpha}(a^{1/\alpha}\lambda)\big)^2\right| = 0. \quad (14)$$

Далее, если $u\to\infty$, $\lambda\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, то выполнено следующее:

$$\sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_2(u)} \mathbf{P}_u\big(D_{k,l}(u)\big) \leqslant \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_2(u)} \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_{k,l}(u)} \bar{X}(s,t) > u_{k,l}^{-\varepsilon}\Big\} =$$
$$= \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_2(u)} \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_{0,0}(u)} X_{u,k,l}^{(1)}(s,t) > u_{k,l}^{-\varepsilon}\Big\} \sim$$
$$\sim \big(\mathcal{H}_{\alpha}(a^{1/\alpha}\lambda)\big)^2 \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_2(u)} \Psi(u_{k,l}^{-\varepsilon}) \sim$$
$$\sim \big(\mathcal{H}_{\alpha}(a^{1/\alpha}\lambda)\big)^2\Psi(u) \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_2(u)} e^{-(1-\varepsilon)b|k-l|^{\beta}\lambda^{\beta}u^{2-2\beta/\alpha} - c(k-l)\lambda u^{1-2/\alpha}} \sim$$
$$\sim \big(\mathcal{H}_{\alpha}(a^{1/\alpha}\lambda)\big)^2\Psi(u) \sum_{k=M_1(u)}^{M_2(u)} \sum_{l=-N(u)}^{N(u)} e^{-(1-\varepsilon)b|l|^{\beta}\lambda^{\beta}u^{2-2\beta/\alpha} - cl\lambda u^{1-2/\alpha}} \sim$$

$$
\begin{aligned}
&\sim \big(\mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda)\big)^2\Psi(u)\sum_{k=M_1(u)}^{M_2(u)}\frac{u^{2/\alpha-2/\beta}}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(1-\varepsilon)b|t|^\beta-ct\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}}\,dt\sim\\
&\sim\left(\frac{\mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda)}{\lambda}\right)^2\Psi(u)(S_2-S_1)u^{4/\alpha-2/\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(1-\varepsilon)b|t|^\beta-ct\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}}\,dt\sim\\
&\sim(a^{1/\alpha}\mathcal{H}_\alpha)^2(S_2-S_1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-b|t|^\beta-ct\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}}\,dt u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u)\sim\\
&\sim 2(S_2-S_1)a^{2/\alpha}(\mathcal{H}_\alpha)^2b^{-1/\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)e^{c^2/(4b)\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}}u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u).
\end{aligned}\tag{15}
$$

Аналогично если $u\to\infty$, $\lambda\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, то

$$
\begin{aligned}
\sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)}\mathbf{P}_u\big(D_{k,l}(u)\big)\geqslant\sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)}\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_{k,l}(u)}\bar{X}(s,t)>u_{k,l}^{+\varepsilon}\Big\}\sim\\
\sim 2(S_2-S_1)a^{2/\alpha}(\mathcal{H}_\alpha)^2b^{-1/\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)e^{c^2/(4b)\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}}u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u).
\end{aligned}\tag{16}
$$

Далее мы покажем, что все $\mathcal{A}_i(u)$, $i=1,2,3$, ничтожно малы по сравнению с суммой

$$\sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)}\mathbf{P}_u\big(D_{k,l}(u)\big).$$

Без потери общности для любых $(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_1(u)$ примем, что $k+1=k_1$. Пусть

$$
\begin{aligned}
D^1_{k,l}(u)&=\left[k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},\big((k+1)\lambda-\sqrt{\lambda}\big)\frac{1}{u^{2/\alpha}}\right]\times\left[l\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},(l+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right],\\
D^2_{k,l}(u)&=\left[\big((k+1)\lambda-\sqrt{\lambda}\big)\frac{1}{u^{2/\alpha}},(k+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},\right]\times\left[l\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},(l+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right].
\end{aligned}
$$

Для $(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_1(u)$ получаем, что

$$\mathbf{P}_u\left(D_{k,l}(u),D_{k_1,l_1}(u)\right)\leqslant\mathbf{P}_u\left(D^1_{k,l}(u),D_{k_1,l_1}(u)\right)+\mathbf{P}_u\left(D^2_{k,l}(u)\right).$$

Аналогично (14) и (15), получаем, что

$$\lim_{u\to\infty}\sup_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)}\left|\frac{\mathbb{P}\Big\{\sup\limits_{(s,t)\in D^2_{k,l}(u)}\bar{X}(s,t)>u_{k,l}^{-\varepsilon}\Big\}}{\Psi(u_{k,l}^{-\varepsilon})}-\mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\sqrt{\lambda})\mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda)\right|=0$$

и

$$\mathcal{A}_{11}(u) := \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)} \mathbf{P}_u\big(D^2_{k,l}(u)\big) \leqslant \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)} \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D^2_{k,l}(u)} \bar{X}(s,t) > u^{-\varepsilon}_{k,l}\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\sqrt{\lambda})\mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda) \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)} \Psi(u^{-\varepsilon}_{k,l}) \sim$$
$$\sim \frac{\mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda)\mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\sqrt{\lambda})}{\lambda^2}(S_2 - S_1) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-\varepsilon)b|t|^\beta - ct\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}}\, dt\ u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u) \sim$$
$$\sim (a^{1/\alpha}\mathcal{H}_\alpha)^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(S_2 - S_1) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-\varepsilon)b|t|^\beta - ct\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}}\, dt\ u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u) =$$
$$= o\big(u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u)\big), \quad u\to\infty, \quad \lambda\to\infty, \quad \varepsilon\to 0.$$

Поскольку число соседних прямоугольников у $D_{k,l}(u)$ не более восьми, в силу соотношения (3) и [11, лемма 5.4] получаем для достаточно больших u, что

$$\mathcal{A}_{12}(u) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_1(u)} \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D^1_{k,l}(u)} \bar{X}(s,t) > u^{-\varepsilon}_{k,l}, \sup_{(s,t)\in D_{k_1,l_1}(u)} \bar{X}(s,t) > u^{-\varepsilon}_{k_1,l_1}\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{Q}_4\lambda^4 e^{-\mathbb{Q}_5\lambda^{\alpha/2}} \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_1(u)} \Psi\big(\min(u^{-\varepsilon}_{k,l}, u^{-\varepsilon}_{k_1,l_1})\big) \leqslant$$
$$\leqslant 8\mathbb{Q}_4\lambda^4 e^{-\mathbb{Q}_5\lambda^{\alpha/2}} \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)} \Psi(u^{-\varepsilon}_{k,l}) = o\big(u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u)\big),$$
$$u\to\infty, \quad \lambda\to\infty, \quad \varepsilon\to 0$$

и

$$\mathcal{A}_2(u) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_2(u)} \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_{k,l}(u)} \bar{X}(s,t) > u^{-\varepsilon}_{k,l}, \sup_{(s,t)\in D_{k_1,l_1}(u)} \bar{X}(s,t) > u^{-\varepsilon}_{k_1,l_1}\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{Q}_6 \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_2(u)} \lambda^4 e^{-\mathbb{Q}_7((|k-k_1|-1)^\alpha + (|l-l_1|-1)^\alpha)\lambda^\alpha} \Psi\big(\min(u^{-\varepsilon}_{k,l}, u^{-\varepsilon}_{k_1,l_1})\big) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{Q}_6\lambda^4 \sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{N}^2\\(k_1,l_1)\neq(0,0)}} e^{-\mathbb{Q}_7((k_1)^\alpha + (l_1)^\alpha)\lambda^\alpha} \sum_{(k,l)\in\mathcal{J}_1(u)} \Psi(u^{-\varepsilon}_{k,l}) =$$
$$= o\big(u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u)\big), \quad u\to\infty, \quad \lambda\to\infty, \quad \varepsilon\to 0. \tag{17}$$

Итак,

$$\mathcal{A}_1(u) \leqslant 2\mathcal{A}_{11}(u) + \mathcal{A}_{12}(u) = o\big(u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u)\big), \quad u\to\infty, \quad \lambda\to\infty. \tag{18}$$

Если $(k,l,k_1,l_1) \in \mathcal{K}_3(u)$ и $(s,t) \in D_{k,l}(u)$, $(s',t') \in D_{k_1,l_1}(u)$, то $|s - s'| \geqslant \delta/3$. Следовательно, из соотношения (8) получаем для достаточно больших u, что для таких s, t и s', t', что

$$\operatorname{Var}\bigl(\bar{X}(s,t)+\bar{X}(s',t')\bigr) = 2\bigl(1+r(s,t,s',t')\bigr) \leqslant \\ \leqslant 2+2\sup_{|s-s'|\geqslant\delta/3} r(s,t,s',t') \leqslant 4-a\left(\frac{\delta}{3}\right)^{\alpha}.$$

Далее из неравенства БЦИС следует, что

$$\mathcal{A}_3(u) \leqslant \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_3(u)} \mathbb{P}\Bigl\{\sup_{(s,t,s_1,t_1)\in D_{k,l}(u)\times D_{k_1,l_1}(u)} \bar{X}(s,t)+\bar{X}(s_1,t_1) > 2u\Bigr\} \leqslant \\ \leqslant \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in\mathcal{K}_3(u)} e^{-(2u-\mathbb{Q}_8)^2/(2(4-a(\delta/3)^{\alpha}))} \leqslant \mathbb{Q}_9 u^{8/\alpha} e^{-(2u-\mathbb{Q}_8)^2/(2(4-a(\delta/3)^{\alpha}))} = \\ = o\bigl(u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u)\bigr), \quad u\to\infty, \tag{19}$$

где

$$\mathbb{Q}_8 = 2\mathbb{E}\Bigl\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{E}} \bar{X}(s,t)\Bigr\} < \infty.$$

Подставляя (15)—(19) в (13), получаем, что

$$\mathbf{P}_u\bigl(E(u)\bigr) \sim 2(S_2-S_1)a^{2/\alpha}(\mathcal{H}_\alpha)^2 b^{-1/\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) e^{c^2/(4b)\mathbb{I}_{\{\beta=2\}}} u^{4/\alpha-2/\beta}\Psi(u), \\ u\to\infty,$$

что вместе с (12) даёт требуемый результат.

Случай 2: $\alpha=\beta$. Для $\lambda>0$ введём обозначения

$$M(u) = \left\lfloor \frac{(S_2-S_1)u^{2/\alpha}}{\lambda} \right\rfloor, \quad N(u) = \left\lfloor \frac{(\ln u)^{2/\beta}}{\lambda} \right\rfloor + 1,$$

$$D_{k,l}(u) = \\ = \left\{(s,t)\colon s\in S_1+\left[k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},\, (k+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right],\ (s-t)\in\left[l\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},\, (l+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right]\right\},$$

$$D_k(u) = \left\{(s,t)\colon s\in S_1+\left[k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}},\, (k+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right], |s-t|\leqslant \frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right\}, \quad k,l\in\mathbb{Z},$$

$$\mathcal{K}_1(u) = \{(k,k_1)\colon 0<k<k_1<M(u),\ k_1=k+1\},$$

$$\mathcal{K}_2(u) = \left\{(k,k_1)\colon 0<k<k_1<M(u),\ k_1>k+1,\ u^{-2/\alpha}|k-k_1|\lambda \leqslant \frac{\delta}{2}\right\},$$

$$\mathcal{K}_3(u) = \left\{(k,k_1)\colon 0<k<k_1<M(u),\ k_1>k+1,\ u^{-2/\alpha}|k-k_1|\lambda \geqslant \frac{\delta}{2}\right\},$$

$$u_l^{+\varepsilon} = \left(u+c(l+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right)\left(1+(1+\varepsilon)b|l+\mathbb{I}_{\{l\geqslant 0\}}|^{\alpha}\frac{\lambda^{\alpha}}{u^2}\right),$$

$$u_l^{-\varepsilon} = \left(u+cl\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right)\left(1+(1-\varepsilon)b|l+\mathbb{I}_{\{l<0\}}|^{\alpha}\frac{\lambda^{\alpha}}{u^2}\right).$$

Для достаточно больших u имеем, что

$$\bigcup_{k=0}^{M(u)-1} D_k(u) \subseteq E(u) \subseteq \left(\left(\bigcup_{k=0}^{M(u)} D_k(u)\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{M(u)} \bigcup_{\substack{l=-N(u)\\ l\neq -1,0}}^{N(u)} D_{k,l}(u)\right)\right).$$

Из неравенства Бонферрони получаем, что

$$\sum_{k=0}^{M(u)-1} \mathbf{P}_u\bigl(D_k(u)\bigr) - \sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i(u) \leqslant \mathbf{P}_u\bigl(E(u)\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{M(u)} \mathbf{P}_u\bigl(D_k(u)\bigr) + \sum_{k=0}^{M(u)} \sum_{\substack{l=-N(u)^{N(u)}\\ l\neq -1,0}} \mathbf{P}_u\bigl(D_{k,l}(u)\bigr), \quad (20)$$

где

$$\mathcal{A}_i(u) = \sum_{(k,l,k_1,l_1)\in \mathcal{K}_i(u)} \mathbf{P}_u\bigl(D_{k,l}(u), D_{k_1,l_1}(u)\bigr), \quad i = 1, 2, 3.$$

Для $0 \leqslant k \leqslant M(u)$ обозначим

$$X^{(2)}_{u,k}(s,t) = \bar{X}\left(S_1 + k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}} + s,\ S_1 + k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}} + t\right),$$

где

$$(s,t) \in D^{(2)}(u) = \left\{(s,t)\colon s \in \left[0, \frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right],\ |s-t| \leqslant \frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right\}.$$

Тогда в силу леммы 1 имеем при $u \to \infty$, что

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{(s,t)\in D^{(2)}(u)} \frac{X^{(2)}_{u,k}(s,t)}{\bigl(1+(c/u)(s-t)\bigr)(1+(1-\varepsilon)b|s-t|^\alpha)} > u\Bigr\} \sim$$
$$\sim \Psi(u)\mathcal{P}_\alpha^{f^{-\varepsilon}(s-t)}(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda)$$

равномерно по $0 \leqslant k \leqslant M(u)$ и

$$\sum_{k=0}^{M(u)} \mathbf{P}_u\bigl(D_k(u)\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{M(u)} \mathbb{P}\Bigl\{\sup_{(s,t)\in D_k(u)} \frac{\bar{X}(s,t)}{\bigl(1+(c/u)(s-t)\bigr)(1+(1-\varepsilon)b|s-t|^\alpha)} > u\Bigr\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{M(u)} \mathbb{P}\Bigl\{\sup_{(s,t)\in D^{(2)}(u)} \frac{X^{(2)}_{u,k}(s,t)}{\bigl(1+(c/u)(s-t)\bigr)(1+(1-\varepsilon)b|s-t|^\alpha)} > u\Bigr\} \sim$$
$$\sim \sum_{k=0}^{M(u)} \mathcal{P}_\alpha^{f^{-\varepsilon}(s-t)}(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda)\Psi(u) \sim$$

$$
\sim \frac{(S_2-S_1)u^{2/\alpha}}{\lambda}\mathcal{P}_\alpha^{f^{-\varepsilon}(s-t)}(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda)\Psi(u) \sim
$$
$$
\sim (S_2-S_1)a^{1/\alpha}\mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)}u^{2/\alpha}\Psi(u), \quad u\to\infty, \quad \lambda\to\infty, \quad \varepsilon\to 0, \tag{21}
$$

где

$$
f^{-\varepsilon}(t) = (1-\varepsilon)\frac{b}{a}|t|^\alpha + \frac{c}{\sqrt{a}}t\mathbb{I}_{\{\alpha=2\}}, \quad f(t) = \frac{b}{a}|t|^\alpha + \frac{c}{\sqrt{a}}t\mathbb{I}_{\{\alpha=2\}}.
$$

Аналогично

$$
\sum_{k=0}^{M(u)-1}\mathbf{P}_u\left(D_k(u)\right) \geqslant
$$
$$
\geqslant \sum_{k=0}^{M(u)-1}\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_k(u)}\frac{\bar{X}(s,t)}{\big(1+(c/u)(s-t)\big)(1+(1+\varepsilon)b|s-t|^\alpha)} > u\Big\} \sim
$$
$$
\sim (S_2-S_1)a^{1/\alpha}\mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)}u^{2/\alpha}\Psi(u), \quad u\to\infty, \quad \lambda\to\infty, \quad \varepsilon\to 0. \tag{22}
$$

Для $0\leqslant k\leqslant M(u)$ и $-N(u)\leqslant l\leqslant N(u)$ обозначим

$$
X_{u,k,l}^{(3)}(s,t) = \bar{X}\left(S_1 + k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}} + s,\, S_1 + k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}} - l\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}} + t\right),
$$

где

$$
(s,t)\in D^{(3)}(u) = \left\{(s,t)\colon s\in\left[0, \frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right],\ 0\leqslant s-t\leqslant\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right\}.
$$

В силу леммы 1

$$
\lim_{u\to\infty}\sup_{\substack{0\leqslant k\leqslant M(u)\\ -N(u)\leqslant l\leqslant N(u)}}\left|\frac{\mathbb{P}\Big\{\sup\limits_{(s,t)\in D^{(3)}(u)}X_{u,k,l}^{(3)}(s,t) > u_l^{-\varepsilon}\Big\}}{\Psi(u_l^{-\varepsilon})} - \mathcal{Q}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda)\right| = 0.
$$

Далее,

$$
\sum_{k=0}^{M(u)}\sum_{\substack{l=-N(u)\\ l\neq -1,0}}^{N(u)}\mathbf{P}_u\big(D_{k,l}(u)\big) \leqslant \sum_{k=0}^{M(u)}\sum_{\substack{l=-N(u)\\ l\neq -1,0}}^{N(u)}\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_{k,l}(u)}\bar{X}(s,t) > u_l^{-\varepsilon}\Big\} =
$$
$$
= \sum_{k=0}^{M(u)}\sum_{\substack{l=-N(u)\\ l\neq -1,0}}^{N(u)}\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D^{(3)}(u)}X_{u,k,l}^{(3)}(s,t) > u_l^{-\varepsilon}\Big\} \sim
$$
$$
\sim \sum_{k=0}^{M(u)}\sum_{\substack{l=-N(u)\\ l\neq -1,0}}^{N(u)}\mathcal{Q}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda)\Psi(u_l^{-\varepsilon}) \sim
$$
$$
\sim \frac{(S_2-S_1)u^{2/\alpha}}{\lambda}\mathcal{Q}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda)\sum_{\substack{l=-N(u)\\ l\neq -1,0}}^{N(u)}\Psi(u_l^{-\varepsilon}) \sim
$$

$$\sim \frac{(S_2-S_1)u^{2/\alpha}}{\lambda}\mathcal{Q}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda)\Psi(u)\sum_{\substack{l=-N(u)\\ l\neq -1,0}}^{N(u)} e^{-(1-\varepsilon)b|l+\mathbb{I}_{\{l<0\}}|^\alpha\lambda^\alpha - cl\lambda\mathbb{I}_{\{\alpha=2\}}} \leqslant$$

$$\leqslant (S_2-S_1)u^{2/\alpha}a^{2/\alpha}\mathcal{Q}_\alpha\Psi(u)\lambda\sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq -1,0}}^{\infty} e^{-(1-\varepsilon)b|l+\mathbb{I}_{\{l<0\}}|^\alpha\lambda^\alpha - cl\lambda\mathbb{I}_{\{\alpha=2\}}} =$$

$$= o\big(u^{2/\alpha}\Psi(u)\big), \quad u\to\infty, \quad \lambda\to\infty, \quad \varepsilon\to\infty. \tag{23}$$

Теперь аналогично рассуждениям при выводе соотношений (17)—(19) получаем, что

$$\mathcal{A}_i(u) = o\big(u^{2/\alpha}\Psi(u)\big), \quad u\to\infty, \quad \lambda\to\infty, \quad i=1,2,3.$$

Вместе с (20)—(23) это приводит окончательно к соотношению

$$\mathbf{P}_u\big(E(u)\big) \sim (S_2-S_1)a^{1/\alpha}u^{2/\alpha}\mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)}\Psi(u), \quad u\to\infty.$$

Случай 3: $\alpha>\beta$. Для $\lambda, \lambda_1 > 0$ будем пользоваться теми же соотношениями, что и в случае 2, за исключением

$$D_k(u) = \left\{(s,t)\colon s\in\left[S_1 + k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}, S_1+(k+1)\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right],\ |s-t|\leqslant \frac{\lambda_1}{u^{2/\alpha}}\right\}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Для $\alpha>\beta$ и достаточно больших u имеем, что

$$\mathcal{L}\subseteq E(u)\subseteq \bigcup_{k=0}^{M(u)} D_k(u).$$

Неравенство Бонферрони приводит к неравенствам

$$\mathbf{P}_u(\mathcal{L}) \leqslant \mathbf{P}_u\big(E(u)\big) \leqslant \sum_{k=0}^{M(u)} \mathbf{P}_u\big(D_k(u)\big). \tag{24}$$

По (2)—(4) имеем при $s\in[S_1,S_2]$, что

$$\sigma(s,s)\equiv 1,$$

и для $s,s'\in[S_1,S_2]$

$$r(s,s,s',s') = 1-2a|s-s'|^\alpha\big(1+o(1)\big), \quad |s-s'|\to 0,$$

и

$$r(s,s,s',s') < 1, \quad s\neq s'.$$

Пусть $Y(s)$, $s\in[S_1,S_2]$, — стационарный гауссовский процесс с непрерывными траекториями, единичной дисперсией и функцией корреляции $r_Y(s)$, при этом для некоторого $\varepsilon_1\in(0,1)$ выполнены соотношения

$$r_Y(s) = 1-2(1-\varepsilon_1)a|s|^\alpha\big(1+o(1)\big), \quad |s|\to 0$$

и

$$r_Y(s) < 1, \quad s\neq 0.$$

Ввиду неравенства Слепяна (см. [4]) и [28, теорема 7.1]

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_u(\mathcal{L}) &= \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{L}} X(s,t) > u\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\sup_{s\in[S_1,S_2]} X(s,s) > u\Big\} \geqslant \\ &\geqslant \mathbb{P}\Big\{\sup_{s\in[S_1,S_2]} Y(s) > u\Big\} \sim (S_2-S_1)(2(1-\varepsilon_1)a)^{1/\alpha}\mathcal{H}_\alpha u^{2/\alpha}\Psi(u) \sim \\ &\sim (S_2-S_1)(2a)^{1/\alpha}\mathcal{H}_\alpha u^{2/\alpha}\Psi(u), \quad u\to\infty, \quad \varepsilon_1\to 0.\end{aligned}$$

Для $0\leqslant k\leqslant M(u)$ введём

$$X^{(4)}_{u,k}(s,t) = \bar{X}\left(S_1 + k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}} + s,\ S_1 + k\frac{\lambda}{u^{2/\alpha}} + t\right),$$

где

$$(s,t)\in D^{(4)}(u) = \left\{(s,t)\colon s\in\left[0, \frac{\lambda}{u^{2/\alpha}}\right],\ |s-t|\leqslant\frac{\lambda_1}{u^{2/\alpha}}\right\}.$$

По лемме 1

$$\lim_{u\to\infty}\sup_{0\leqslant k\leqslant M(u)}\left|\frac{\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D^{(4)}(u)} X^{(4)}_{u,k}(s,t) > u\Big\}}{\Psi(u)} - \mathcal{P}^0_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda_1)\right| = 0.$$

Получаем теперь, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{M(u)}\mathbf{P}_u\big(D_k(u)\big) &\leqslant \sum_{k=0}^{M(u)}\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D_k(u)}\bar{X}(s,t) > u\Big\} = \\ &= \sum_{k=0}^{M(u)}\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in D^{(4)}(u)} X^{(4)}_{u,k}(s,t) > u\Big\} \sim \sum_{k=0}^{M(u)}\mathcal{P}^0_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda_1)\Psi(u) \sim \\ &\sim \frac{(S_2-S_1)u^{2/\alpha}}{\lambda}\mathcal{P}^0_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda, a^{1/\alpha}\lambda_1)\Psi(u) \sim \frac{(S_2-S_1)u^{2/\alpha}}{\lambda}\mathcal{H}_\alpha(2^{1/\alpha}a^{1/\alpha}\lambda)\Psi(u) \sim \qquad (25) \\ &\sim (S_2-S_1)2^{1/\alpha}a^{1/\alpha}\mathcal{H}_\alpha u^{2/\alpha}\Psi(u), \quad u\to\infty, \quad \lambda_1\to 0, \quad \lambda\to\infty.\end{aligned}$$

Для доказательства эквивалентности (25) мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda_1\to 0}\mathcal{P}^0_\alpha(\lambda,\lambda_1) = \\ &\quad = \lim_{\lambda_1\to 0}\mathbb{E}\Big\{\sup_{0\leqslant s\leqslant\lambda,\ |s-t|\leqslant\lambda_1}\exp\big(\sqrt{2}B^{(1)}_\alpha(s) + \sqrt{2}B^{(2)}_\alpha(t) - |s|^\alpha - |t|^\alpha\big)\Big\} = \\ &\quad = \mathbb{E}\Big\{\sup_{0\leqslant s\leqslant\lambda}\exp\big(\sqrt{2}B^{(1)}_\alpha(s) + \sqrt{2}B^{(2)}_\alpha(s) - 2|s|^\alpha\big)\Big\} = \\ &\quad = \mathbb{E}\Big\{\sup_{0\leqslant s\leqslant\lambda}\exp\big(2B^{(1)}_\alpha(s) - 2|s|^\alpha\big)\Big\} = \mathcal{H}_\alpha(2^{1/\alpha}\lambda).\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что
$$\mathbf{P}_u\big(E(u)\big) \sim (S_2 - S_1)2^{1/\alpha}a^{1/\alpha}\mathcal{H}_\alpha u^{2/\alpha}\Psi(u), \quad u\to\infty.$$
Итак, соотношение (5) доказано.

Для доказательства соотношения (6) можно воспользоваться рассуждениями, аналогичными вышеприведённым. Необходимо только обратить внимание, что в случае 1
$$u_{k,l}^{+\varepsilon} = \left(u + c\left(\frac{\ln u}{u}\right)^{4/\beta}\right)\left(1+(1+\varepsilon)b(|k-l|+1)^\beta\frac{\lambda^\beta}{u^{2\beta/\alpha}}\right),$$
$$u_{k,l}^{-\varepsilon} = u\left(1+(1-\varepsilon)b\big(\max(|k-l|-1,0)\big)^\beta\frac{\lambda^\beta}{u^{2\beta/\alpha}}\right),$$
а в случае 2
$$u_l^{+\varepsilon} = \left(u + c\left(\frac{\ln u}{u}\right)^{4/\beta}\right)\left(1+(1+\varepsilon)b\big|l+\mathbb{I}_{\{l\geqslant 0\}}\big|^\alpha\frac{\lambda^\alpha}{u^2}\right),$$
$$u_l^{-\varepsilon} = u\left(1+(1-\varepsilon)b\big|l+\mathbb{I}_{\{l<0\}}\big|^\alpha\frac{\lambda^\alpha}{u^2}\right). \qquad \square$$

Доказательство предложения 1. Если
$$(s,t)\in\mathcal{S}(\delta) = \{(s,t)\colon 0\leqslant s<t\leqslant 1,\ t-s>\delta\},$$
где $\delta\in(0,1)$, то дисперсия поля $Y(s,t)$ равна
$$\sigma_Y^2(s,t) = (t-s)-(t-s)^2,$$
а его корреляционная функция удовлетворяет соотношению
$$1-r_Y(s,t,s',t') \sim 2(|t-t'|+|s-s'|), \quad |t-t'|,\,|s-s'|\to 0.$$
Для любых же $(s,t),(s',t')\in\mathcal{S}$ выполнено
$$1-r_Y(s,t,s',t') \leqslant 2\mathbb{E}\big\{\big(Y(s,t)-Y(s',t')\big)^2\big\} \leqslant \mathbb{Q}|t-t'| + \mathbb{Q}|s-s'|,$$
где $\mathbb{Q}$ — положительная константа. Итак, $r_Y(s,t,s',t')<1$, $(s,t)\neq(s',t')$.

1. Для всех $u>0$ имеем, что
$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}(Y(s,t)-c(t-s)u)>du\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\frac{Y(s,t)}{d+c(t-s)}>u\Big\}.$$
Заметим, что дисперсия поля $Y(s,t)/d+c(t-s)$ равна
$$\frac{(t-s)-(t-s)^2}{\big(d+c(t-s)\big)^2},$$
она достигает своего максимума, равного $1/\big(4d(c+d)\big)$, при $t-s=d/(2d+c)$. Получаем тогда, что
$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\frac{Y(s,t)}{d+c(t-s)}>u\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\sup_{0\leqslant s-d/(2d+c)<t\leqslant 1}Z(s,t)>\sqrt{4d(c+d)}u\Big\},$$

где

$$Z(s,t)=\sqrt{4d(c+d)}\times\frac{B(t)-B\bigl(s-d/(2d+c)\bigr)-\bigl(t-s+d/(2d+c)\bigr)B(1)}{d+c\bigl(t-s+d/(2d+c)\bigr)}.$$

Тогда при $0\leqslant s-d/(2d+c)<t\leqslant 1$ стандартное отклонение $Z(s,t)$, обозначим его через $\sigma_Z(s,t)$, достигает своего максимума при $s=t$. Кроме того,

$$1-\sigma_Z(s,t)\sim\frac{(2d+c)^4}{8(d^2+cd)^2}(t-s)^2,\quad |t-s|\to 0.$$

Для корреляционной функции имеем, что

$$1-r_Z(s,t,s',t')\sim 2(|t-t'|+|s-s'|),\quad |t-t'|,\,|s-s'|,\,|t-s|,\,|t'-s'|\to 0$$

и

$$r_Z(s,t,s',t')<1,\quad (s,t)\neq(s',t').$$

Таким образом, с помощью теоремы 1 получим требуемый результат.

2. Для любых $u>0$ имеем, что

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\bigl(Y(s,t)-c(t-s)\times\bigl(1-(t-s)\bigr)u\bigr)>du\Bigr\}=$$
$$=\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\frac{Y(s,t)}{d+c(t-s)\times\bigl(1-(t-s)\bigr)}>u\Bigr\}.$$

Дисперсия поля

$$\frac{Y(s,t)}{d+c(t-s)\times\bigl(1-(t-s)\bigr)}$$

равна

$$\frac{(t-s)-(t-s)^2}{\bigl(d+c(t-s)\times\bigl(1-(t-s)\bigr)\bigr)^2}$$

и достигает своего максимума, равного $1/\sqrt{4cd}$, в точках

$$t-s=\frac{1\pm\sqrt{1-4d/c}}{2},$$

которые образуют две параллельные прямые в области $0\leqslant s<t\leqslant 1$. Пользуясь [28, следствие 8.2], получаем, что

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0\leqslant s<t\leqslant 1}\frac{B(t)-B(s)-(t-s)B(1)}{d+c(t-s)\times\bigl(1-(t-s)\bigr)}>u\Bigr\}\sim$$
$$\sim\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0\leqslant s-(1+\sqrt{1-4d/c})/2<t\leqslant 1}Z^+(s,t)>\sqrt{4cd}u\Bigr\}+$$
$$+\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0\leqslant s-(1-\sqrt{1-4d/c})/2<t\leqslant 1}Z^-(s,t)>\sqrt{4cd}u\Bigr\},$$

где

$$Z^{\pm}(s,t) = \sqrt{4cd}\,\times$$
$$\times\,\frac{B(t) - B\big(s - (1 \pm \sqrt{1-4d/c})/2\big) - \big(t - s + (1 \pm \sqrt{1-4d/c})/2\big)B(1)}{d + c\big(t - s + (1 \pm \sqrt{1-4d/c})/2\big) \times \big(1 - \big(t - s + (1 \pm \sqrt{1-4d/c})/2\big)\big)}.$$

Итак, стандартное отклонение поля $Z^{\pm}(s,t)$ удовлетворяет соотношению

$$1 - \sigma_Z(s,t) \sim \frac{c(c-4d)}{8d^2}(t-s)^2, \quad |t-s| \to 0,$$

а его корреляционная функция — соотношениям

$$1 - r_Z(s,t,s',t') \sim 2(|t-t'| + |s-s'|), \quad |t-t'|,\, |s-s'|,\, |t-s|,\, |t'-s'| \to 0$$

и

$$r_Z(s,t,s',t') < 1, \quad (s,t) \neq (s',t').$$

Таким образом, ввиду теоремы 1 получаем требуемый результат.

3. Заметим, что дисперсия поля

$$Z(s,t) := \frac{B(t) - B(s) - (t-s)B(1)}{\sqrt{(t-s) \times \big(1 - (t-s)\big)}}, \quad 0 \leqslant s < t \leqslant 1,$$

равна

$$\sigma_Z^2(s,t) \equiv 1,$$

а его корреляционная функция удовлетворяет при $(s,t) \in \mathcal{S}(\delta)$ соотношению

$$1 - r_Z(s,t,s',t') \sim 2(|t-t'| + |s-s'|), \quad |t-t'|,\ |s-s'| \to 0.$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}(\delta)} Z(s,t) > d\Big\} \leqslant \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}} Z(s,t) > d\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}(\delta)} Z(s,t) > d\Big\} + \mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}(\delta)} Z(s,t) > d\Big\}.$$

По [28, теорема 7.1]

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}(\delta)} Z(s,t) > d\Big\} \sim 2(1-\delta)^2 d^4 \Psi(d), \quad d \to \infty.$$

Пусть $W(s,t)$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, — однородное гауссовское поле с единичной дисперсией и корреляционной функцией

$$r_W(s,t) = \exp(-\mathbb{Q}|t-t'| - \mathbb{Q}|s-s'|).$$

Ввиду неравенства Слепяна (см. [4]) и [28, теорема 7.1] имеем при $d \to \infty$, что

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}(\delta)} Z(s,t) > d\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}(\delta)} W(s,t) > d\right\} \sim 4\delta(2-\delta)d^4\Psi(d).$$

Итак, при $\delta \to \infty$ получаем

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}} Z(s,t) > d\Big\} \sim 2d^4\Psi(d), \quad d \to \infty. \qquad \square$$

Доказательство утверждения 2. Дисперсия поля $Y(s,t)$, $0 \leqslant s < t \leqslant 1$, равна

$$\sigma_Y^2(s,t) = (t-s) - (t-s)^2$$

и достигает своего максимума, равного $1/4$, в точках $t-s = 1/2$. Дисперсия поля

$$Z(s,t) = 2\left(B(t) - B\left(s - \frac{1}{2}\right) - \left(t - s + \frac{1}{2}\right)B(1)\right), \quad 0 \leqslant s - \frac{1}{2} < t \leqslant 1,$$

равна

$$\sigma_Z^2(s,t) = 4\left(t - s + \frac{1}{2}\right)\left[1 - \left(t - s + \frac{1}{2}\right)\right],$$

она достигает своего максимум в точках $t-s=0$, при этом $\sigma_Z(s,t)|_{t-s=0} = 1$. Стандартное отклонение этого поля удовлетворяет соотношению

$$1 - \sigma_Z(s,t) \sim 2(t-s)^2, \quad |t-s| \to 0,$$

а её корреляционная функция соотношениям

$$1 - r_Z(s,t,s',t') \sim 2(|t-t'| + |s-s'|), \quad |t-t'|,\, |s-s'|,\, |t-s|,\, |t'-s'| \to 0,$$

и

$$r_Z(s,t,s',t') < 1, \quad (s,t) \neq (s',t').$$

Поэтому

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\big(Y(s,t) - c(t-s)\big) > u\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\sup_{0\leqslant s-1/2<t\leqslant 1}\big(Z(s,t) - 2c(t-s)\big) > 2u + c\Big\}.$$

Применяя теперь теорему 1, получаем первое утверждение.

Поскольку

$$2c\left(t - s + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \left(t - s + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{c}{2} - 2c(t-s)^2,$$

имеем, что

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(s,t)\in\mathcal{S}}\big(Y(s,t) - c(t-s)\times\big(1-(t-s)\big)\big) > u\Big\}$$
$$= \mathbb{P}\left\{\sup_{0\leqslant s-1/2<t\leqslant 1}(Z(s,t) + 2c(t-s)^2) > 2u + \frac{c}{2}\right\}.$$

И опять, применяя теорему 1, получаем утверждение. $\square$

5. Приложение

Лемма 1. *Пусть* $X_{u,k}(s,t)$, $k \in K_u$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, — *семейство центрированных гауссовских полей с непрерывными траекториями. Пусть* u_k, $k \in K_u$, — *положительные константы, такие что*

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{k\in K_u} \left| \frac{u_k}{u} - 1 \right| = 0. \tag{26}$$

Если $X_{u,k}$ *имеют единичные дисперсии и корреляционные функции* r_k *(не зависящие от* u*), удовлетворяющие условию* (3) *равномерно по* $k \in K_u$*, то для некоторых* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *выполнены соотношения*

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{k\in K_u} \left| \frac{\mathbb{P}\Big\{ \sup\limits_{(s,t)\in D_1(u)} X_{u,k}(s,t) > u_k \Big\}}{\Psi(u_k)} - \mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda_1)\mathcal{H}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda_2) \right| = 0,$$

где

$$D_1(u) = [0, \lambda_1 u^{-2/\alpha}] \times [0, \lambda_2 u^{-2/\alpha}],$$

и

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{k\in K_u} \left| \frac{\mathbb{P}\left\{ \sup\limits_{(s,t)\in D_2(u)} \frac{X_{u,k}(s,t)}{\big(1+(c/u)(s-t)\big)(1+b|s-t|^\alpha)} > u \right\}}{\Psi(u)} - \mathcal{P}_\alpha^{f(s-t)}(a^{1/\alpha}\lambda_1, a^{1/\alpha}\lambda_2) \right| = 0,$$

где $b \geqslant 0$, $c \in \mathbb{R}$,

$$D_2(u) = \{(s,t)\colon s \in [0, \lambda_1 u^{-2/\alpha}],\ |s-t| \leqslant \lambda_2 u^{-2/\alpha}\},$$

и

$$f(t) = \frac{b}{a}|t|^\alpha + \frac{c}{\sqrt{a}} t \mathbb{I}_{\{\alpha=2\}}.$$

Кроме того,

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{k\in K_u} \left| \frac{\mathbb{P}\Big\{ \sup\limits_{(s,t)\in D_3(u)} X_{u,k}(s,t) > u_k \Big\}}{\Psi(u_k)} - \mathcal{Q}_\alpha(a^{1/\alpha}\lambda_1, a^{1/\alpha}\lambda_2) \right| = 0,$$

где

$$D_3(u) = \{(s,t)\colon s \in [0, \lambda_1 u^{-2/\alpha}],\ 0 \leqslant s-t \leqslant \lambda_2 u^{-2/\alpha}\}.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.1 в [12]. □

Я признателен рецензенту за его предложения и рекомендации, позволившие значительно улучшить мою работу. Работа выполнена при поддержке проекта 200021-166274 Национального научного фонда Швейцарии.

Литература

[1] Питербарг В. И. О работе Пикандса «Вероятности пересечения для гауссовского стационарного процесса» // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1972. — Т. 27, № 5. — С. 25—30.

[2] Питербарг В. И. Двадцать лекций о гауссовских процессах. — М.: МЦНМО, 2015.

[3] Ширяев А. Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // Теория вероятн. и её примен. — 1963. — Т. 8, № 1. — С. 26—51.

[4] Adler R., Taylor J. Random Fields and Geometry. — New York: Springer, 2007. — (Springer Monographs Math.).

[5] Bai L., Dębicki K., Hashorva E., Luo L. On generalised Piterbarg constants // Methodol. Comput. Appl. Probab. — 2018. — Vol. 20. — P. 137—164.

[6] Dębicki K. Ruin probability for Gaussian integrated processes // Stoch. Process. Appl. — 2002. — Vol. 98, no. 1. — P. 151—174.

[7] Dębicki K., Engelke S., Hashorva E. Generalized Pickands constants and stationary max-stable processes // Extremes. — 2017. — Vol. 20, no. 3. — P. 493—517.

[8] Dębicki K., Hashorva E. On extremal index of max-stable stationary processes // Prob. Math. Statist. — 2017. — Vol. 37. — P. 299—317.

[9] Dębicki K., Hashorva E., Ji L. Tail asymptotics of supremum of certain Gaussian processes over threshold dependent random intervals // Extremes. — 2014. — Vol. 17, no. 3. — P. 411—429.

[10] Dębicki K., Hashorva E., Ji L., Tabiś K. Extremes of vector-valued Gaussian processes: Exact asymptotics // Stoch. Process. Appl. — 2015. — Vol. 125, no. 11. — P. 4039—4065.

[11] Dębicki K., Hashorva E., Liu P. Extremes of Gaussian random fields with regularly varying dependence structure // Extremes. — 2017. — Vol. 20. — P. 333—392.

[12] Dębicki K., Hashorva E., Liu P. Uniform tail approximation of homogeneous functionals of Gaussian fields // Adv. Appl. Prob. — 2017. — Vol. 49. — P. 1037—1066.

[13] Dębicki K., Kosiński K. On the infimum attained by the reflected fractional Brownian motion // Extremes. — 2014. — Vol. 17, no. 3. — P. 431—446.

[14] Deelstra G. Remarks on 'boundary crossing result for Brownian motion' // Blätt. DGVFM. — 1994. — Vol. 21. — P. 449—456.

[15] Dieker A. B. Extremes of Gaussian processes over an infinite horizon // Stoch. Process. Appl. — 2005. — Vol. 115, no. 2. — P. 207—248.

[16] Dieker A. B., Mikosch T. Exact simulation of Brown—Resnick random fields at a finite number of locations // Extremes. — 2015. — Vol. 18. — P. 301—314.

[17] Dieker A. B., Yakir B. On asymptotic constants in the theory of Gaussian processes // Bernoulli. — 2014. — Vol. 20, No. 3. — P. 1600—1619.

[18] Frick K., Munk A., Sieling H. Multiscale change-point inference // J. R. Stat. Soc. Ser. B. Stat. Methodol. — 2014. — Vol. 76. — P. 495—580.

[19] Frick K., Munk A., Sieling H. Wild binary segmentation for multiple change-point detection // Ann. Statist. — 2014. — Vol. 42. — P. 2243—2281.

[20] Hashorva E. Representations of max-stable processes via exponential tilting // Stoch. Process. Appl. — 2018. — Vol. 128, no. 9. — P. 2952—2978.

[21] Hogan M., Siegmund D. Large deviations for the maxima of some random fields // Adv. Appl. Math. — 1986. — Vol. 7. — P. 2—22.

[22] Jarušková D., Piterbarg V. I. Log-likelihood ratio test for detecting transient change // Statist. Probab. Lett. — 2011. — Vol. 81. — P. 552—559.

[23] Levin B., Kline J. The cusum test of homogeneity with an application in spontaneous abortion epidemiology // Stat. Med. — 1985. — Vol. 4 — P. 469—488.

[24] Lorden G. Procedures for reacting to a change in distribution // Ann. Math. Statist. — 1971. — Vol. 42 — P. 1897—1908.

[25] Niu Y. S., Zhang H. The screening and ranking algorithm to detect DNA copy number variations // Ann. Appl. Statist. — 2012. — Vol. 6. — P. 1306—1326.

[26] Page E. S. Continuous inspection schemes // Biometrika. — 1954. — Vol. 41. — P. 100—115.

[27] Pickands J., III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 51—73.

[28] Piterbarg V. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. — Providence: Amer. Math. Soc., 1996. — (Transl. Math. Monogr., Vol. 148).

[29] Siegmund D. Boundary crossing probabilities and statistical applications // Ann. Statist. — 1986. — Vol. 14, no. 2. — P. 361—404.