Асимптотика вероятностей больших уклонений для простого осциллирующего случайного блуждания

Е. Л. ВЕТРОВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vetroel@gmail.com

УДК 519.214.8

Ключевые слова: случайное блуждание, условие Крамера, большие уклонения максимума.

Аннотация

В работе рассматривается простое осциллирующее случайное блуждание с $\tilde{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ в предположении, что $\mathbf{P}(\tilde{X}_{n+1} = 1 \mid \tilde{S}_n > 0) = p > 1/2$. Показано, что асимптотика вероятностей выхода за высокий уровень случайного блуждания с точностью до множителя совпадает с асимптотикой обычного случайного блуждания. Получены асимптотики для максимума случайного блуждания и для момента первого выхода за высокий уровень.

Abstract

E. L. Vetrova, Asymptotic behavior of large deviation probabilities for a simple oscillating random walk, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 89—94.

This paper considers simple oscillating random walks with $\tilde{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$, under the assumption that $\mathbf{P}(\tilde{X}_{n+1} = 1 \mid \tilde{S}_n > 0) = p > 1/2$. We show that the asymptotic behavior of probability to reach high level for the oscillating random walk and a standard random walk are similar up to a constant multiplier. The asymptotics for the maximum of a random walk and for the moment of the first exit beyond the high level are obtained.

1. Введение

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ и $Y_1, Y_2, \ldots$ — независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 1 и -1 с вероятностями p, $q = 1 - p$ и $\tilde{p}$, $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$ соответственно, $0 < p, \tilde{p} < 1$.

Введём марковскую цепь $\tilde{S}_n$, осциллирующее случайное блуждание, полагая $\tilde{S}_0 = 0$,

$$\tilde{S}_{n+1} = \begin{cases} \tilde{S}_n + X_{n+1}, & \text{если } \tilde{S}_n \geqslant 0, \\ \tilde{S}_n + Y_{n+1}, & \text{если } \tilde{S}_n < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Положим

$$\tilde{M}_n = \max(\tilde{S}_j : j \leqslant n), \quad \tilde{T}(x) = \inf(k : \tilde{S}_k > x).$$

Введём также простое случайное блуждание $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ $(S_0 = 0)$ и для него аналогично определим M_n, $T(x)$.

Для общего случайного блуждания в крамеровском случае по теореме Петрова [3] имеет место равномерная по t асимптотика:

$$\mathbf{P}(S_n > nt) \sim C_0(t) n^{-1/2} e^{-\psi(t)n}, \quad n \to \infty.$$

Константа $C_0(t)$ имеет вид:

1) $C_0(t) = \big(\sqrt{2\pi}\sigma\big(\lambda(t)\big)\lambda(t)\big)^{-1}$, если X_i имеют нерешётчатое распределение;
2) $C_0(t) = d/\big(\sqrt{2\pi}\sigma\big(\lambda(t)\big)(1 - e^{-\lambda(t)d})\big)$, если X_i имеют решётчатое распределение (d — максимально возможный шаг решётки).

Символ $\sim$ означает, что отношение правой части к левой стремится к 1 при $n \to \infty$. Функции $\psi(t)$ и $\lambda(t) \equiv \lambda_t$ определены ниже.

В [5] показано, что вероятность $\mathbf{P}(M_n > nt)$ имеет такую же асимптотику, но с другим $C_0(t)$.

В настоящей работе выводятся асимптотики вероятностей $\mathbf{P}(\tilde{S}_n > tn)$, $\mathbf{P}(\tilde{T}(nt) = n)$ и $\mathbf{P}(\tilde{M}_n > tn)$ для $t \in [\alpha, \beta] \subset (p - q, 1)$ в предположении, что $p > q$.

Введём следующие характеристики для крамеровского случайного блуждания:

$$\theta(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_i}, \quad \mu(\lambda) = \frac{dln\theta(\lambda)}{d\lambda}, \quad \sigma^2(\lambda) = \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda}, \quad \psi(t) = t\lambda_t - ln\theta(\lambda_t),$$

где λ_t — корень уравнения $\mu(\lambda) = t$.

Для простого случайного блуждания

$$\theta(\lambda) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda}, \quad \lambda_t = \frac{1}{2}\ln\frac{q(1+t)}{p(1-t)}, \quad \sigma^2(\lambda_t) = 1 - t^2,$$

$$\theta(\lambda_t) = \frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \psi(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{q(1+t)}{p(1-t)} - \frac{1}{2}\ln\frac{4pq}{1-t^2}.$$

2. Основные результаты

Введём сопряжённое случайное блуждание $S_n^{(t)} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^{(t)}$, $S_0^{(t)} = 0$ с $X_i^{(t)}$, принимающими значения 1 и -1 с вероятностями $p^{(t)} = (1+t)/2$ и $q^{(t)} = (1-t)/2$. Положим

$$L_{1n} = \min(S_i : i = 1, \ldots, n), \qquad L_1 = \inf(S_i : i \geqslant 1),$$
$$L_{1n}^{(t)} = \min(S_i^{(t)} : i = 1, \ldots, n), \quad L_1^{(t)} = \inf(S_i^{(t)} : i \geqslant 1).$$

Для осциллирующего случайного блуждания $\tilde{S}_n$ найдём вероятность возвращения в нуль на шаге $2n$: $u_{2n} = \mathbf{P}(\tilde{S}_{2n} = 0)$. Введём случайную величину τ момента первого возвращения в нуль. Для процесса $\tilde{S}_n$ имеем [4]

$$v_{2k} = \mathbf{P}(\tau = 2k) = pqC_{2n-2}^{n-1}(pq)^{n-1} + \tilde{p}qC_{2n-2}^{n-1}(\tilde{p}\tilde{q})^{n-1}.$$

Для вероятности $u_{2n} = \mathbf{P}(\tilde{S}_{2n} = 0)$ получаем

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} [g_\tau^k(t)] \Big|_{t=0}, \tag{2}$$

где

$$g_\tau(t) = \mathbf{E}t^\tau = \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{1 - 4s^2pq}\,\big) + \frac{q}{2\tilde{q}}\big(1 - \sqrt{1 - 4t^2pq}\,\big) -$$

производящая функция случайной величины τ.

Несложно проверить, что $\mathbf{P}(L_1 > 0) = 1 - p/q$, и следовательно,

$$\mathbf{P}(L_1^{(t)} > 0) = \frac{2t}{1+t}. \tag{3}$$

Положим

$$a(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda_t x} \mathbf{P}(L_1^{(t)} \geqslant x)\, dx = \frac{2t\Big(1 - \sqrt{q(1+t)/\big(p(1-t)\big)}\,\Big)}{(1+t)\ln\sqrt{q(1+t)/\big(p(1-t)\big)}}.$$

Теорема 1.

1. *Равномерно по* $t \in [\alpha, \beta] \subset (p - q, 1)$

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_n > nt) \sim \tilde{C}(t) n^{-1/2} e^{-n\psi(t)}. \tag{4}$$

2. *При* $k = o(\sqrt{n}) \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_{n-k} > nt) \sim \theta^{-k}(\lambda_t)\tilde{C}(t) n^{-1/2} e^{-n\psi(t)}. \tag{5}$$

3. *Если* $nt/k \in [\alpha, \beta] \subset (p - q, 1)$, *то*

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_k > nt) \sim \tilde{C}\left(\frac{nt}{k}\right) k^{-1/2} e^{-n\psi(nt/k)}, \tag{6}$$

где

$$\tilde{C}(t) = C_0(t) \frac{2t}{1+t} \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k} \theta^{-2k}(\lambda_t)$$

и u_{2k} *задано соотношением* (2).

Доказательство. Введём событие

$$A_{2l} = \{\tilde{S}_{2l} = 0,\ \tilde{S}_j > 0,\ j \in (2l, n)\} -$$

последнее возвращение в нуль на $(2l)$-м шаге. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tilde S_n > nt) &= \sum_{2l\leqslant n} \mathbf{P}(\tilde S_n > nt,\ A_{2l}) = \\ &= \sum_{2l\leqslant n} \mathbf{P}\big(\tilde S_n > nt,\ \tilde S_{2l} = 0,\ \tilde S_j > 0,\ j\in(2l,n)\big) = \\ &= \sum_{2l\leqslant n} \mathbf{P}(\tilde S_n > nt,\ \tilde S_j > 0,\ j\in(2l,n) \mid \tilde S_{2l}=0)\mathbf{P}(\tilde S_{2l}=0) = \\ &= \sum_{2l\leqslant n} \mathbf{P}\big(S_{n-2l} > nt,\ S_j > 0,\ j\in(1,n-2l)\big)\mathbf{P}(\tilde S_{2l}=0) = \\ &= \sum_{2l\leqslant n} \mathbf{P}(S_{n-2l} > nt,\ L_{1,n-2l} > 0)\mathbf{P}(\tilde S_{2l}=0).\end{aligned}$$

Следуя [2, теорема 4.1], представим эту сумму в виде двух слагаемых с суммированием по диапазонам

$$\text{(I) } 2l \leqslant \sqrt[3]{n}, \quad \text{(II) } \sqrt[3]{n} < 2l < (1-t)n.$$

Из теоремы Петрова несложно вывести, что при $l = o(\sqrt{n})$

$$\mathbf{P}(S_{n-2l} > nt) \sim \theta^{-2l}(\lambda_t)\mathbf{P}(S_n > nt).$$

С учётом соотношения [1, лемма 5]

$$\mathbf{P}(S_n > nt,\ L_{1,n} > 0) \sim \mathbf{P}(S_n > nt)\mathbf{P}\big(L_1^{(t)} > 0\big)$$

получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{n-2l} > nt,\ L_{1,n-2l} > 0) &\sim \mathbf{P}(S_{n-2l} > nt)\mathbf{P}\big(L_1^{(t)} > 0\big) = \\ &= \frac{2t}{1+t}\mathbf{P}(S_{n-2l} > nt) \sim \frac{2t}{1+t}\theta^{-2l}(\lambda_t)C_0(t)\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n\psi(t)}.\end{aligned}$$

Таким образом, сумма по диапазону (I) имеет асимптотику

$$\frac{2t}{1+t}C_0(t)\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n\psi(t)}\sum_{2l<\sqrt[3]{n}}\frac{u_{2l}}{\theta^{2l}(\lambda_t)} \sim \frac{2t}{1+t}C_0(t)\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n\psi(t)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{u_{2l}}{\theta^{2l}(\lambda_t)},$$

где учтено, что ряд сходится равномерно по $t\in[\alpha,\beta]\subset(p-q,1)$, так как $\theta(\lambda_t) > 1$.

Сумму по диапазону (II) оценим сверху:

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt[3]{n}<2l} \mathbf{P}(S_{n-2l} > nt,\ L_{1,n-2l} > 0)\mathbf{P}(\tilde S_{2l}=0) &\leqslant \\ \leqslant \sum_{\sqrt[3]{n}<2l}\mathbf{P}(S_{n-2l} > nt) &= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n\psi(t)}\right).\end{aligned}$$

Эта сумма пренебрежимо мала по сравнению с первой суммой (см. [2, теорема 4.1]). Таким образом, основной вклад в асимптотику вероятности

$\mathbf{P}(S_{n-2l} > nt)$ дают слагаемые с l, не превосходящим $\sqrt[3]{n}$. Утверждение 1 доказано. Утверждения 2 и 3 доказываются аналогично, следуя [2]. $\square$

Теорема 2.

1. *Равномерно по* $t \in [\alpha, \beta] \subset (p-q, 1)$ *при* $n \to \infty$
$$\mathbf{P}(\tilde{T}(nt) = n) \sim \tilde{C}_1(t) n^{-1/2} e^{-n\psi(t)}. \tag{7}$$

2. *Для* $k = o(\sqrt{n}) \geqslant 0$
$$\mathbf{P}(\tilde{T}(nt) = n-k) \sim \tilde{C}_1(t)\theta^{-k}(\lambda_t) n^{-1/2} e^{-n\psi(t)}. \tag{8}$$

3. *Равномерно по* n, k *и* t, *таким что* $nt/k \in [\alpha, \beta] \subset (p-q, 1)$,
$$\mathbf{P}(\tilde{T}(nt) = k) \sim \tilde{C}_1\left(\frac{nt}{k}\right) k^{-1/2} e^{-k\psi(nt/k)}, \tag{9}$$

где
$$\tilde{C}_1(t) = \tilde{C}(t)\lambda_t a(t).$$

Доказательство. Как и выше, используем разложение
$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\tilde{T}(nt) = n) = \\
&\quad = \sum_{2l<n} \mathbf{P}(\tilde{T}(nt) = n,\ \tilde{S}_j > 0,\ j \in (2l+1, n) \mid \tilde{S}_{2l} = 0)\mathbf{P}(\tilde{S}_{2l} = 0) = \\
&\quad = \sum_{2l<n} \mathbf{P}(T(nt) = n-2l,\ L_{1,n-2l} > 0)\mathbf{P}(\tilde{S}_{2l} = 0)
\end{aligned}$$
и разобьём сумму на два слагаемых с теми же диапазонами суммирования (I) и (II), что и в теореме 1. Для оценки суммы с диапазоном (I) воспользуемся тем, что
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T(nt) = n-2l,\ L_{1,n-2l} > 0) &\sim \mathbf{P}(T(nt) = n-2l)\mathbf{P}(L_1^{(tn/(n-2l))} > 0) \sim \\
&\sim \frac{2t}{1+t}\mathbf{P}(T(nt) = n-2l) \sim \frac{2t}{1+t}\theta^{-2l} a(t)\lambda_t C_0(t) n^{-1/2} e^{-n\psi(t)}
\end{aligned}$$
(см. [2, следствие 5.1, теорема 3.1]). Тем самым сумма по диапазону (I) эквивалентна
$$\begin{aligned}
&\frac{2t}{1+t}\lambda_t a(t) C_0(t) \sum_{2l \leqslant \sqrt[3]{n}} \theta^{-2l} u_{2l} n^{-\frac{1}{2}} e^{-n\psi(t)} \sim \\
&\quad \sim \frac{2t}{1+t}\lambda_t a(t) \sum_{l=0}^{\infty} \theta^{-2l} u_{2l} C_0(t) n^{-1/2} e^{-n\psi(t)} = \\
&\quad = \lambda_t a(t) \tilde{C}(t) n^{-1/2} e^{-n\psi(t)} = \tilde{C}_1(t) n^{-1/2} e^{-n\psi(t)}.
\end{aligned}$$

Сумма по диапазону (II) оценивается сверху так же, как в теореме 1, с учётом того, что $\mathbf{P}(T(nt) = k) \leqslant \mathbf{P}(S_k > nt)$. Утверждение 1 доказано. Утверждения 2 и 3 доказываются аналогично с использованием результатов теоремы 3.1 из [2]. $\square$

Теорема 3. *Равномерно по* $t \in [\alpha, \beta] \subset (p-q, 1)$

$$\mathbf{P}(\tilde{M}_n > nt) \sim \frac{\theta(\lambda_t)}{\theta(\lambda_t)-1}\tilde{C}_1(t)n^{-1/2}e^{-n\psi(t)}. \tag{10}$$

Доказательство. Асимптотика вероятностей больших уклонений максимума для общего крамеровского случайного блуждания с неотрицательным математическим ожиданием получена в [5]. В разложении

$$\mathbf{P}(\tilde{M}_n > nt) = \sum_{k=1}^{n} P(\tilde{T}(nt) = k)$$

разобьём сумму на два слагаемых с теми же диапазонами (I), (II), что и в теореме 1. Для первой суммы асимптотика для $\mathbf{P}(\tilde{T}(nt) = k)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с асимптотикой вероятности $\mathbf{P}(T(nt) = k)$. Таким образом,

$$\sum_{l<\sqrt[3]{n}} \mathbf{P}(\tilde{T}(nt) = l) \sim \sum_{l<\sqrt[3]{n}} \tilde{C}_1(t)\theta^{-l}(\lambda_t)n^{-1/2}e^{-n\psi(t)} =$$

$$= \tilde{C}_1(t)n^{-1/2}e^{-n\psi(t)} \sum_{l<\sqrt[3]{n}} \theta^{-l}(\lambda_t) \sim \tilde{C}_1(t)n^{-1/2}e^{-n\psi(t)} \sum_{l=0}^{\infty} \theta^{-l}(\lambda_t) =$$

$$= \frac{\theta(\lambda_t)}{\theta(\lambda_t)-1}\tilde{C}_1(t)n^{-1/2}e^{-n\psi(t)}.$$

Сумма по диапазону (II) пренебрежимо мала по сравнению с первой суммой, так как слагаемые этой суммы отличаются от слагаемых аналогичной суммы в теореме 2 множителем, не зависящим от n. □

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту М. В. Козлову за постановку задачи.

Литература

[1] Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Ч. 2. Достационарные распределения в экспоненциальном случае // Теория вероятн. и её примен. — 2000. — Т. 45, № 3. — С. 437—468.

[2] Козлов М. В. О больших уклонениях максимума крамеровского случайного блуждания и процесса ожидания // Теория вероятн. и её примен. — 2013. — Т. 58, № 1. — С. 81—116.

[3] Петров В. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и её примен. — 1965. — Т. 10, № 2. — С. 310—322.

[4] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1984.

[5] Шкляев А. В. Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума // Теория вероятн. и её примен. — 2010. — Т. 55, № 3. — С. 590—598.