Некоторые обобщения задачи о свойстве B n-однородного гиперграфа

Ю. А. ДЕМИДОВИЧ
Московский физико-технический институт
e-mail: yurademi9595@mail.ru

УДК 519.218

Ключевые слова: однородные гиперграфы, свойство B, простые гиперграфы.

Аннотация

Рассматривается экстремальная задача о раскрасках гиперграфов, являющаяся обобщением известной проблемы Эрдёша—Хайнала о свойстве B гиперграфа. Пусть k — натуральное число. Требуется найти величину $m_k(n)$, равную минимальному количеству рёбер n-однородного гиперграфа, не допускающего таких раскрасок множества вершин в два цвета, что в каждом ребре гиперграфа содержится по крайней мере k вершин каждого цвета. В работе получены нижние оценки величин $m_k(n)$.

Abstract

Yu. A. Demidovich, On some generalizations of the property B problem of an n-uniform hypergraph, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 95—122.

The extremal problem of hypergraph colorings related to the Erdős–Hajnal property B-problem is considered. Let k be a natural number. The problem is to find the value of $m_k(n)$ equal to the minimal number of edges in an n-uniform hypergraph that does not admit 2-colorings of the vertex set such that every edge of the hypergraph contains at least k vertices of each color. In this paper, we obtain new lower bounds for $m_k(n)$.

1. Введение и история задачи

В настоящей работе рассматривается известная экстремальная задача о раскрасках однородных гиперграфов. Сначала дадим основные определения. *Гиперграфом* называется пара множеств $H = (V, E)$, где V — некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а E — совокупность подмножеств множества V, которые называются *рёбрами* гиперграфа. Гиперграф называется *n-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Одной из классических экстремальных задач теории гиперграфов является задача о свойстве B гиперграфов. Напомним, что гиперграф обладает *свойством* B, если существует двухцветная раскраска множества его вершин, в которой все рёбра гиперграфа являются неодноцветными. Задача состоит в отыскании величины $m(n)$, равной минимальному числу рёбер гиперграфа в классе

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 95—122.

n-однородных гиперграфов, не обладающих свойством B. Впервые данная задача была поставлена в работе П. Эрдёша и А. Хайнала [16]. Сам П. Эрдёш (см. [14, 15]) с помощью простых вероятностных рассуждений получил следующие асимптотические оценки для $m(n)$:

$$2^{n-1} \leqslant m(n) \leqslant \frac{e\ln 2}{4} n^2 2^n \big(1 + o(1)\big). \tag{1}$$

В дальнейшем нижняя оценка, в отличие от верхней, была улучшена в ряде работ. Подробнее об этом можно почитать в обзорах [18], [3]. Наилучший на сегодняшний день результат принадлежит Дж. Радхакришнану и А. Сринивасану [22]. Они доказали, что

$$m(n) \geqslant (0{,}1) 2^n \sqrt{\frac{n}{\ln n}}.$$

Существует большое количество различных обобщений задачи Эрдёша—Хайнала (подробнее см. [18]). Одно из таких обобщений было предложено в работе Д. А. Шабанова [9]. Пусть дано натуральное число k. Будем говорить, что гиперграф $H = (V, E)$ обладает *свойством* B_k, если существует такая раскраска множества V в два цвета, что в каждом ребре содержится по крайней мере k вершин каждого цвета. По аналогии с величиной $m(n)$ обозначим через $m_k(n)$ величину, равную минимальному числу рёбер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов, не обладающих свойством B_k. Ясно, что свойство B_1 есть свойство B, и значит, $m_1(n)$ есть $m(n)$. Применяя простые вероятностные соображения, для величины $m_k(n)$ можно получить следующую оценку, которая при $k = 1$ соответствует нижней оценке из (1):

$$m_k(n) \geqslant \frac{2^{n-1}}{\sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}}.$$

Д. А. Шабановым в [9, 10] было доказано, что если $k = k(n) = o(n/\ln n)$, то существует такая функция $\psi(n)$, зависящая только от вида функции $k(n)$, стремящаяся к 1 при n, стремящемся к бесконечности, что

$$m_k(n) \leqslant \frac{e\ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}} \psi(n). \tag{2}$$

Более того, С. М. Тепляковым в [6] было доказано, что если $k = o(n)$, то $m_k(n)$ удовлетворяет неравенству (2).

Помимо этого Д. А. Шабановым в [11] была получена следующая нижняя оценка величины $m_k(n)$:

$$m_k(n) = \Omega\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} \frac{e^{-k/2}}{\sqrt{2k-1}} \frac{2^{n-k}}{\binom{n}{k-1}} \right) \tag{3}$$

при условии, что $k = k(n) = O(\ln n)$. В случае же, когда k имеет порядок роста между $\ln n$ и $\sqrt{n}$, наилучшей нижней оценкой является результат А. П. Розовской [4, 5]:

$$m_k(n) \geqslant 0{,}19 n^{1/4} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}}. \tag{4}$$

Близкие недавние результаты и обзоры по теме можно найти в [2, 3, 7, 8, 12, 20, 23—25].

2. Основной результат

Основным результатом данной работы является новая нижняя оценка для величины $m_k(n)$.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 30$, $k \geqslant 2$ и выполняется неравенство*

$$k \leqslant \sqrt{\frac{n}{\ln n}}. \tag{5}$$

Тогда выполнено неравенство

$$m_k(n) \geqslant \frac{12}{e^{26}} \left(\frac{n}{k \ln n}\right)^{1/2} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}}. \tag{6}$$

Сравним оценку (6) с предыдущими результатами. Полученная в теореме 1 оценка величины $m_k(n)$ улучшает предыдущие результаты (3) и (4) при k, имеющем порядок роста не более чем $n^{1/2-\delta}/\sqrt{\ln n}$, где $0 < \delta < 1/2$.

3. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы достаточно показать, что произвольный гиперграф, имеющий менее $12/e^{26} \times (n/k \ln n)^{1/2} \times 2^{n-1}/\binom{n-1}{k-1}$ рёбер, обладает свойством B_k.

Рассмотрим n-однородный гиперграф $H = (V, E)$, удовлетворяющий условию

$$|E| = m < \frac{12}{e^{26}} \left(\frac{n}{k \ln n}\right)^{1/2} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}}. \tag{7}$$

3.1. Критерий для гиперграфа обладания свойством $\mathbf{B}_k$

Пусть $G = (W, U)$ — произвольный гиперграф, σ — некоторая нумерация его вершин. Точнее, пусть σ — некоторое биективное отображение W в $\{1, 2, \ldots, |W|\}$. Будем говорить, что пара рёбер (A_1, A_2) гиперграфа G образует *упорядоченную* 2-*цепь* относительно нумерации σ, если выполнено $|A_1 \cap A_2| = 1$

и $\sigma(v) \leqslant \sigma(u)$ для всех $v \in A_1$, $u \in A_2$. Имеет место следующая лемма о связи для гиперграфа обладания свойством В и наличия упорядоченных 2-цепей в нём, которая была предложена А. Плухаром [21].

Лемма 1. *Пусть $G = (W, U)$ — произвольный гиперграф. G обладает свойством* В *тогда и только тогда, когда для некоторой нумерации σ вершин W в гиперграфе G нет упорядоченных 2-цепей.*

Далее мы рассмотрим критерий обладания для гиперграфа свойством B_k, который является обобщением критерия Плухара и был впервые сформулирован А. П. Розовской [5].

Для каждого ребра $f \in U$ через $F_\sigma(f)$ обозначим множество первых k в нумерации σ вершин ребра f, а через $L_\sigma(f)$ обозначим множество последних k в нумерации σ вершин.

Лемма 2. *Пусть $G = (W, U)$ — произвольный гиперграф, каждое ребро которого содержит хотя бы $2k$ вершин. Тогда G обладает свойством B_k тогда и только тогда, когда существует такая нумерация его вершин σ, что для любых двух рёбер f и s выполнено*

$$L_\sigma(f) \cap F_\sigma(s) = \varnothing. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть G обладает свойством B_k, т. е. существует такая раскраска его вершин в два цвета, что в каждом ребре содержится хотя бы по k вершин каждого цвета. Занумеруем вершины гиперграфа следующим образом: сначала пронумеруем все вершины первого цвета, а затем — второго. Легко проверить, что условие $L_\sigma(f) \cap F_\sigma(s) = \varnothing$ выполнено.

Достаточность. Возьмём нумерацию σ из условия теоремы. Покрасим первые k в нумерации σ вершин каждого ребра в первый цвет, а остальные вершины — во второй. Ввиду условия (8) каждое ребро будет содержать хотя бы по k вершин каждого цвета, т. е. гиперграф G обладает свойством B_k. □

3.2. Общая идея доказательства

Идея доказательства, обобщением которой мы займёмся далее, принадлежит Д. Черкашину и Я. Козику [13]. Они предложили задать случайную нумерацию множества V следующим образом. Каждой вершине v поставим в соответствие случайную величину X_v, имеющую равномерное распределение на $(0, 1)$. Номером $\sigma(v)$ вершины v будем считать

$$\sigma(v) := \sum_{w \in V} I\{X_w \leqslant X_v\}.$$

Для каждого ребра $A \in E$ введём величины

$$\max(A) = \max_{v \in A} X_v, \quad \min(A) = \min_{v \in A} X_v.$$

Назовём ребро A *плотным*, если

$$\max(A) - \min(A) \leqslant \frac{1-p}{2},$$

где p положим равным $\ln n/n$.

Согласно критерию гиперграф обладает свойством B, если не существует пар рёбер, которые пересекаются по одной вершине, которая является первой в одном ребре и последней в другом. Если удастся доказать, что сумма вероятностей события, что в гиперграфе существуют плотные рёбра, и события, что существует пара рёбер, пересекающихся указанным образом (считая, что все рёбра не являются плотными), строго меньше 1, то это будет означать существование с положительной вероятностью такой нумерации, что гиперграф обладает свойством B. В самом деле, легко проверить, что

$$|E|\left[\left(\frac{1-p}{2}\right)^n + n\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1-p}{2}\right)\right] + |E|^2 \int\limits_{(1-p)/2}^{(1+p)/2} x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx < 1,$$

если количество рёбер удовлетворяет неравенству

$$|E| \geqslant c \cdot 2^n \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}},$$

где c — некоторая универсальная константа. Отсюда получается известная оценка для величины $m(n)$.

Обобщение этой идеи состоит в следующем.

Пусть $f \in E$ — ребро H. Для каждой вершины $v \in f$ введём события $F_f(v)$ и $L_f(v)$. Событие $F_f(v)$ состоит в том, что вершина v находится среди первых k вершин ребра f, а событие $L_f(v)$ — в том, что v находится среди последних k вершин ребра f. Для любых двух рёбер f и s, таких что $f \cap s \neq \varnothing$, и любой вершины $v_0 \in f \cap s$ введём событие

$$\mathcal{M}(f, s, v_0) = L_f(v_0) \cap F_s(v_0). \tag{9}$$

Введём также событие $\mathcal{M}(f, s)$, равное объединению событий $\mathcal{M}(f, s, v_0)$ по всем вершинам v_0 из пересечения рёбер f и s:

$$\mathcal{M}(f, s) = \bigcup_{v_0 \in f \cap s} \mathcal{M}(f, s, v_0).$$

Итак, нам задана некоторая нумерация σ множества V. Пусть $A \in E$ — ребро H. Без ограничения общности будем считать, что $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим для каждой вершины $v \in A$ величину X_v и расположим эти величины в порядке возрастания — получим ряд $\{X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\}$. Введём обозначения

$$l(A) = X_{(n-k+1)}, \quad f(A) = X_{(k)}.$$

Назовём ребро A *плотным*, если

$$l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2},$$

где p положим равным $2k\ln n/n$. Для каждого ребра A введём событие $\mathcal{N}(A)$, заключающееся в том, что ребро A плотное. Также введём событие

$$\mathcal{R} = \bigcup_A \mathcal{N}(A).$$

Если нам удастся доказать, что сумма вероятностей событий $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F} := \bigcup\limits_{f,s} \mathcal{M}(f,s)$ строго меньше 1, считая при этом при оценке вероятности события $\mathcal{F}$, что все рёбра не являются плотными, то это будет означать существование такой нумерации σ множества V, в которой для любых рёбер f и s выполнено $L_\sigma(f) \cap F_\sigma(s) = \varnothing$, что, в свою очередь, приводит к тому, что H обладает свойством B_k согласно критерию.

Далее мы оценим вероятность событий $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}(f,s)$.

3.3. Оценка вероятности события $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{R}) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_A \mathcal{N}(A)\Big) \leqslant |E| \max_A \mathbb{P}\big(\mathcal{N}(A)\big) = |E|\mathbb{P}\left(l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) = \\ &= |E|\left[\mathbb{P}\left(l(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) + \mathbb{P}\left(l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2},\ l(A) > \frac{1-p}{2}\right)\right] = \\ &= |E|\,\mathbb{P}\left(l(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) + |E|\,\mathbb{P}\left(l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2},\ l(A) > \frac{1-p}{2}\right). \quad (10)\end{aligned}$$

Далее будем оценивать по отдельности каждое из двух слагаемых, стоящих в правой части (10):

$$\begin{aligned}|E|\,\mathbb{P}\left(l(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) &= |E|n\binom{n-1}{k-1}\int\limits_0^{(1-p)/2} x^{n-k}(1-x)^{k-1}\,dx = \\ &= |E|n\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x^{n-k+1}(1-x)^{k-1}}{n-k+1}\bigg|_0^{(1-p)/2} + \right. \\ &\left. + \frac{k-1}{n-k+1}\int\limits_0^{(1-p)/2} x^{n-k+1}(1-x)^{k-2}\,dx\right) = \\ &= |E|n\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x^{n-k+1}(1-x)^{k-1}}{n-k+1}\bigg|_0^{(1-p)/2} + \right. \\ &+ \frac{k-1}{n-k+1}\,\frac{x^{n-k+2}(1-x)^{k-2}}{n-k+2}\bigg|_0^{(1-p)/2} + \\ &\left. + \frac{k-1}{n-k+1}\,\frac{k-2}{n-k+2}\int\limits_0^{(1-p)/2} x^{n-k+2}(1-x)^{k-3}\,dx\right) = \ldots =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |E| n \binom{n-1}{k-1} \Bigg(\frac{x^{n-k+1}(1-x)^{k-1}}{n-k+1} \Bigg|_0^{(1-p)/2} + \\
&+ \frac{k-1}{n-k+1} \frac{x^{n-k+2}(1-x)^{k-2}}{n-k+2} \Bigg|_0^{(1-p)/2} + \ldots + \\
&+ \frac{k-1}{n-k+1} \frac{k-2}{n-k+2} \cdots \frac{1}{n-1} \frac{x^n}{n} \Bigg|_0^{(1-p)/2} \Bigg) = \\
&= |E| n \binom{n-1}{k-1} \Bigg(\frac{\big((1-p)/2\big)^{n-k+1}(1-(1-p)/2)^{k-1}}{n-k+1} + \\
&+ \frac{k-1}{n-k+1} \frac{\big((1-p)/2\big)^{n-k+2}}{n-k+2} + \ldots + \\
&+ \frac{k-1}{n-k+1} \frac{k-2}{n-k+2} \cdots \frac{1}{n-1} \frac{\big((1-p)/2\big)^n}{n} \Bigg). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Нетрудно проверить, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{\big((1-p)/2\big)^{n-k+1}(1-(1-p)/2)^{k-1}}{n-k+1} \geqslant \\
&\qquad \geqslant \frac{k-1}{n-k+1} \frac{\big((1-p)/2\big)^{n-k+2}(1-(1-p)/2)^{k-2}}{n-k+2} \geqslant \ldots \geqslant \\
&\quad \geqslant \frac{k-1}{n-k+1} \frac{k-2}{n-k+2} \cdots \frac{1}{n-1} \frac{\big((1-p)/2\big)^n}{n}.
\end{aligned}
$$

Тогда выражение (11) оценивается сверху следующим выражением:

$$
\begin{aligned}
&|E| n \binom{n-1}{k-1} k \frac{\big((1-p)/2\big)^{n-k+1}(1-(1-p)/2)^{k-1}}{n-k+1} < \\
&\quad < \frac{12}{2e^{26}} \sqrt{\frac{n}{k \ln n}} \frac{nk}{n-k+1} (1-p)^n \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^{k-1} = \\
&\quad = \frac{6}{e^{26}} \sqrt{\frac{n}{k \ln n}} \frac{nk}{n-k+1} \left(1 - \frac{\ln n^{2k}}{n} \right)^n \left(1 + \frac{2p}{1-p} \right)^{k-1} \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{6}{e^{26}} \sqrt{\frac{n}{k \ln n}} \frac{nk}{n-k+1} \frac{1}{n^{2k}} \exp\left(\frac{2p(k-1)}{1-p} \right) = S_1. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались неравенствами $(1-x/n)^n \leqslant \exp(-x)$ и $1+x \leqslant \exp(x)$ для $x > -1$.

Так как

$$\exp\left(\frac{2p(k-1)}{1-p}\right) < \exp\left(\frac{2pk}{1-p}\right) = \exp\left(\frac{2(2k\ln n/n)k}{1-2k\ln n/n}\right) = \exp\left(\frac{4k^2\ln n}{n-2k\ln n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{4\left(\sqrt{n/\ln n}\right)^2\ln n}{n-2\sqrt{n/\ln n}\ln n}\right) = \exp\left(\frac{4n}{n-2\sqrt{n\ln n}}\right) = \exp\left(\frac{4}{1-2\sqrt{\ln n/n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{4}{1-2\sqrt{\ln 30/30}}\right) < e^{13} \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 30, \tag{13}$$

получаем, что

$$S_1 < \frac{6}{e^{13}}\sqrt{\frac{n}{k\ln n}}\,\frac{nk}{n-k+1}\,\frac{1}{n^{2k}} = \frac{6}{e^{13}}\sqrt{\frac{n^3k^2}{k\ln n(n-k+1)^2n^{4k}}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{6}{e^{13}}\sqrt{\frac{\sqrt{n/\ln n}}{\ln n(n-\sqrt{n/\ln n})^2n^{4k-3}}} \leqslant \frac{6}{e^{13}}\sqrt{\frac{1}{27^2(\ln n)^{3/2}n^{4k-7/2}}} <$$
$$< \frac{6}{27e^{13}}\sqrt{\frac{1}{n\ln n}} < \frac{1}{45e^{13}} \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 30. \tag{14}$$

Теперь оценим второе слагаемое, стоящее в правой части (10):

$$|E|\mathbb{P}\left(l(A)-f(A) \leqslant \frac{1-p}{2},\ l(A) > \frac{1-p}{2}\right) = |E|n\binom{n-1}{k-1} \times$$
$$\times \int\limits_{(1-p)/2}^{1} \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-k}{i}\left(x-\frac{1-p}{2}\right)^i\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i}(1-x)^{k-1}\,dx =$$
$$= |E|n\binom{n-1}{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-k}{i}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i} \times$$
$$\times \int\limits_{(1-p)/2}^{1}\left(x-\frac{1-p}{2}\right)^i(1-x)^{k-1}\,dx =$$
$$= |E|n\binom{n-1}{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-k}{i}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i}\frac{k-1}{i+1} \times$$
$$\times \int\limits_{(1-p)/2}^{1}\left(x-\frac{1-p}{2}\right)^{i+1}(1-x)^{k-2}\,dx = \ldots =$$

$$= |E|n\binom{n-1}{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-k}{i}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i}\frac{(k-1)!}{(i+1)\dots(i+k-1)}\times$$
$$\times\int\limits_{(1-p)/2}^{1}\left(x-\frac{1-p}{2}\right)^{i+k-1}dx = |E|n\binom{n-1}{k-1}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-k}{i}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i}\frac{(k-1)!\,i!}{(i+k)!}\left(x-\frac{1-p}{2}\right)^{i+k}\Bigg|_{(1-p)/2}^{1}=$$
$$= |E|n\binom{n-1}{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-k}{i}\frac{(k-1)!\,i!}{(i+k)!}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i}\left(1-\frac{1-p}{2}\right)^{i+k} = S_2. \tag{15}$$

Оценим внутреннюю сумму по i в правой части (15). Для этого найдём максимальное слагаемое в сумме, рассматривая отношение соседних слагаемых. Отношение слагаемых при i и $i+1$ равно

$$\frac{\binom{n-k}{i}\frac{i!}{(i+k)!}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{i}}{\binom{n-k}{i+1}\frac{(i+1)!}{(i+k+1)!}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{i+1}} = \frac{(i+k+1)(1-p)}{(n-k-i)(1+p)} < \frac{i+k+1}{n-k-i} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2k}{n-2k} = \varepsilon(n,k) = \varepsilon < 1.$$

Здесь мы воспользовались условием $i \leqslant k-1$. Следовательно, максимальное слагаемое в сумме достигается при максимальном i, равном $k-1$, а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1-\varepsilon)^{-1}$. Тогда

$$S_2 < (1-\varepsilon)^{-1}\frac{12}{2e^{26}}\sqrt{\frac{n}{k\ln n}}\,n\binom{n-k}{k-1}\frac{(k-1)!\,(k-1)!}{(2k-1)!}(1-p)^n\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{2k-1} =$$
$$= (1-\varepsilon)^{-1}\frac{6}{e^{26}}\sqrt{\frac{n}{k\ln n}}\,\frac{n(n-k)!\,(k-1)!}{(n-2k+1)!\,(2k-1)!}\times$$
$$\times\left(1-\frac{\ln n^{2k}}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{2p}{1-p}\right)^{2k-1} \leqslant$$
$$\leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\frac{6}{e^{26}}\sqrt{\frac{n}{k\ln n}}\,n(n-k)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(2k-1)!}\,\frac{1}{n^{2k}}\exp\left(\frac{2p(2k-1)}{1-p}\right) <$$
$$< (1-\varepsilon)^{-1}\frac{6}{e^{26}}\sqrt{\frac{n}{k\ln n}}\,n^{k}\frac{(k-1)!}{(2k-1)!}\,\frac{1}{n^{2k}}e^{26} =$$
$$= 6(1-\varepsilon)^{-1}\sqrt{\frac{n}{k\ln n}}\,\frac{(k-1)!}{(2k-1)!n^{k}} <$$
$$< 6(1-\varepsilon)^{-1}\sqrt{\frac{1}{n\ln n}} < \frac{3}{5}(1-\varepsilon)^{-1} \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 30. \tag{16}$$

Таким образом, учитывая (14) и (16), получаем окончательную оценку
$$\mathbb{P}(\mathcal{R}) < \frac{1}{45e^{13}} + \frac{3}{5}(1-\varepsilon)^{-1}. \tag{17}$$

3.4. Оценка вероятности события $\mathcal{M}(f, s)$

Рассмотрим два произвольных ребра f и s. Напомним, что мы будем считать, что все рёбра не являются плотными. Пусть они имеют h общих вершин, v_0 — некоторая вершина из $f \cap s$. Введём следующие обозначения:
$$A_1 = \{v \in f \cap s \colon \sigma(v) < \sigma(v_0)\}, \quad B_1 = \{v \in f \cap s \colon \sigma(v) > \sigma(v_0)\},$$
$$A_2 = \{v \in f \setminus s \colon \sigma(v) > \sigma(v_0)\}, \quad B_2 = \{v \in s \setminus f \colon \sigma(v) < \sigma(v_0)\}.$$
Из события $\mathcal{M}(f, s, v_0)$ очевидно следуют неравенства
$$|A_2| + |B_1| \leqslant k-1, \quad |A_1| + |B_2| \leqslant k-1.$$
По определению (9) событие $\mathcal{M}(f, s, v_0)$ эквивалентно пересечению следующих событий:
$$\mathcal{M}(f, s, v_0) = \{|A_2| + |B_1| \leqslant k-1\} \cap \{|A_1| + |B_2| \leqslant k-1\}. \tag{18}$$
Мы знаем, что $|A_1| + |B_1| = h-1$. Отсюда следует, что из события $\mathcal{M}(f, s, v_0)$ вытекает соотношение $h + |A_2| + |B_2| \leqslant 2k-1$. Если $h \geqslant 2k$, то последнее неравенство невозможно, а следовательно, невозможно и событие $\mathcal{M}(f, s, v_0)$. Далее будем рассматривать только случай $h \leqslant 2k-1$.

Из (18) получаем следующее соотношение:
$$\mathcal{M}(f, s, v_0) = \bigcup_{\substack{i,j,t \in \mathbb{Z}_+ \\ t+j \leqslant k-1,\ t \leqslant h-1 \\ i \leqslant k-h+t}} \{|A_2| = i,\ |B_2| = j,\ |A_1| = t\}. \tag{19}$$

Напомним, что
$$\mathcal{M}(f, s) = \bigcup_{v_0 \in f \cap s} \mathcal{M}(f, s, v_0).$$
Тогда по (19) получаем следующую оценку вероятности события $\mathcal{M}(f, s)$:
$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f, s)\big) \leqslant h \sum_{t=\max(0, h-k)}^{\min(k-1, h-1)} \binom{h-1}{t} \sum_{i=0}^{k-h+t} \binom{n-h}{i} \sum_{j=0}^{k-1-t} \binom{n-h}{j} \times$$
$$\times \int\limits_{(1-p)/2}^{(1+p)/2} x^{n-h-i+t+j}(1-x)^{n-h-j+(h-1-t)+i}\, dx. \tag{20}$$

Поясним, почему в правой части (20) пределы интегрирования меняются от $(1-p)/2$ до $(1+p)/2$. Предположим противное: пусть $X_{v_0} < (1-p)/2$ или

$X_{v_0} > (1+p)/2$. Рассмотрим случай $X_{v_0} > (1+p)/2$. Из того что выполняется $v_0 \in F_\sigma(s)$, следует, что верно $f(s) \geqslant X_{v_0} > (1+p)/2$. Отсюда следует, что

$$l(s) - f(s) < l(s) - \frac{1+p}{2} < \frac{1-p}{2},$$

а это противоречит тому, что ребро s не является плотным. Случай $X_{v_0} < (1-p)/2$ разбирается аналогично.

Теперь мы будем оценивать выражение, стоящее в правой части (20). Оценим сначала каждый интеграл в правой части (20):

$$\int\limits_{(1-p)/2}^{(1+p)/2} x^{n-h-i+t+j}(1-x)^{n-h-j+(h-1-t)+i}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-p/2}^{p/2} \left(\frac{1}{2}+y\right)^{n-h-i+t+j} \left(\frac{1}{2}-y\right)^{n-h-j+(h-1-t)+i} dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1} \int\limits_{-p/2}^{p/2} (1+2y)^{n-h-i+t+j}(1-2y)^{n-h-j+(h-1-t)+i}\,dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1} \int\limits_{-p/2}^{p/2} (1-4y^2)^{n-h}(1+2y)^{-i+t+j}(1-2y)^{-j+(h-1-t)+i}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1} \int\limits_{-p/2}^{p/2} (1+2y)^{-i+t+j}(1-2y)^{-j+(h-1-t)+i}\,dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1} \int\limits_{-p/2}^{p/2} \left(\frac{1-2y}{1+2y}\right)^{i} \left(\frac{1+2y}{1-2y}\right)^{t} \left(\frac{1+2y}{1-2y}\right)^{j} (1-2y)^{h-1}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1} \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{i+j+t} (1+p)^{h-1} \int\limits_{-p/2}^{p/2} dy \leqslant$$

$$\leqslant p\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1} \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{2k} (1+p)^{2k} =$$

$$= p\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1} \left(1+\frac{2p}{1-p}\right)^{2k} (1+p)^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant p\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1} e^{26}\exp\left(\frac{4k^2\ln n}{n}\right) \leqslant e^{30}p\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant$$
$$\leqslant e^{30}h \sum_{t=\max(0,h-k)}^{\min(k-1,h-1)} \binom{h-1}{t} \sum_{i=0}^{k-h+t} \binom{n-h}{i} \sum_{j=0}^{k-1-t} \binom{n-h}{j} p \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1}. \qquad (21)$$

Оценим внутреннюю сумму по i в правой части (21). Для этого найдём максимальное слагаемое в сумме, рассматривая отношение соседних слагаемых. Отношение слагаемых при i и $i+1$ равно

$$\frac{\binom{n-h}{i}}{\binom{n-h}{i+1}} = \frac{i+1}{n-h-i} \leqslant \frac{k}{n-h-k} \leqslant \frac{k}{n-3k} = \alpha(n,k) = \alpha < 1.$$

Здесь мы воспользовались соотношениями $i+1 \leqslant k$ и $h \leqslant 2k$. Следовательно, максимальное слагаемое в сумме достигается при максимальном i, равном $k-h+t$, а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1-\alpha)^{-1}$. Значит,

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant e^{30}h \sum_{t=\max(0,h-k)}^{\min(k-1,h-1)} \binom{h-1}{t} \sum_{j=0}^{k-1-t} \binom{n-h}{j} \times$$
$$\times \binom{n-h}{k-h+t} (1-\alpha)^{-1} p \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1}. \qquad (22)$$

Внутреннюю сумму по j в правой части (22) будем оценивать таким же способом. Отношение слагаемых при j и $j+1$ равно

$$\frac{\binom{n-h}{j}}{\binom{n-h}{j+1}} = \frac{j+1}{n-h-j} \leqslant \frac{k}{n-h-k} \leqslant \frac{k}{n-3k} = \alpha(n,k) = \alpha < 1.$$

Эти неравенства в цепочке получаются точно так же, как это было сделано при оценивании суммы по i.

Получаем, что, как и в случае с суммой по i, максимальное слагаемое достигается при максимальном $j = k-1-t$, а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1-\alpha)^{-1}$. Следовательно, получаем неравенство

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant e^{30}h \sum_{t=\max(0,h-k)}^{\min(k-1,h-1)} \binom{h-1}{t} \binom{n-h}{k-1-t} \binom{n-h}{k-h+t} \times$$
$$\times (1-\alpha)^{-2} p \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-h-1}. \qquad (23)$$

Посмотрим на общее слагаемое в сумме из правой части (23) как на функцию от h. Отношение значений общего слагаемого суммы при h и $h+1$ равно

$$\frac{h}{h+1}\frac{\binom{h-1}{t}\binom{n-h}{k-1-t}\binom{n-h}{k-h+t}2^{h+1}}{\binom{h}{t}\binom{n-h-1}{k-1-t}\binom{n-h-1}{k-h-1+t}2^{h+2}} = \\ = \frac{(n-h)^2(h-t)}{2(h+1)(k-h+t)(n-h-k+t+1)} \geqslant \frac{(n-2k)^2}{2k^2(n-k)} = \beta. \quad (24)$$

Поясним последнее неравенство. Положим $x = h-t$. Тогда выражение

$$\frac{(n-h)^2(h-t)}{2(h+1)(k-h+t)(n-h-k+t+1)} = \frac{x}{x+t+1}\,\frac{(n-h)^2}{2(k-x)(n-x-k+1)}$$

является возрастающей функцией по x. Из ограничений

$$x = h-t \geqslant 1, \quad t \leqslant k-1, \quad h < 2k$$

получаем (24).

Из условия (5) теоремы следует, что величина β строго больше 1. Действительно,

$$(n-2k)^2 - 2k^2(n-k) > n^2 - 4nk - 2k^2 n \geqslant n^2 - \frac{4n\sqrt{n}}{\sqrt{\ln n}} - \frac{2n^2}{\ln n} = \\ = \frac{n^2}{\ln n}\left(\ln n - 2 - 4\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) > 0,$$

поскольку

$$\ln n - 2 - 4\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \geqslant \ln 30 - 2 - 4\sqrt{\frac{\ln 30}{30}} > 0 \ \text{ для всех } \ n \geqslant 30.$$

Следовательно, каждое слагаемое в правой части (23) есть убывающая функция по h. Тогда для любого t в силу ограничения $h \geqslant t+1$ получаем неравенство

$$h\binom{h-1}{t}\binom{n-h}{k-1-t}\binom{n-h}{k-h+t}2^{h+1} \leqslant (t+1)\binom{n-t-1}{k-1-t}\binom{n-t-1}{k-1}2^{t+2}.$$

Отсюда по (23) вытекает соотношение

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant \frac{e^{30}}{(1-\alpha)^2}\sum_{t=\max(0,h-k)}^{\min(k-1,h-1)}(t+1)\binom{n-t-1}{k-1-t}\binom{n-t-1}{k-1}p\frac{2^{t+2}}{2^{2n}}. \quad (25)$$

Ясно, что при увеличении количества положительных слагаемых сумма возрастает, поэтому

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant e^{30}(1-\alpha)^{-2}\sum_{t=0}^{\min(k-1,h-1)}(t+1)\binom{n-t-1}{k-1-t}\binom{n-t-1}{k-1}p\frac{2^{t+2}}{2^{2n}}.$$

Найдём максимальное слагаемое в сумме по t, рассматривая, как и раньше, отношение соседних слагаемых. Отношение слагаемых при t и $t+1$ равно

$$\frac{(t+1)\binom{n-t-1}{k-1-t}\binom{n-t-1}{k-1}2^{t+2}}{(t+2)\binom{n-t-2}{k-2-t}\binom{n-t-2}{k-1}2^{t+3}} = \frac{(t+1)(n-t-1)^2}{2(t+2)(k-1-t)(n-t-k)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(n-k)^2}{4k(n-k)} = \frac{n-k}{4k} = \gamma^{-1} > 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $t \geqslant 0$ и $t+1 \leqslant k$.

Таким образом, максимальному слагаемому отвечает $t=0$, а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1-\gamma)^{-1}$. В итоге получаем окончательную верхнюю оценку вероятности события $\mathcal{M}(f,s)$:

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant e^{30}(1-\alpha)^{-2}(1-\gamma)^{-1}\binom{n-1}{k-1}^2 p\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}. \tag{26}$$

3.5. Вспомогательная аналитика

В данном разделе мы оценим множители

$$R(n,k) = (1-\alpha)^{-2}(1-\gamma)^{-1}, \quad T(n,k) = (1-\epsilon)^{-1},$$

входящие в правые части оценок (17) и (26) соответственно. Мы будем пользоваться условием теоремы (5).

Имеет место следующий набор соотношений:

$$\alpha = \frac{k}{n-3k} \leqslant \frac{\sqrt{n/\ln n}}{n-3\sqrt{n/\ln n}} = \frac{1}{\sqrt{n\ln n}-3} \leqslant \frac{1}{\sqrt{30\ln 30}-3} \leqslant 0{,}15,$$

$$\gamma = \frac{4k}{n-k} \leqslant \frac{4\sqrt{n/\ln n}}{n-\sqrt{n/\ln n}} = \frac{4}{\sqrt{n\ln n}-1} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{30\ln 30}-1} \leqslant 0{,}5,$$

$$\epsilon = \frac{2k}{n-2k} \leqslant \frac{2\sqrt{n/\ln n}}{n-2\sqrt{n/\ln n}} = \frac{2}{\sqrt{n\ln n}-2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{30\ln 30}-2} \leqslant 0{,}25,$$

$$(1-\alpha)^{-2} \leqslant (1-0{,}15)^{-2} \leqslant 1{,}5,$$

$$(1-\gamma)^{-1} \leqslant (1-0{,}5)^{-1} = 2,$$

$$(1-\varepsilon)^{-1} \leqslant (1-0{,}25)^{-1} = \frac{4}{3}.$$

Из этих неравенств получаем итоговую верхнюю оценку множителей $R(n,k)$ и $T(n,k)$:

$$R(n,k) = (1-\alpha)^{-2}(1-\gamma)^{-1} \leqslant 1{,}5 \times 2 = 3, \tag{27}$$

$$T(n,k) = (1-\epsilon)^{-1} \leqslant \frac{4}{3}. \tag{28}$$

3.6. Завершение доказательства

Завершим доказательство теоремы. Из (26) и (27) следует, что

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant 3e^{30}\binom{n-1}{k-1}^2 2^{2-2n}\frac{2k\ln n}{n}. \tag{29}$$

Тогда вероятность события $\mathcal{F}$ оценивается сверху следующим образом:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}) = \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{f,s}\mathcal{M}(f,s)\Bigg) \leqslant |E|^2\max_{f,s}\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant$$
$$\leqslant |E|^2 3e^{30}\binom{n-1}{k-1}^2 2^{2-2n}\frac{2k\ln n}{n} < \frac{864}{e^{22}}. \tag{30}$$

Последнее неравенство вытекает из условия (7) на гиперграф H.

Из (17) и (28) следует, что

$$\mathbb{P}(\mathcal{R}) < \frac{1}{45e^{13}} + \frac{4}{5}. \tag{31}$$

Таким образом, из (30) и (31) получаем окончательную оценку суммы вероятностей событий $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}) + \mathbb{P}(\mathcal{R}) < \frac{864}{e^{22}} + \frac{1}{45e^{13}} + \frac{4}{5} < 1.$$

Подведём итоги. Мы показали, что сумма вероятностей событий $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$ строго меньше 1, считая при этом при оценке вероятности события $\mathcal{F}$, что все рёбра не являются плотными. Значит, с положительной вероятностью в случайной нумерации σ множества V для любых рёбер f и s выполнено

$$L_\sigma(f) \cap F_\sigma(s) = \varnothing.$$

Следовательно, согласно критерию H обладает свойством B_k. В силу произвольности выбора H с условием (7) получаем искомое неравенство

$$m_k(n) \geqslant \frac{12}{e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}}.$$

Теорема 1 доказана.

3.7. Следствие: свойство $\mathbf{B}_{k,\varepsilon}$

Подгиперграф H' гиперграфа $H = (V,E)$ называется *остовным*, если множество его вершин — V, а множество E' его рёбер является подмножеством множества E. Говорят, что гиперграф $H = (V,E)$ обладает *свойством* $\mathrm{B}_{k,\varepsilon}$, если существует остовный подгиперграф $H' = (V,E')$, который обладает свойством B_k и у которого $|E'| \geqslant (1-\varepsilon)|E|$. Из определения видно, что ε лежит в пределах от 0 до 1. При $\varepsilon = 0$ свойство $\mathrm{B}_{k,\varepsilon}$ эквивалентно B_k. Д. А. Шабанов [10, 11] показал, что при

$$\varepsilon \geqslant \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right) 2^{1-n}$$

свойство $\mathrm{B}_{k,\varepsilon}$ становится тривиальным, т. е. произвольный n-однородный гиперграф обладает свойством $\mathrm{B}_{k,\varepsilon}$.

Введём величину $m_{k,\varepsilon}(n)$, равную минимальному числу рёбер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов, не обладающих свойством $\mathrm{B}_{k,\varepsilon}$. При $\varepsilon = 0$ имеем $m_{k,\varepsilon}(n) = m_k(n)$. Легко показать, что при $\varepsilon < 1/m_k(n)$ выполняется равенство $m_{k,\varepsilon}(n) = m_k(n)$.

В итоге получается, что величина $m_{k,\varepsilon}(n)$ имеет смысл лишь при

$$\varepsilon \in \left(\frac{1}{m_k(n)}, \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right) \cdot 2^{1-n}\right).$$

Рассмотрим неравенство (2). Поскольку $\psi(n)$ сходится, она ограниченная. С учётом этого имеем

$$\varepsilon \in \left(R \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right) \cdot 2^{1-n} \cdot n^{-2}, \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right) \cdot 2^{1-n}\right), \tag{32}$$

где R — некоторая константа. Д. А. Шабановым [10, 11] было доказано, что при этих условиях существуют такие константы c, C, с которыми при $k \leqslant C \ln n$ справедливо неравенство

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geqslant c \cdot \varepsilon \cdot \frac{n}{\ln n} \cdot \frac{2^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right)^2} \cdot \frac{2^{-2k} e^{-k}}{2k-1}. \tag{33}$$

Видно, что результат (33) является аналогом (3): он получен возведением (3) в квадрат и домножением на ε. В [1] для этой величины был получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 14$, $k \geqslant 2$ и выполняется неравенство*

$$2k^2(n-k) \leqslant (n-2k)^2.$$

Тогда

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geqslant 0{,}0361 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{2^{2n-2}}{\binom{n-1}{k-1}^2}.$$

Очевидно, что это и есть такой же аналог неравенства (4), каким служило для неравенства (3) неравенство (33). Его преимущество прежнее: область допустимых значений k расширяется от логарифма до корня квадратного из числа n.

Верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 2$ и для всех n начиная с некоторого номера $n_1 = 30$ выполняется неравенство*

$$k \leqslant \sqrt{\frac{n}{\ln n}}.$$

Введём для удобства следующие обозначения:

$$\mathcal{I} = R \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \right) \cdot 2^{-n-1} \cdot n^{-2}, \quad \mathcal{J} = \frac{2e^{30}}{9} \cdot \frac{1}{2^n n \ln n}.$$

Пусть N_1 — натуральное число, начиная с которого выполнено

$$\mathcal{I} \geqslant \mathcal{J}.$$

Тогда для всех $n \geqslant \max(n_1, N_1)$ верно неравенство

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geqslant \frac{1}{3e^{35}} \frac{2^{2n-2}}{\binom{n-1}{k-1}^2} \frac{n}{\ln(n^{2k} \ln n)} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полученная в теореме 3 оценка величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ улучшает результат теоремы 2 и оценку (33) при k, имеющем порядок роста не более чем $n^{1/2-\delta}/\sqrt{\ln n}$, где $0 < \delta < 1/2$.

Доказательство теоремы 3. Введём случайную величину X, равную числу плохих пар рёбер в гиперграфе H при случайной нумерации σ, и случайную величину Y, равную числу плотных рёбер в гиперграфе H при случайной нумерации σ. Если удастся показать, что сумма математических ожиданий величин X и Y меньше $\varepsilon|E|$, то мы докажем, что H обладает свойством $\mathrm{B}_{k,\varepsilon}$. Действительно, если $\mathbb{E}(X+Y) < \varepsilon|E|$, то существует σ, с которой $X(\sigma) + Y(\sigma) < \varepsilon|E|$. Возьмём нумерацию σ и уберём из каждой плохой пары по ребру, а также все плотные рёбра. Получим остовный подгиперграф H' с не менее чем $|E|(1-\varepsilon)$ рёбрами. По построению он будет обладать свойством B_k согласно критерию.

Положим p равным $\ln(n^{2k} \ln n)/n$. Нам потребуются следующие вспомогательные результаты:

$$(1+p)^{2k} \leqslant \exp\left(\frac{2k\ln(n^{2k}\ln n)}{n}\right) = \exp\left(\frac{4k^2 \ln n}{n} + \frac{2k \ln\ln n}{n}\right) =$$
$$= e^4 \cdot \left(\frac{2\ln\ln n}{\sqrt{n \ln n}}\right) \leqslant e^4 \cdot \left(\frac{2\ln\ln 30}{\sqrt{30\ln 30}}\right) < e^5,$$

$$\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^k = \left(1 + \frac{2p}{1-p}\right)^k \leqslant \exp\left(\frac{2k(2k\ln n + \ln\ln n)/n}{1-(2k\ln n + \ln\ln n)/n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{4 + (2\ln\ln n)/\sqrt{n\ln n}}{1 - 2\sqrt{\ln n/n} - \ln\ln n/\sqrt{n \ln n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{4 + 2\ln\ln 30/\sqrt{30\ln 30}}{1 - 2\sqrt{\ln 30/30} - \ln\ln 30/\sqrt{30\ln 30}}\right) < e^{15}. \tag{34}$$

Для математического ожидания случайной величины Y выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &\leqslant |E| \max_A \mathbb{P}\big(\mathcal{N}(A)\big) = |E|\mathbb{P}\left(l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) = \\
&= |E| \left[\mathbb{P}\left(l(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) + \mathbb{P}\left(l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2},\ l(A) > \frac{1-p}{2}\right)\right] = \\
&= |E|\,\mathbb{P}\left(l(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) + |E|\,\mathbb{P}\left(l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2},\ l(A) > \frac{1-p}{2}\right). \qquad (35)
\end{aligned}$$

Как и раньше, оценим по отдельности каждое из двух слагаемых, стоящих в правой части:

$$\begin{aligned}
&|E|\,\mathbb{P}\left(l(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) = \\
&= |E| n \binom{n-1}{k-1} \int\limits_0^{(1-p)/2} x^{n-k}(1-x)^{k-1}\,dx = \ldots = \\
&= |E| n \binom{n-1}{k-1} k \frac{\big((1-p)/2\big)^{n-k+1}(1-(1-p)/2)^{k-1}}{n-k+1} = \\
&= |E| \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, \frac{nk}{n-k+1}\, \frac{(1-p)^n}{2^n} \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{k-1} \leqslant \\
&\leqslant |E| \frac{nk}{n-k+1}\, \frac{n^{k-1}}{2^n(k-1)!}\, \frac{1}{n^{2k}\ln n} \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{k} < \\
&< |E| \frac{k}{k-1}\, \frac{1}{n-k}\, \frac{e^{15}}{n^k 2^n \ln n} < |E| \frac{e^{15}}{n^k 2^n \ln n}. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Оценки в (36) получаются таким же образом, как и в (11) и (12). Теперь оценим второе слагаемое, стоящее в правой части (35):

$$\begin{aligned}
&|E|\mathbb{P}\left(l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2},\ l(A) > \frac{1-p}{2}\right) = \\
&= |E| n \binom{n-1}{k-1} \times \\
&\times \int\limits_{(1-p)/2}^{1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-k}{i} \left(x - \frac{1-p}{2}\right)^i \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i} (1-x)^{k-1}\,dx = \ldots = \\
&= |E| n \binom{n-1}{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-k}{i} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i} \frac{(k-1)!}{(i+1)\ldots(i+k-1)} \times \\
&\times \int\limits_{(1-p)/2}^{1} \left(x - \frac{1-p}{2}\right)^{i+k-1} dx =
\end{aligned}$$

$$= |E| n \binom{n-1}{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-k}{i} \frac{(k-1)!\, i!}{(i+k)!} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k-i} \left(1 - \frac{1-p}{2}\right)^{i+k} <$$
$$< |E| n \binom{n-1}{k-1}^2 \frac{(k-1)!\,(k-1)!}{(2k-1)!} \frac{1}{2^n} (1-p)^n \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{2k-1} (1-\varepsilon)^{-1} <$$
$$< |E| \frac{4}{3} \frac{n^{2(k-1)+1}}{2^n n^{2k} \ln n (2k-1)!} \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{2k} \leqslant |E| \frac{2e^{30}}{9} \frac{1}{2^n n \ln n}. \tag{37}$$

Из (32) имеем

$$\frac{\varepsilon}{4} \in \left(R \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right) \cdot 2^{-n-1} \cdot n^{-2},\ \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right) \cdot 2^{-n-1}\right).$$

Отсюда и из (36), (37) видно, что при $n > \max(n_1, N)$ верны оценки

$$|E|\, \mathbb{P}\left(l(A) - f(A) \leqslant \frac{1-p}{2},\ l(A) > \frac{1-p}{2}\right) < |E| \frac{2e^{30}}{9} \frac{1}{2^n n \ln n} < \frac{\varepsilon}{4} |E|,$$
$$|E|\, \mathbb{P}\left(l(A) \leqslant \frac{1-p}{2}\right) < |E| \frac{e^{15}}{n^k 2^n \ln n} < |E| \frac{2e^{30}}{9} \frac{1}{2^n n \ln n} < \frac{\varepsilon}{4} |E|.$$

Напомним, что мы положили p равным $\ln(n^{2k} \ln n)/n$. Воспользовавшись соотношениями (34), аналогично (29) получаем

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant 3e^{35} \binom{n-1}{k-1}^2 2^{2-2n} \frac{\ln(n^{2k} \ln n)}{n}.$$

Теперь оценим математическое ожидание случайной величины X.

$$\mathbb{E}(X) \leqslant |E|^2 \max_{f,s} \mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant |E| \left(\frac{1}{3e^{35}} \frac{2^{2n-2}}{\binom{n-1}{k-1}^2} \frac{n}{\ln(n^{2k} \ln n)} \frac{\varepsilon}{2}\right) \times$$
$$\times \left(3e^{35} \binom{n-1}{k-1}^2 2^{2-2n} \frac{\ln(n^{2k} \ln n)}{n}\right) = \frac{\varepsilon}{2} |E|.$$

Получаем, что

$$\mathbb{E}(X+Y) < \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right) |E| = \varepsilon |E|.$$

Теорема 3 доказана. □

Замечание. Поскольку $m_{k,\varepsilon}(n) \geqslant m_k(n)$, при

$$\varepsilon \in \left(R \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right) \cdot 2^{1-n} \cdot n^{-2},\ S \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}\right) \cdot 2^{1-n} \cdot n^{-1/2}\right),$$

где S — некоторая константа, лучшей нижней оценкой для $m_{k,\varepsilon}(n)$ будет оценка (6).

4. Задачи о классах гиперграфов с ограничением на пересечение рёбер

Рассмотрим следующее обобщение задачи о свойстве B_k. Будем говорить, что гиперграф обладает *свойством* A_h, если любые два ребра гиперграфа либо не пересекаются, либо имеют не менее h общих вершин. Определим величину $m_{k,h}(n)$ как минимально возможное количество рёбер гиперграфа, обладающего свойством A_h, но не обладающего свойством B_k. Отметим, что в случае $h \geqslant 2k$ данная задача не имеет смысла. Нетрудно понять, что любой гиперграф, обладающий свойством A_{2k}, обладает и свойством B_k, поэтому величина $m_{k,h}(n)$ не существует при $h \geqslant 2k$. Нижняя оценка этой величины в нетривиальном случае была получена Д. А. Шабановым [10]:

$$m_{k,h}(n) \geqslant c\left(\frac{3n}{2h\ln n}\right)^{h/3}\frac{2^{n-1}}{\binom{n}{k-1}}, \tag{38}$$

где $k = O(h\ln n)$ и $h < 2k$.

Кроме того, всегда верна оценка

$$m_{k,h}(n) \geqslant m_k(n),$$

т. е. для $m_{k,h}(n)$ имеют место те же нижние оценки, что и для $m_k(n)$, в том числе и (6). А. П. Розовской [4] была получена следующая нижняя оценка:

$$m_{k,h}(n) \geqslant \frac{0{,}19n^{1/4}2^{n-1}}{\sqrt{2^{h-k}(h-k+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{2k-1-h}}}, \tag{39}$$

где $2k^2(n-k) < (n-2k)^2$. По сравнению с ранее известным результатом (38) оценка А. П. Розовской существенно расширяет область значений параметра k. Следующая теорема даёт новую нижнюю оценку для $m_{k,h}(n)$.

Теорема 4. *Пусть $n \geqslant 30$, $k > 2$, $k < h < 2k$ и выполнено неравенство* (5). *Тогда*

$$m_{k,h}(n) \geqslant \frac{12}{e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\frac{2^{n-1}}{\sqrt{2^{h-k}(h-k+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{2k-1-h}}}. \tag{40}$$

Несложно проверить, что в условиях теоремы 4 отношение правых частей оценок (40) и (6) оценивается снизу выражением вида $(c_0n/k)^{(h-k)/2}$, где c_0 — некоторая универсальная константа. Таким образом, (40) лучше оценивает величину $m_{k,h}(n)$, чем (6). Кроме того, полученная в теореме 4 оценка величины $m_{k,h}(n)$ улучшает оценку (39) при k, имеющем порядок роста не более чем $n^{1/2-\delta}/\sqrt{\ln n}$, где $0 < \delta < 1/2$.

Доказательство теоремы 4 проводится тем же способом, что и доказательство теоремы 1. Достаточно показать, что произвольный n-однородный гиперграф $H = (V, E)$, обладающий свойством A_h, количество рёбер которого удовлетворяет неравенству

$$|E| < \frac{12}{e^{26}} \left(\frac{n}{k \ln n}\right)^{1/2} \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2^{h-k}(h-k+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{2k-1-h}}}, \tag{41}$$

обладает и свойством B_k.

Пусть $H = (V, E)$ — такой гиперграф. Рассмотрим случайную нумерацию σ, которая была построена в доказательстве теоремы 1 (см. раздел 3.2). В доказательстве теоремы 1 было введено событие $\mathcal{R}$, заключающееся в том, что в случайной нумерации σ в гиперграфе H встречаются плотные рёбра. Согласно (12), (13), (15) и (16) в условиях теоремы 1 (т. е. при выполнении (5)) выполнено неравенство

$$\mathbb{P}(\mathcal{R}) < e^{13}|E|\binom{n-1}{k-1}2^{-n}\frac{nk}{n-k+1}\frac{1}{n^{2k}} + \\ + e^{26}(1-\varepsilon)^{-1}|E|\binom{n-1}{k-1}2^{-n}n^k\frac{(k-1)!}{(2k-1)!}\frac{1}{n^{2k}}. \tag{42}$$

Воспользовавшись условием (41) на число рёбер, получим

$$|E|\binom{n-1}{k-1}2^{-n} < \frac{6}{e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{h-k}(h-k+1)\binom{n-1}{2k-1-h}}} <$$
$$< \frac{6}{e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{(2k-1-h)!\,(n-2k+h)!}{(k-1)!\,(n-k)!}} <$$
$$< \frac{6}{e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\sqrt{\left(\frac{n-2k+h}{2k-h}\right)^{h-k}} <$$
$$< \frac{6}{e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}n^{(h-k)/2} < \frac{6}{e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}n^{k/2}.$$

Здесь мы пользовались тем, что $k < h < 2k$. Отсюда получим окончательную оценку для (42):

$$\mathbb{P}(\mathcal{R}) < \frac{6}{e^{13}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\frac{nk}{n-k+1}\frac{1}{n^{3k/2}} + 6(1-\varepsilon)^{-1}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\frac{1}{n^{k/2}} <$$
$$< \frac{6}{e^{13}}\frac{1}{n-\sqrt{n/\ln n}}\frac{1}{\sqrt{n\ln n}} + 6(1-\varepsilon)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n\ln n}} <$$
$$< \frac{6}{e^{13}}\frac{1}{27}\frac{1}{10} + 6(1-\varepsilon)^{-1}\frac{1}{10} =$$
$$= \frac{1}{45e^{13}} + \frac{3}{5}(1-\varepsilon)^{-1} < \frac{1}{45e^{13}} + \frac{4}{5} \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 30. \tag{43}$$

Согласно (25) в условиях теоремы 1 (т. е. при выполнении (5)) выполнено неравенство

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant e^{30}(1-\alpha)^{-2} \sum_{t=\max(0,l-k)}^{\min(k-1,l-1)} (t+1)\binom{n-t-1}{k-1-t}\binom{n-t-1}{k-1} 2^{t+2} p\left(\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

где $l = f \cap s$. По условию теоремы 2

$$\max(0, l-k) = l-k \geqslant h-k.$$

Тогда можно увеличить сумму, считая, что t изменяется от $h-k$ до $k-1$. Найдём максимальное слагаемое в сумме, рассматривая отношение соседних слагаемых. Как и в теореме 1, получаем, что максимальному слагаемому отвечает минимальное значение $t = h-k$, а вся сумма оценивается сверху максимальным слагаемым, умноженным на $(1-\gamma)^{-1}$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant e^{30}(1-\alpha)^{-2}(1-\gamma)^{-1}(h-k+1) \times \\ \times \binom{n-h+k-1}{2k-1-h}\binom{n-h+k-1}{k-1} 2^{h-k+2} p\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Согласно (27) получаем оценку вероятности события $\mathcal{M}(f,s)$:

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) \leqslant 6e^{30}2^{2-2n}(h-k+1)\binom{n-1}{2k-1-h}\binom{n-1}{k-1} 2^{h-k}\frac{k\ln n}{n}.$$

В итоге вероятность события $\mathcal{F}$ оценивается сверху следующим образом:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}) \leqslant \sum_{f,s} \mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) < \\ < |E|^2 6e^{30}2^{2-2n}(h-k+1)\binom{n-1}{2k-1-h}\binom{n-1}{k-1} 2^{h-k}\frac{k\ln n}{n} < \frac{864}{e^{22}}.$$

Из последнего неравенства и (43) следует, что

$$\mathbb{P}(\mathcal{R}) + \mathbb{P}(\mathcal{F}) < \frac{1}{45e^{13}} + \frac{4}{5} + \frac{864}{e^{22}} < 1.$$

Итак, мы показали, что с положительной вероятностью в случайной нумерации σ для любых рёбер f и s выполнено

$$L_\sigma(f) \cap L_\sigma(s) = \varnothing.$$

Следовательно, согласно критерию H обладает свойством B_k, и в силу произвольности выбора H получаем искомое неравенство

$$m_{k,h}(n) \geqslant \frac{12}{e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2} \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2^{h-k}(h-k+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{2k-1-h}}}.$$

Теорема 4 доказана. □

5. Простые гиперграфы

Ещё одно обобщение задачи Эрдёша—Хайнала о свойстве B связано с простыми гиперграфами. *Простым гиперграфом* называется гиперграф, любые два ребра которого имеют не более одной общей вершины. Обозначим через $m^*(n)$ величину, равную минимальному возможному числу рёбер в простом n-однородном гиперграфе, не обладающем свойством B. Впервые задача об отыскании величины $m^*(n)$ была поставлена П. Эрдёшем и Л. Ловасом [17]. Ими были получены следующие результаты:

$$c_1 \frac{4^n}{n^3} \leqslant m^*(n) \leqslant c_2 n^4 4^n.$$

Позже нижняя оценка была улучшена З. Сабо [26], а также А. В. Косточкой и М. Кумбхатом [19]. Он доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ выполнено

$$m^*(n) \geqslant 4^n n^{-\varepsilon}.$$

Рассмотрим естественное обобщение этой задачи, заключающееся в поиске величины $m^*_k(n)$, равной минимальному возможному числу рёбер простого n-однородного гиперграфа, не обладающего свойством B_k. Наилучшая нижняя оценка этой величины была получена А. П. Розовской [5]:

$$m^*_k(n) \geqslant \frac{(0{,}19)^2}{8e} \frac{2^{2n-2}}{(n-1)^{3/2}\binom{n-2}{k-1}^2}, \tag{44}$$

где $2k^2(n-k-1) < (n-2k-1)^2$. Следующая теорема даёт новую нижнюю оценку для $m^*_k(n)$.

Теорема 5. *Пусть $k \geqslant 2$ и выполнено* (5). *Тогда для всех $n \geqslant 30$ выполнено*

$$m^*_k(n) \geqslant \frac{25}{18e^{52}} \frac{2^{2(n-1)}}{k(n-1)\ln(n-1)\binom{n-2}{k-1}^2}.$$

Как видно, полученная оценка улучшает предыдущий результат (44) при k, имеющем порядок роста не более чем $n^{1/2-\delta}/\sqrt{\ln n}$, где $0 < \delta < 1/2$. Для доказательства теоремы 5 нам понадобится следующая теорема, которая даёт достаточное условие обладания свойством B_k для n-однородного гиперграфа.

Теорема 6. *Пусть $H = (V, E)$ — n-однородный гиперграф, каждое ребро которого пересекается не более чем с D другими. Пусть, кроме того, $n \geqslant 30$, $k \geqslant 2$ и выполнено неравенство* (5). *Если*

$$D \leqslant \frac{5}{3e^{26}} \left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2} \frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}} - 1, \tag{45}$$

то H обладает свойством B_k.

5.1. Доказательство теоремы 6

Пусть $H = (V, E)$ — такой n-однородный гиперграф, что каждое его ребро пересекается не более чем с D другими рёбрами.

Пусть σ — случайная нумерация, построенная так же, как в доказательстве теоремы 1 (см. раздел 3.2). Напомним, что нами были введены события

$$\{\mathcal{M}(f,s)\colon f,s\in E,\ f\cap s\neq\varnothing,\ f,\ s \text{ не плотные}\}$$

и

$$\{\mathcal{N}(A)\colon A\in E,\ A \text{ плотное}\}.$$

Если мы докажем, что

$$\mathbb{P}\biggl\{\biggl(\bigcap_{f,s}\overline{\mathcal{M}(f,s)}\biggr)\cap\biggl(\bigcap_{A}\overline{\mathcal{N}(A)}\biggr)\biggr\}>0,$$

то это будет означать, что с положительной вероятностью в σ для любых рёбер f и s выполнено

$$L_\sigma(f)\cap F_\sigma(s)=\varnothing,$$

и таким образом будет обосновано, что H обладает свойством B_k.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая теорема, доказательство которой можно найти в [3].

Теорема 7. *Пусть $A_1,\dots,A_N$ — события в произвольном вероятностном пространстве, $S_1,\dots,S_N$ — это подмножества в $\{1,\dots,N\}$. Пусть выполнены условия*

1) *A_i не зависит от алгебры, порождённой событиями $\{A_j,\ j\notin S_i\}$,*

2) *для каждого $i\in\{1,\dots,N\}$ выполнено $\sum\limits_{j\in S_i\cup i}\mathbb{P}(A_j)\leqslant 1/4$.*

Тогда выполнено

$$\mathbb{P}\biggl(\bigcap_{i=1}^{N}\overline{A_i}\biggr)>0.$$

По построению случайной нумерации σ событие $\mathcal{M}(f,s)$ независимо с алгеброй, порождённой событиями

$$\{\mathcal{M}(g,u)\colon g,u\in E,\ g\cap u\neq\varnothing,\ (g\cup u)\cap(f\cup s)=\varnothing\}$$

и

$$\{\mathcal{N}(Q)\colon Q\in E,\ Q \text{ плотное}\},$$

а событие $\mathcal{N}(A)$ независимо с алгеброй, порождённой событиями

$$\{\mathcal{M}(g,u)\colon g,u\in E,\ g\cap u\neq\varnothing,\ g,\ u \text{ не плотные}\}$$

и

$$\{\mathcal{N}(Q)\colon Q\in E,\ Q\cap A=\varnothing,\ Q \text{ плотное}\}.$$

Для события $\mathcal{M}(f,s)$ введём набор событий

$$S(f,s)=\{\mathcal{M}(g,u)\colon g,u\in E,\ g\cap u\neq\varnothing,\ (g\cup u)\cap(f\cup s)\neq\varnothing,\ g,\ u \text{ не плотные}\},$$

а для события $\mathcal{N}(A)$ набор событий

$$Z(A) = \{\mathcal{N}(Q)\colon Q \in E,\ Q \cap A \neq \varnothing,\ Q \text{ плотное}\}.$$

По условию теоремы 6 количество элементов в $S(f,s)$ не превосходит $4(D+1)^2$, а количество элементов в $Z(A)$ не превосходит $D+1$. Воспользовавшись (29) и (42), получаем, что

$$\begin{aligned}
&4(D+1)^2\mathbb{P}\big(\mathcal{M}(f,s)\big) + (D+1)\mathbb{P}\big(\mathcal{N}(A)\big) \leqslant \\
&\leqslant 4(D+1)^2\left(3e^{30}\binom{n-1}{k-1}^2 2^{2-2n}\frac{2k\ln n}{n}\right) + \\
&+ (D+1)\left(\binom{n-1}{k-1}2^{-n}\frac{nk}{n-k+1}\,\frac{e^{13}}{n^{2k}} + \right.\\
&\left.+ (1-\varepsilon)^{-1}\binom{n-1}{k-1}2^{-n}n^k\frac{(k-1)!}{(2k-1)!}\,\frac{e^{26}}{n^{2k}}\right) < \\
&< \frac{200}{3e^{22}} + \frac{1}{324e^{13}} + \frac{1}{9} < \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались условием (45) на величину D.

Таким образом, из теоремы 7 получаем, что

$$\mathbb{P}\left\{\left(\bigcap_{f,s}\overline{\mathcal{M}(f,s)}\right) \cap \left(\bigcap_{A}\overline{\mathcal{N}(A)}\right)\right\} > 0.$$

Теорема 6 доказана.

5.2. Доказательство теоремы 5

Из теоремы 6 мы знаем, что если дан n-однородный гиперграф, каждое ребро которого пересекается не более чем с D другими рёбрами, где

$$D \leqslant \frac{5}{3e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}} - 1,$$

то данный гиперграф обладает свойством B_k. Введём обозначение

$$X(n) = \frac{5}{3e^{26}}\left(\frac{n}{k\ln n}\right)^{1/2}\frac{2^{n-1}}{\binom{n-1}{k-1}} - 1.$$

Тогда, если n-однородный гиперграф не обладает свойством B_k, в нём найдётся ребро f_0, пересекающееся более чем с $X(n)$ другими рёбрами. Значит, найдётся вершина $v_0 \in f_0$, такая что

$$\deg v_0 \geqslant \frac{X(n)}{n} + 1.$$

Итак, пусть $H = (V,E)$ — n-однородный гиперграф, не обладающий свойством B_k. Рассмотрим $(n-1)$-однородный гиперграф $H_1 = (V,E)$, который получается из H выкидыванием из каждого ребра вершины (ровно одной) максимальной степени. Ясно, что H_1 не обладает свойством B_k, так как исходный гиперграф H этим свойством не обладал. Тогда из приведённых выше рассуждений следует, что найдётся вершина $v_1 \in V$ с условием

$$\deg_{H_1} v_1 \geqslant \frac{X(n-1)}{n-1} + 1.$$

Рассмотрим все рёбра, содержащие вершину v_1. Мы только что удалили из каждого такого ребра вершину максимальной степени. Восстановим эти вершины. Исходный гиперграф H является простым, следовательно, все эти восстановленные вершины будут различны. Пусть $u_1, \ldots, u_m$ — эти вершины, причём

$$m \geqslant \deg_{H_1} v_1 \geqslant \frac{X(n-1)}{n-1} + 1.$$

Степень каждой вершины u_j в гиперграфе H будет также не меньше, чем $\deg_{H_1} v_1$, причём любые u_i и u_j имеют не более одного общего ребра.

Через каждую восстановленную вершину проходит не менее чем $Y = X(n-1)/(n-1)+1$ рёбер. Тогда общее количество рёбер в графе оценивается снизу суммой

$$Y + (Y-1) + (Y-2) + \ldots = \frac{Y(Y+1)}{2}.$$

Подставим в это выражение значение Y, получим

$$|E| \geqslant \frac{Y(Y+1)}{2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{X(n-1)}{n-1} + 1\right)^2 \geqslant \frac{25}{18e^{52}} \frac{2^{2(n-1)}}{k(n-1)\ln(n-1)\binom{n-2}{k-1}^2}.$$

Теорема 5 доказана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00355) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2540.2020.1).

Литература

[1] Демидович Ю. А., Райгородский А. М. Двухцветные раскраски однородных гиперграфов // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 4. — С. 623—626.

[2] Купавский А. Б., Шабанов Д. А. Раскраски частичных систем Штейнера и их приложения // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 77—115.

[3] Райгородский А. М., Шабанов Д. А. Задача Эрдёша—Хайнала о раскрасках гиперграфов, её обобщения и смежные проблемы // УМН. — 2011. — Т. 66, № 5. — С. 109—182.

[4] Розовская А. П. О двухцветных раскрасках общего вида для равномерных гиперграфов // Докл. РАН. — 2009. — Т. 429, № 3. — С. 309—311.

[5] Розовская А. П. Экстремальные комбинаторные задачи для двухцветных раскрасок гиперграфов // Матем. заметки. — 2011. — Т. 90, № 4. — С. 584—598.

[6] Тепляков С. М. Верхняя оценка в задаче Эрдёша—Хайнала о раскраске гиперграфа // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 1. — С. 148—151.

[7] Хузиева А. Э., Шабанов Д. А. Количественные оценки характеристик в гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом // Матем. заметки. — 2015. — Т. 98, № 6. — С. 948—951.

[8] Хузиева А. Э., Шабанов Д. А. Об однородных гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом // Дискрет. матем. — 2015. — Т. 27, № 2. — С. 112—133.

[9] Шабанов Д. А. Об одной комбинаторной задаче Эрдёша // Докл. РАН. — 2004. — Т. 396, № 2. — С. 166—169.

[10] Шабанов Д. А. Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов // Изв. РАН Сер. матем. — 2007. — Т. 71, № 6. — С. 183—222.

[11] Шабанов Д. А. Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, № 7. — С. 139—160.

[12] Akolzin I., Shabanov D. Colorings of hypergraphs with large number of colors // Discrete Math. — 2016. — Vol. 339, no. 12. — P. 3020—3031.

[13] Cherkashin D., Kozik J. A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs // Random Struct. Algorithms. — 2015. — Vol. 47, no. 3. — P. 407—413.

[14] Erdős P. On a combinatorial problem // Nordisk Mat. Tidskr. — 1963. — Vol. 11. — P. 5—10.

[15] Erdős P. On a combinatorial problem. II // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1964. — Vol. 15, no. 3-4. — P. 445—447.

[16] Erdős P., Hajnal A. On a property of families of sets // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1961. — Vol. 12, no. 1-2. — P. 87—123.

[17] Erdős P., Lovász L. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets. Vol. 2 / A. Hajnal, ed. — Amsterdam: North-Holland, 1975. — (Colloq. Math. Soc. Jänos Bolyai; Vol. 10). — P. 609—627.

[18] Kostochka A. V. Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: A survey // More Sets, Graphs and Numbers. — Berlin: Springer, 2006. — (Bolyai Soc. Math. Stud.; Vol. 15). — P. 175—197.

[19] Kostochka A. V., Kumbhat M. Coloring uniform hypergraphs with few edges // Random Struct. Algorithms. — 2009. — Vol. 35, no. 3. — P. 348—368.

[20] Kozik J., Shabanov D. Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications // J. Combin. Theory. Ser. B. — 2016. — Vol. 116. — P. 312—332.

[21] Pluhár A. Greedy colorings for uniform hypergraphs // Random Struct. Algorithms. — 2009. — Vol. 35, no. 2. — P. 216—221.

[22] Radhakrishnan J., Srinivasan A. Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring // Random Struct. Algorithms. — 2000. — Vol. 16, no. 1. — P. 4—32.

[23] Shabanov D. Coloring non-uniform hypergraphs without short cycles // Graphs Combin. — 2014. — Vol. 30, no. 5. — P. 1249—1260.

[24] Shabanov D. Around Erdős–Lovász problem on colorings of non-uniform hypergraphs // Discrete Math. — 2015. — Vol. 338, no. 11. — P. 1976—1981.

[25] Shabanov D. Equitable two-colorings of uniform hypergraphs // European J. Combin. — 2015. — Vol. 43. — P. 185—203.

[26] Szabó Z. An application of Lovász local lemma — a new lower bound for the van der Waerden number // Random Struct. Algorithms. — 1990. — Vol. 1, no. 3. — P. 343—360.