

# Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными интенсивностями источников ветвления

Д. М. БАЛАШОВА

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

e-mail: daria.balashova@abc.math.msu.su

УДК 519.21

**Ключевые слова:** симметричные ветвящиеся случайные блуждания, эволюционный оператор, дискретный спектр, функция Грина.

## Аннотация

Рассмотрено непрерывное симметричное ветвящееся случайное блуждание по многомерной решётке с конечным множеством источников ветвления. Наличие положительного собственного значения в дискретном спектре эволюционного оператора влечёт экспоненциальный рост моментов численностей частиц как в произвольной точке, так и на всей решётке. В работе представлены ветвящиеся случайные блуждания с конечным числом источников с положительной или отрицательной интенсивностью, расположенных в вершинах симплекса. Для ветвящегося случайного блуждания с произвольной конфигурацией источников найдены критические значения интенсивностей, позволяющие делать выводы о существовании положительных собственных значений эволюционного оператора.

## Abstract

*D. M. Balashova, Branching random walks with alternating sign intensities of branching sources, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 75–88.*

We consider a continuous-time symmetric branching random walk on a multidimensional lattice with a finite set of particle generation centers, i.e., branching sources. The existence of a positive eigenvalue of the evolutionary operator means the exponential growth of the first moment of the total number of particles both at an arbitrary point and on the entire lattice. Branching random walks with positive or negative intensities of sources that have a simplex configuration are presented in the paper. It is established that the amount of positive eigenvalues of the evolutionary operator, counting their multiplicity, does not exceed the amount of the branching sources with positive intensity, while the maximal eigenvalue is simple. For branching random walk with different positive intensities of sources and arbitrary configuration for both finite and infinite variance of jumps, the critical values of sources' intensities are found, which allows us to prove the existence of positive eigenvalues of the evolutionary operator.

## 1. Введение

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем по многомерной решётке  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ , с конечным числом находящихся на ней источников ветвления. Блуждание предполагается однородным по времени и пространству, симметричным и неприводимым. Ветвящиеся случайные блуждания широко применяются для описания популяционной динамики объектов с неперекрывающимися поколениями, например при описании распространения вирусных инфекций [9, 12], моделировании процесса эпидемии и вакцинации [13], различных физических, биологических и генетических систем [15].

Ветвящиеся случайные блуждания по  $\mathbb{Z}^d$  с непрерывным временем в последние десятилетия рассмотрены в ряде публикаций (см. [2, 4, 7, 8, 11]). Эволюционные уравнения для переходных вероятностей и моментов численностей частиц часто удобно представлять в виде линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В силу их линейности исследование асимптотического поведения решений при  $t \rightarrow \infty$  сводится к изучению спектра соответствующих операторов. В частности, наличие положительного собственного значения в спектре эволюционного оператора обеспечивает экспоненциальный рост численностей частиц как в каждой точке, так и на всей решётке. Ветвящееся случайное блуждание с экспоненциальным ростом численностей частиц называется надкритическим.

Анализ эволюционного оператора ветвящегося случайного блуждания с несколькими источниками в общем виде был произведён в [7], где отмечалось, в частности, что наличие источников ветвления может привести к появлению положительных собственных значений оператора. В [10] было доказано, что для случая равных интенсивностей источников и конечной дисперсии скачков количество собственных значений (с учётом кратности) не превосходит количества источников  $N$  и кратность каждого собственного значения оператора не превышает  $N - 1$ . В [16] для источников с равными интенсивностями в случае бесконечной дисперсии скачков показано, что появление нескольких младших собственных значений в спектре эволюционного оператора может быть вызвано симплициальной конфигурацией источников ветвления.

Кратко опишем содержание работы. В разделе 2 представлено формальное описание модели ветвящегося случайного блуждания с несколькими источниками ветвления, введены основные определения и уравнения для средних численностей частиц, показано, что асимптотика поведения численностей частиц связана со спектрами соответствующих операторов. В разделе 3 рассмотрены модели с источниками, которые могут иметь как положительные, так и отрицательные интенсивности и образуют симплициальные конфигурации. В разделе 4 найдены критические значения для интенсивностей источников с произвольной конфигурацией.

## 2. Описание модели

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание по многомерной решётке  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ , в котором ветвление — рождение или смерть — происходит в некоторых источниках  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Предполагается, что случайное блуждание задано матрицей переходных интенсивностей  $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ , обладающей свойствами  $a(x, y) = a(y, x) = a(0, y - x) = a(y - x)$  для всех  $x$  и  $y$ . Таким образом, случайное блуждание симметрично и пространственно однородно. Кроме того, предполагаются выполненными свойства регулярности

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) = 0$$

и неприводимости, т. е. для всех  $z \in \mathbb{Z}^d$  существует множество векторов  $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{Z}^d$ , таких что

$$z = \sum_{i=1}^k z_i$$

и  $a(z_i) \neq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Вероятность перехода  $p(t, \cdot, y)$  удобно рассматривать как функцию  $p(t)$  в  $l^2(\mathbb{Z}^d)$ , зависящую от времени  $t$  и параметра  $y$ . Для времени  $h \rightarrow 0$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} p(h, x, y) &= a(x, y)h + o(h) \text{ при } y \neq x, \\ p(h, x, x) &= 1 + a(x, x)h + o(h). \end{aligned} \tag{1}$$

Как известно из [3], переходные вероятности удовлетворяют системе обратных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = \sum_{x'} a(x, x') p(t, x', y), \quad p(0, x, y) = \delta(x - y),$$

где  $\delta$  — дискретная  $\delta$ -функция Кронекера на  $\mathbb{Z}^d$ .

Мы предполагаем, что ветвление происходит в источниках  $x_i$  и определяется инфинитезимальными производящими функциями

$$f_i(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n} u^n, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

где  $\sum_n b_n(x_i) = 0$ ,  $b_n(x_i) \geq 0$  при  $n \neq 1$  и  $b_1(x_i) < 0$ ,  $f_i^{(r)}(1) < \infty$  при всех  $r \in \mathbb{N}$ .

**Определение 1.** Интенсивностью источника  $x_i$  называется величина

$$\beta_i = f'(1, x_i) = \sum_n n b_n(x_i) = -(b_1(x_i)) \left( \sum_{n \neq 1} n \frac{b_n(x_i)}{-(b_1(x_i))} - 1 \right),$$

характеризующая среднее число рождающихся в нём потомков.

Пусть  $\mu_t(y)$  — число частиц в момент времени  $t$  в точке  $y$  и

$$m_1(t, x, y) := \mathbb{E}_x \mu_t(y) -$$

математическое ожидание числа частиц в точке  $y$  в момент времени  $t$  при условии, что в начальный момент времени  $t = 0$  в системе была одна частица, расположенная в точке  $x$ . Тогда согласно [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y)}{\partial t} &= \sum_{x'} a(x, x') m_1(t, x', y) + \sum_{i=1}^N \beta_i \delta(x - x_i) m_1(t, x, y), \\ m_1(0, x, y) &= \delta(x - y). \end{aligned} \quad (2)$$

На множестве функций  $u(x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}^d$ , рассмотрим оператор

$$(\mathcal{A}u)(x) = \sum_{x' \in \mathbb{Z}^d} a(x - x') u(x')$$

и для каждого из источников  $x_i \in \mathbb{Z}^d$  операторы

$$(\Delta_{x_i} u)(x) = \delta(x - x_i) u(x),$$

где  $\delta(\cdot)$  — дискретная  $\delta$ -функция Кронекера на  $\mathbb{Z}^d$ . Оператор  $\mathcal{A}$ , как оператор в гильбертовом пространстве  $l^2(\mathbb{Z}^d)$ , является самосопряжённым, операторы  $\Delta_{x_i}$  действуют в каждом из функциональных пространств  $l^p(\mathbb{Z}^d)$ ,  $p \in [1, \infty]$  (см. [7]).

Поведение среднего числа частиц как в произвольной точке, так и на всей решётке можно описать в терминах эволюционного оператора специального типа

$$\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^N \beta_i \Delta_{x_i}, \quad x_i \in \mathbb{Z}^d, \quad (3)$$

который является возмущением генератора  $\mathcal{A}$  симметричного случайного блуждания. Этот оператор можно трактовать как линейный ограниченный оператор, действующий в каждом из функциональных пространств  $l^p(\mathbb{Z}^d)$ ,  $p \in [1, \infty]$  (см. [7]).

Согласно [7] эволюционные уравнения для переходных вероятностей (1) и моментов численностей частиц (2) можно представить как следующие дифференциальные уравнения в пространствах  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  и  $l^p(\mathbb{Z}^d)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{dp(t, x, y)}{dt} &= (\mathcal{A}p(t, \cdot, y))(x), \quad p(0, x, y) = \delta(x - y), \\ \frac{dm_1(t, x, y)}{dt} &= (\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N} m_1(t, \cdot, y))(x), \quad m_1(0, x, y) = \delta(x - y). \end{aligned}$$

Функция Грина оператора  $\mathcal{A}$  может быть представлена как преобразование Лапласа переходной вероятности  $p(t, x, y)$

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta, \quad \lambda \geq 0, \quad (4)$$

где

$$\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i(\theta, z)}$$

при  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Для дальнейших исследований существенную роль играет величина  $G_0 := G_0(0, 0)$ .

Если выполнено неравенство

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |z|^2 a(z) < \infty, \quad (5)$$

где  $|z|$  — евклидова норма вектора  $z$ , то дисперсия скачков конечна и  $G_0 = \infty$  при  $d = 1$  и  $d = 2$  и  $G_0 < \infty$  при  $d \geq 3$  [8].

В другом случае если для достаточно больших по норме  $z \in \mathbb{Z}^d$  выполняется асимптотическое равенство

$$a(z) \sim \frac{H(z/|z|)}{|z|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 2), \quad (6)$$

где  $H(\cdot)$  — положительная функция, симметричная на сфере  $S^{d-1} = \{z \in \mathbb{R}^d: |z| = 1\}$ , то  $G_0 = \infty$  при  $d = 1$ ,  $\alpha \in [1, 2)$  и  $G_0 < \infty$  при  $d = 1$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  или при  $d \geq 2$ ,  $\alpha \in (0, 2)$  [5]. Условие (6) приводит к расходимости ряда

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |z|^2 a(z)$$

и бесконечной дисперсии скачков.

### 3. Симплициальные конфигурации источников

#### 3.1. Три источника ветвления произвольной интенсивности

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание на  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$ , с тремя источниками ветвления, имеющими произвольные интенсивности  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и находящимися в вершинах некоторого симплекса, т. е.  $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_3| = |x_2 - x_3|$ . Симплексы такого рода на  $\mathbb{Z}^d$  существуют, например, в качестве их вершин можно выбрать точки  $(0, 0, t, 0, 0, \dots)$ ,  $(0, t, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $(t, 0, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Обозначим  $\tilde{G}_\lambda := G_\lambda(x_i, x_j) = G_\lambda(0, |x_i - x_j|)$  при  $i \neq j$ , эта величина не зависит от  $i, j$  в силу симплициальной конфигурации источников. В этом случае оператор (3) принимает вид

$$\mathcal{H}_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} = \mathcal{A} + \beta_1 \Delta_{x_1} + \beta_2 \Delta_{x_2} + \beta_3 \Delta_{x_3}.$$

Заметим, что  $\lambda$  является собственным значением оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \beta_2, \beta_3}$  тогда и только тогда, когда выполнено

$$\beta_1 \beta_2 \beta_3 (3\tilde{G}_0^2 G_0 - 2\tilde{G}_0^3 - G_0^3) + (\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_3)(G_0^2 - \tilde{G}_0^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)G_0 + 1 = 0 \quad (7)$$

(см. [7, теорема 6]).

На рис. 1 представлены области значений параметров  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  по числу собственных значений оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \beta_2, \beta_3}$  в пространстве  $l^2(\mathbb{Z}^3)$ . На этом рисунке  $x_1 = (0, 0, 1)$ ,  $x_2 = (0, 1, 0)$ ,  $x_3 = (1, 0, 0)$  — координаты источников, оператор  $\mathcal{A}$  — стандартный лапласиан, т. е.  $a(0) = -1$ ,  $a(z) = 1/6$  для  $z = \{z_1, z_2, z_3\}$ , таких что  $|z_1| + |z_2| + |z_3| = 1$ , иначе  $a(z) = 0$ . В результате моделирования в системе Wolfram<sup>®</sup> Alpha получены значения  $G_0 = 1,1564$  и  $\tilde{G}_0 = 0,0414$ .

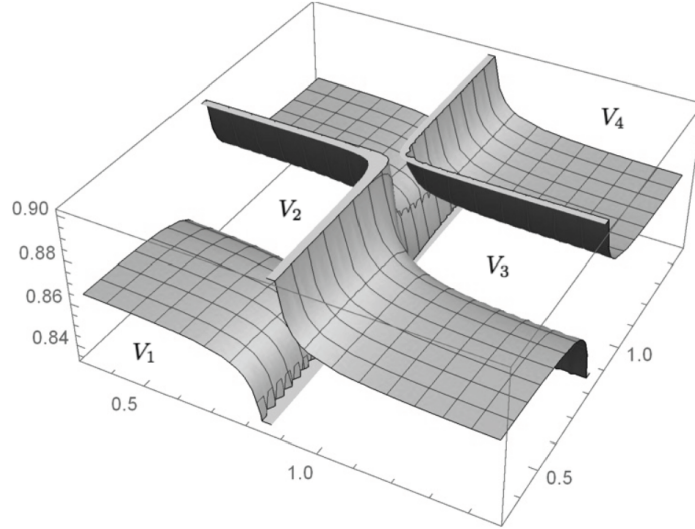


Рис. 1. Области значений параметров  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

Область  $V_1$  представляет собой множество значений параметров  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , при которых отсутствуют положительные собственные значения оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \beta_2, \beta_3}$ . Область  $V_2$  соответствует единственному,  $V_3$  — двум и  $V_4$  — трём собственным значениям оператора с учётом кратности.

В случае одинаковых интенсивностей  $\beta := \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$  обозначим через  $\beta_c$  и  $\beta_{c_1}$  такие критические значения для интенсивности  $\beta$ , что при  $\beta \leq \beta_c$  спектр оператора  $\mathcal{H}_\beta$  не содержит собственных значений, при  $\beta \in (\beta_c, \beta_{c_1})$  у оператора имеется одно и при  $\beta \geq \beta_{c_1}$  более одного собственного значения. Уравнение (7) в этом случае принимает вид

$$\beta^3 (3\tilde{G}_0^2 G_0 - 2\tilde{G}_0^3 - G_0^3) + 3\beta^2 (G_0^2 - \tilde{G}_0^2) - 3\beta G_0 + 1 = 0.$$

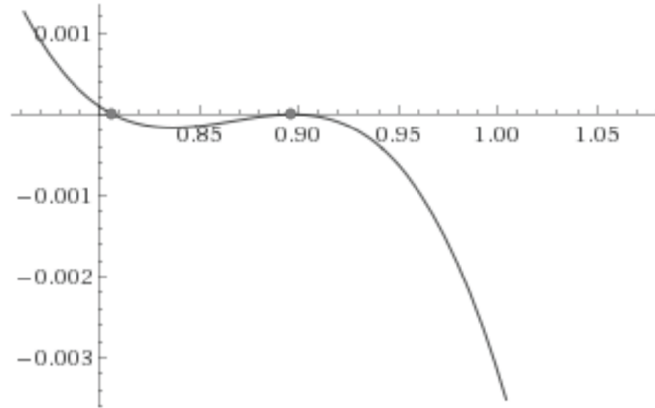


Рис. 2. Значения  $\beta_c$  и  $\beta_{c_1}$

Тогда

$$\beta_c = \frac{1}{G_0 + 2\tilde{G}_0}, \quad \beta_{c_1} = \frac{1}{G_0 - \tilde{G}_0}.$$

В данном случае вычисления, выполненные в системе Wolfram<sup>®</sup> Alpha, приводят к следующим результатам:  $\beta_c = 0,8070$ ,  $\beta_{c_1} = 0,8969$ , решение проиллюстрировано на рис. 2.

### 3.2. Знакопеременные источники ветвления

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание с  $p$  источниками положительной интенсивности  $\beta > 0$  и  $n$  источниками отрицательной интенсивности  $(-\beta) < 0$ , находящимися в вершинах симплекса,  $|x_i - x_j| = \text{const}$  для  $i \neq j$ . Обозначим  $\tilde{G}_\lambda := G_\lambda(x_i, x_j) = G_\lambda(0, |x_i - x_j|)$  при  $i \neq j$ . Источники с положительной интенсивностью указывают на точки, где степень рождаемости преобладает над степенью смертности, а в источниках с отрицательной интенсивностью наоборот.

**Теорема 1.** *Количество собственных значений  $\lambda > 0$  с учётом их кратности эволюционного оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_{p+n}}$ , где  $\beta_1 = \dots = \beta_p = \beta$  и  $\beta_{p+1} = \dots = \beta_{p+n} = -\beta$ , не превосходит количества источников ветвления с положительной интенсивностью, максимальное из этих собственных значений простое.*

**Доказательство.** Согласно (3) оператор  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_{p+n}}$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_{p+n}} = \mathcal{A} + \beta\Delta_{x_1} + \dots + \beta\Delta_{x_p} - \beta\Delta_{x_{p+1}} - \dots - \beta\Delta_{x_{p+n}}.$$

Заметим, что  $\lambda$  является собственным значением оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_{p+n}}$  тогда и только тогда, когда система линейных уравнений относительно переменных  $X_1, \dots, V_{p+n}$

$$\begin{cases} -X_1 + \beta G_\lambda X_1 + \beta \tilde{G}_\lambda X_2 + \dots + \beta \tilde{G}_\lambda X_{p+n} = 0, \\ -X_2 + \beta \tilde{G}_\lambda X_1 + \beta G_\lambda X_2 + \dots + \beta \tilde{G}_\lambda X_{p+n} = 0, \\ \dots \\ X_{p+1} + \beta \tilde{G}_\lambda X_1 + \beta \tilde{G}_\lambda X_2 + \dots + \beta \tilde{G}_\lambda X_{p+n} = 0, \\ \dots \\ X_{p+n} + \beta \tilde{G}_\lambda X_1 + \beta \tilde{G}_\lambda X_2 + \dots + \beta G_\lambda X_{p+n} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

имеет нетривиальное решение (см. [7, теорема 6]). Пусть  $S_{p,n}$  — матрица системы (8):

$$S_{p,n} = \begin{pmatrix} \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda + 1 & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем в этом случае по индукции равенство

$$|S_{p,n}| = (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^{p-1} (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1)^{n-1} \times \\ \times ((\beta G_\lambda)^2 + (p+n-2)\beta^2 G_\lambda \tilde{G}_\lambda - (p+n-1)(\beta \tilde{G}_\lambda)^2 + (p-n)\beta \tilde{G}_\lambda - 1). \quad (9)$$

Непосредственный подсчёт показывает, что

$$|S_{p,1}| = \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 - \beta \tilde{G}_\lambda & 0 & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda - \beta G_\lambda + 1 & 0 \\ 0 & \beta G_\lambda - 1 - \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda - \beta G_\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda - \beta G_\lambda + 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{vmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 - \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots & \beta G_\lambda - 1 + (p-1)\beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{vmatrix} = \\
 &= (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^{p-1} \cdot ((\beta G_\lambda)^2 + (p-1)\beta^2 G_\lambda \tilde{G}_\lambda - p(\beta \tilde{G}_\lambda)^2 + (p-1)\beta \tilde{G}_\lambda - 1).
 \end{aligned}$$

Проведём шаг индукции:

$$\begin{aligned}
 |S_{p,n+1}| &= \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 & \beta \tilde{G}_\lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1 & \dots \end{vmatrix} = \\
 &= (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1) \cdot |S_{p,n}| + (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1) \cdot (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^p \times \\
 &\times (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1)^{n-1} \cdot \beta \tilde{G}_\lambda = (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^{p-1} (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1)^n \times \\
 &\times ((\beta G_\lambda)^2 + (p+n-1)\beta^2 G_\lambda \tilde{G}_\lambda - (p+n)(\beta \tilde{G}_\lambda)^2 + (p-n-1)\beta \tilde{G}_\lambda - 1).
 \end{aligned}$$

Индуктивный переход проведён, следовательно, требуемое равенство (9) доказано.

Вернёмся к вопросу о существовании собственных значений оператора, что равносильно существованию у системы линейных уравнений (8) нетривиального решения и равенства определителя её матрицы нулю. Получаем

$$\begin{aligned}
 &(\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^{p-1} (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1)^{n-1} \times \\
 &\times ((\beta G_\lambda)^2 + (p+n-2)\beta^2 G_\lambda \tilde{G}_\lambda - (p+n-1)(\beta \tilde{G}_\lambda)^2 + (p-n)\beta \tilde{G}_\lambda - 1) = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь первый множитель имеет не более  $p-1$  корней с учётом кратности, второй множитель не имеет корней в силу неравенства  $G_\lambda > \tilde{G}_\lambda$ , третий множитель имеет не более одного корня. Таким образом, оператор  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_{p+n}}$  имеет не более  $p$  собственных значений. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим

$$D_\lambda := (G_\lambda - \tilde{G}_\lambda)(G_\lambda + \tilde{G}_\lambda(n+p-1)).$$

Собственные значения оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_{p+n}}$  находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} &= G_\lambda - \tilde{G}_\lambda, \\ \frac{1}{\beta} &= \frac{2D_\lambda}{(n-p)\tilde{G}_\lambda + \sqrt{(n-p)^2(\tilde{G}_\lambda)^2 + 4D_\lambda}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что  $G_\lambda - \tilde{G}_\lambda$  монотонно убывает по  $\lambda$  [16], при этом

$$\frac{2D_\lambda}{(n-p)\tilde{G}_\lambda + \sqrt{(n-p)^2(\tilde{G}_\lambda)^2 + 4D_\lambda}} > G_\lambda - \tilde{G}_\lambda.$$

Следовательно, старшее собственное значение  $\lambda_0$  находится из уравнения (10) и имеет единичную кратность.

Напомним, что через  $\beta_c$  мы обозначили такое минимальное значение интенсивности источников, что при  $\beta > \beta_c$  в спектре оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_{p+n}}$  содержатся положительные собственные значения, а через  $\beta_{c_1}$  такое максимальное значение интенсивности, что при  $\beta \in (\beta_c, \beta_{c_1})$  имеется единственное собственное значение  $\lambda_0(\beta)$ . Тогда

$$\beta_c = \frac{(n-p)\tilde{G}_0 + \sqrt{(n-p)^2(\tilde{G}_0)^2 + 4D_0}}{2D_0}, \quad \beta_{c_1} = \frac{1}{G_0 - \tilde{G}_0}.$$

Теорема доказана.  $\square$

#### 4. Произвольная конфигурация источников ветвления с положительными интенсивностями

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание с  $N$  источниками с произвольными положительными интенсивностями  $\beta_1, \dots, \beta_N$ , находящимися в произвольной конфигурации. Обозначим  $\beta_{\min} := \min_i \{\beta_i\}$  и  $\beta_{\max} := \max_i \{\beta_i\}$ . Предположим, что существуют такие числа  $\beta_{c_{\min}}$  и  $\beta_{c_{\max}}$ , что при  $\beta_{\min} > \beta_{c_{\min}}$  оператор  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N}$  содержит положительные собственные значения (одно или несколько), а при  $\beta_{\max} < \beta_{c_{\max}}$  оператор  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N}$  не содержит положительных собственных значений.

**Теорема 2.** Пусть ветвящееся случайное блуждание удовлетворяет условиям (5) или (6). Если  $G_0 = \infty$ , то  $\beta_{c_{\min}} = 0$  при  $N \geq 1$ . Если  $G_0 < \infty$ , то  $\beta_{c_{\min}} = \beta_{c_{\max}} = G_0^{-1}$  при  $N = 1$ ,  $0 < \beta_{c_{\min}}$  и  $0 < \beta_{c_{\max}} < G_0^{-1}$  при  $N > 1$ .

**Доказательство.** Согласно (3) оператор  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N}$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^N \beta_i \Delta_{x_i}.$$

Заметим, что  $\lambda > 0$  является собственным значением оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N}$  тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$V_i - \sum_{j=1}^N \beta_j G_\lambda(x - I, x_j) V_j = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

относительно переменных  $V_i$  имеет нетривиальное решение (см. [7]). Из этого следует, что детерминант соответствующей матрицы  $\Gamma_{\beta_1, \dots, \beta_N}(\lambda) - I$  равен 0, где

$$\Gamma_{\beta_1, \dots, \beta_N}(\lambda) = [\beta_i G_\lambda(x_i, x_j)].$$

Данная матрица не симметрична, так как  $\beta_i$  различны в различных строках матрицы  $\Gamma_{\beta_1, \dots, \beta_N}(\lambda)$ , но если каждый  $(ij)$ -й элемент поделить на  $\sqrt{\beta_i}$  и умножить на  $\sqrt{\beta_j}$ , то получится симметричная матрица  $\Gamma_\beta(\lambda) - I$ , где

$$\Gamma_\beta(\lambda) = [\sqrt{\beta_i \beta_j} G_\lambda(x_i, x_j)].$$

Заметим, что

$$\det(\Gamma_{\beta_1, \dots, \beta_N}(\lambda) - I) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\det(\Gamma_\beta(\lambda) - I) = 0,$$

таким образом, 1 является собственным значением матрицы  $\Gamma_\beta(\lambda)$ . Рассмотрим матрицу

$$D(\lambda_1, \lambda_2) := \Gamma_\beta(\lambda_1) - \Gamma_\beta(\lambda_2).$$

Из представления функции Грина (4) следует, что элементы матрицы  $D(\lambda_1, \lambda_2)$  имеют вид

$$D_{ij}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sqrt{\beta_i \beta_j}(\lambda_2 - \lambda_1)}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, x_i - x_j)}}{(\lambda_1 - \phi(\theta))(\lambda_2 - \phi(\theta))} d\theta.$$

Пусть  $s = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]^d} \{-\phi(\theta)\}$ . Тогда

$$\frac{1}{(\lambda_1 - \phi(\theta))(\lambda_2 - \phi(\theta))} \geq \frac{1}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)} > 0.$$

Рассмотрим матрицу

$$\tilde{D}(\lambda_1, \lambda_2) = [\tilde{D}_{ij}(\lambda_1, \lambda_2)],$$

где

$$\tilde{D}_{ij}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, x_i - x_j)}}{(\lambda_1 - \phi(\theta))(\lambda_2 - \phi(\theta))} d\theta.$$

Ввиду чётности функции  $\theta(\phi)$  матрица  $\tilde{D}(\lambda_1, \lambda_2)$  вещественна и симметрична, докажем её положительную определённость:

$$\begin{aligned} (\tilde{D}(\lambda_1, \lambda_2)z_i, z_j) &= \sum_{i,j=1}^N \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, x_i - x_j)}}{(\lambda_1 - \phi(\theta))(\lambda_2 - \phi(\theta))} z_i z_j d\theta = \\ &= \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(\lambda_1 - \phi(\theta))(\lambda_2 - \phi(\theta))} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (e^{i(\theta, x_i)} z_i) (e^{-i(\theta, x_j)} z_j) = \\ &= \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{|e^{i(\theta, x_1)} z_1 + \dots + e^{i(\theta, x_N)} z_N|^2}{(\lambda_1 - \phi(\theta))(\lambda_2 - \phi(\theta))} \geq \\ &\geq \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{|e^{i(\theta, x_1)} z_1 + \dots + e^{i(\theta, x_N)} z_N|^2}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)} > 0. \end{aligned}$$

По критерию Сильвестра [1] все угловые миноры матрицы  $\tilde{D}(\lambda_1, \lambda_2)$  положительны, следовательно, угловые миноры матрицы  $D(\lambda_1, \lambda_2)$ , имеющие вид

$$\Delta_{D(\lambda_1, \lambda_2), i} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \prod_{j=1}^i \beta_j \times \Delta_{\tilde{D}(\lambda_1, \lambda_2), i}}{(2\pi)^d}, \quad i = 1, \dots, N,$$

положительны, и значит, матрица  $D(\lambda_1, \lambda_2)$  положительно определена.

Обозначим через

$$\zeta_0(\lambda) \geq \zeta_1(\lambda) \geq \dots \geq \zeta_{N-1}(\lambda)$$

собственные значения вещественной эрмитовой положительно определённой матрицы  $\Gamma_\beta(\lambda)$ , а через

$$\gamma_0(\lambda) \geq \gamma_1(\lambda) \geq \dots \geq \gamma_{N-1}(\lambda) -$$

собственные значения вещественной эрмитовой положительно определённой матрицы  $\Gamma(\lambda) = [G_\lambda(x_i, x_j)]$ . Собственные значения  $\zeta_i(\lambda)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , по теореме Вейля [6, теорема 4.3.1] удовлетворяют неравенствам  $\zeta_i(\lambda_1) > \zeta_i(\lambda_2)$  при  $\lambda_2 > \lambda_1$ . Следовательно, каждое из уравнений  $\zeta_i(\lambda) = 1$  имеет не более одного решения  $\lambda$ , и оператор  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N}$  имеет не более  $N$  собственных значений.

Если  $G_0 = \infty$  и  $G_\lambda \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , то  $\|\Gamma_\beta(\lambda)\| \rightarrow \infty$  и  $\zeta_0(\lambda) \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Тогда уравнение  $\zeta_0(\lambda) = 1$  имеет решение при любых  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Следовательно,  $\beta_{c_{\min}} = 0$ .

Для случая  $G_0 < \infty$  и  $N = 1$  утверждение теоремы  $\beta_{c_{\min}} = \beta_{c_{\max}} = G_0^{-1}$  является следствием теоремы 3 из [8].

Перейдём к рассмотрению случая  $G_0 < \infty$  при  $N > 1$ ,  $G_0(x, y) < \infty$  для всех  $x$  и  $y$ . В этом случае

$$\beta_{\min} \|\Gamma(\lambda)\| \leq \|\Gamma_\beta(\lambda)\| \leq \beta_{\max} \|\Gamma(\lambda)\| < \infty$$

и

$$\Gamma_{\beta}(\lambda) \rightarrow \Gamma_{\beta}(0), \quad \Gamma(\lambda) \rightarrow \Gamma(0) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0,$$

существует такое  $\gamma_* < \infty$ , что  $\gamma_0(\lambda) \leq \gamma_* < \infty$  для всех  $\lambda$ . Тогда уравнение  $\beta_{\max} \gamma_0(\lambda) = 1$  не имеет решений при  $\beta_{\max} \rightarrow 0$ . Из этого следует, что  $\beta_{c_{\max}} > 0$ .

Рассмотрим ситуацию, когда  $\beta' - \delta < \beta_i < \beta' + \delta$ ,  $\beta' \geq G_0^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда

$$\begin{aligned} &\text{для каждого } \epsilon > 0 \text{ найдётся } \delta > 0, \\ &\text{такое что } \max_{i,j} |\Gamma_{\beta_1, \dots, \beta_N, ij}(\lambda) - \beta' G_{\lambda}(x_i, x_j)| < \epsilon, \\ &\Gamma_{\beta_1, \dots, \beta_N}(\lambda) \rightarrow [\beta' G_{\lambda}(x_i, x_j)]. \end{aligned}$$

Согласно [8, теорема 3] при  $\beta_i = \beta' \geq G_0^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , оператор

$$\mathcal{H}_{\beta'} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^N \beta' \Delta_{x_i}$$

имеет положительное собственное значение. Собственные значения разности матриц  $\Gamma_{\beta_1, \dots, \beta_N}(\lambda)$  и  $[\beta' G_{\lambda}(x_i, x_j)]$  не превосходят

$$\|\Gamma_{\beta_1, \dots, \beta_N}(\lambda) - [\beta' G_{\lambda}(x_i, x_j)]\| \rightarrow 0,$$

и по теореме Вейля [6, теорема 4.3.1] собственные значения оператора  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N}$  сходятся к собственным значениям оператора  $\mathcal{H}_{\beta'}$ . Поэтому  $\mathcal{H}_{\beta_1, \dots, \beta_N}$  имеет положительные собственные значения и  $\beta_{c_{\max}} < G_0^{-1}$ . Теорема доказана.  $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00468).

## Литература

- [1] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Физматлит, 2007.
- [2] Ватутин В. А., Топчий В. А. Критические ветвящиеся процессы Беллмана—Харриса с долго живущими частицами // Тр. МИАН. — 2013. — Т. 282. — С. 257—287.
- [3] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 2. — М.: Наука, 1973.
- [4] Молчанов С. А., Яровая Е. Б. Большие отклонения для симметричного ветвящегося случайного блуждания по многомерной решётке // Тр. МИАН. — 2013. — Т. 282. — С. 195—211.
- [5] Рытова А. И., Яровая Е. Б. Многомерная лемма Ватсона и её применение // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 3. — С. 395—403.
- [6] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
- [7] Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 115—131.

- [8] Яровая Е. Б. Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания // Теория вероятн. и её примен. — 2017. — Т. 62, № 3. — С. 518—541.
- [9] Antonelly F., Bosco F. Viral evolution and adaptation as a multivariate branching process // BIOMAT 2012 / R. P. Mondaini, ed. — World Scientific, 2013. — P. 217—243.
- [10] Antonenko E. A., Yarovaya E. B. On the number of positive eigenvalues of the evolutionary operator of branching random walk // Branching Processes and Their Applications. — Berlin: Springer, 2016. — (Lect. Notes Stat.; Vol. 219). — P. 41—55.
- [11] Bulinskaya E. V. Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice // Stoch. Process. Appl. — 2018. — Vol. 128, no. 7. — P. 2325—2340. — doi:10.1016/j.spa.2017.09.007.
- [12] Claus O. Wilke probability of fixation of an advantageous mutant in a viral quasispecies // Genetics. — 2003. — Vol. 163, no. 2. — P. 467—474.
- [13] González M., Martínez R., Slavtchova-Bojkova M. Stochastic monotonicity and continuity properties of the extinction time of Bellman—Harris branching processes: an application to epidemic modelling // J. Appl. Probability. — 2010. — Vol. 47. — P. 58—71.
- [14] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Tables of Integrals, Series and Products. — San Diego: Academic Press, 2000.
- [15] Kolmogorov A. N., Petrovskii I., Piskunov N. Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique // Bull. Univ. Moscou Ser. Internat., Sec. A, Math. Mecanique. — 1937. — No. 1. — P. 1—25.
- [16] Yarovaya E. B. Positive discrete spectrum of the evolutionary operator of supercritical branching walks with heavy tails // Methodology Computing Appl. Probability. — 2017. — Vol. 19, no. 4. — P. 1151—1167.