Большие выбросы траекторий квадратичной формы от гауссовского стационарного процесса

А. И. ЖДАНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: zhdanova_e@mail.ru

УДК 519.21

Ключевые слова: гауссовские процессы, большие выбросы траекторий, теорема Пикандса, метод двойных сумм, гауссовский хаос, процессы типа хи-квадрат.

Аннотация

Найдена точная асимптотика для вероятностей высоких выбросов траекторий квадратичной формы от гауссовского стационарного центрированного процесса, ковариационная матрица которого в окрестности нуля удовлетворяет условию типа Пикандса. Относительно квадратичной формы предполагается существование положительного максимального собственного значения кратности 1.

Abstract

A. I. Zhdanov, High excursions of a quadratic form for a Gaussian stationary vector process, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 123—144.

Exact asymptotic behavior is given for high excursion probabilities of a quadratic form for a zero-mean Gaussian stationary vector process with Pickands' type covariance matrix in the vicinity of zero. The case of a quadratic form with a positive maximum eigenvalue of order 1 is considered.

1. Введение

В [3, 4, 7] предложен общий способ вычисления асимптотики вероятностей вида $P(g(\boldsymbol{\xi}) > u)$ при $u \to \infty$, где $\boldsymbol{\xi}$ — d-мерный гауссовский случайный вектор, а $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — однородная функция положительного порядка β, в том смысле, что $g(a\mathbf{x}) = a^\beta g(\mathbf{x})$ для всех $a > 0$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. При этом предполагается, что функция $g(\cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. В общей постановке интересна задача нахождения асимптотического поведения вероятностей высоких выбросов траекторий *процесса гауссовского хаоса* $g\big(\boldsymbol{\xi}(t)\big)$

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,p]} g\big(\boldsymbol{\xi}(t)\big) > u\Big), \quad u \to \infty,$$

где $\boldsymbol{\xi}(t)$ — d-мерный гауссовский векторный процесс с п. н. непрерывными траекториями.

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 123—144.

В [5, 8, 9] рассмотрен случай центрированных процессов типа хи-квадрат ($g(\cdot)$ — положительно-определённая квадратичная форма). В [1, 12] рассмотрен случай $g(\mathbf{x}) = x_1x_2$ для зависимых и неодинаково распределённых компонент гауссовского стационарного центрированного векторного процесса $\boldsymbol{\xi}(t) = \big(\xi_1(t), \xi_2(t)\big)^\top$. В [6] найдено асимптотическое поведение искомой вероятности для разности независимых процессов типа хи-квадрат. Наконец, в [11] получено общее решение рассматриваемой задачи в случае независимых и одинаково распределённых компонент гауссовского центрированного стационарного вектора $\boldsymbol{\xi}(t)$, в то время как применение метода дискретной аппроксимации в рассматриваемой задаче в [2] позволило получить её решение в случае зависимых и неодинаково распределённых гауссовских стационарных процессов при некоторых ограничениях на гладкость функции g. В этом случае предполагается, что ковариационная матрица стационарного векторного процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$ в окрестности нуля удовлетворяет условиям типа Пикандса. Основным методом исследования при этом является метод двойных сумм.

В данной статье рассматривается случай, когда функция $g(\cdot)$ определяет квадратичную форму, т. е. для некоторой симметричной матрицы A выполнено $g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle$. Данный результат формально следует из [2], однако в настоящей статье представлен вариант доказательства, базирующийся на технике доказательства [1, 12].

В следующем разделе приводится основной результат работы. Затем в разделе 3 в соответствии с основным принципом метода двойных сумм доказана локальная лемма. В разделе 4 приведено доказательство основной теоремы и даны некоторые комментарии к доказательству.

2. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Рассмотрим симметричную $(d \times d)$-матрицу A. Предположим, что

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \big(\xi_1(t), \ldots, \xi_d(t)\big)^\top, \quad d \geqslant 2, \quad t \geqslant 0, \ -$$

центрированный гауссовский стационарный векторный процесс с п. н. непрерывными траекториями, матричная ковариационная функция которого удовлетворяет следующим условиям типа Пикандса.

E1. Для некоторых положительно определённых матриц R, $C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,d}$,

$$R(t) := E\boldsymbol{\xi}(t)\boldsymbol{\xi}(0)^\top = R - |t|^\alpha C + |t|^\alpha o(1), \quad t \to 0, \quad \alpha \in (0, 2], \tag{1}$$

где $o(1)$ — $(d \times d)$-матрица, компоненты которой стремятся к нулю при $t \to 0$.

E2. Для всех $t > 0$ выполнено $R \pm R(t) \succ 0$ в матричном смысле, т. е. для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и всех $t > 0$

$$\big\langle \mathbf{x}, \big(R \pm R(t)\big)\mathbf{x}\big\rangle > 0. \tag{2}$$

Замечание. Из определения $R(t)$ следует, что матрицы $R \pm R(t)$ неотрицательно определены для всех $t > 0$. Действительно,

$$2\big(R \pm R(t)\big) = E\big(\boldsymbol{\xi}(t) \pm \boldsymbol{\xi}(0)\big)\big(\boldsymbol{\xi}(t) \pm \boldsymbol{\xi}(0)\big)^{\top}.$$

Без учёта требования положительной определённости матрицы C условия E1, E2 влекут лишь неотрицательную определённость матрицы C ($C \succeq 0$).

Поставим задачу нахождения точной асимптотики при $u \to \infty$ вероятности

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,p]} \langle \boldsymbol{\xi}(t), A\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u\Big) \tag{3}$$

при любом фиксированном $p > 0$. Рассматриваемую задачу можно свести к изучению асимптотического поведения вероятности вида

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,p]} \langle \boldsymbol{\eta}(t), D\boldsymbol{\eta}(t)\rangle > u\Big),$$

с некоторой диагональной $(d \times d)$-матрицей D и центрированным стационарным гауссовским векторным процессом $\boldsymbol{\eta}(t)$, ковариационная матрица которого удовлетворяет условиям типа Пикандса.

E1′. Для некоторой положительно определённой матрицы C_0

$$R_{\boldsymbol{\eta}}(t) := E\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\eta}(0)^{\top} = I_d - |t|^{\alpha}C_0 + |t|^{\alpha}o(1), \quad t \to 0, \quad \alpha \in (0,2], \tag{4}$$

где $o(1)$ — $(d \times d)$-матрица, компоненты которой стремятся к нулю при $t \to 0$, I_d — единичная $(d \times d)$-матрица.

E2′. Для всех $t > 0$ выполнено $I_d \pm R_{\boldsymbol{\eta}}(t) \succ 0$ в матричном смысле, т. е. для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и всех $t > 0$

$$\big\langle \mathbf{x}, \big(I_d \pm R_{\boldsymbol{\eta}}(t)\big)\mathbf{x}\big\rangle > 0. \tag{5}$$

Для этого отметим, что для центрированного стационарного гауссовского векторного процесса $\boldsymbol{\eta}(t) = Q^{\top}R^{-1/2}\boldsymbol{\xi}(t)$, где Q — ортогональная матрица, приводящая симметричную матрицу $R^{1/2}AR^{1/2}$ к диагональному виду D,

$$E\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\eta}(0)^{\top} = I_d - |t|^{\alpha}C_0 + |t|^{\alpha}o(1), \quad t \to 0, \quad \alpha \in (0,2],$$

где матрица $C_0 = (R^{-1/2}Q)^{\top}C(R^{-1/2}Q)$ положительно определённая и

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,p]} \langle \boldsymbol{\xi}(t), A\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u\Big) = \mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,p]} \langle \boldsymbol{\eta}(t), D\boldsymbol{\eta}(t)\rangle > u\Big).$$

Таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что для процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$ выполнены условия E1′, E2′ с постоянной положительно определённой матрицей $C \succ 0$ и ковариационной матрицей $R(t)$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ — диагональные элементы матрицы D. Без ограничения общности будем предполагать, что все λ_i, $i = 1, \ldots, d$, отличны от нуля (иначе перейдём к задаче меньшей размерности), а также что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_d$ (иначе переставим компоненты вектора $\boldsymbol{\xi}(t)$). В рамках постановки задачи естественно предполагать, что $\lambda_1 > 0$. В соответствии с базовым принципом метода

Лапласа (см. [3,4,7]) искомая вероятность должна зависеть от максимума функции $g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, D\mathbf{x} \rangle$ на единичной сфере, вида многообразия точек максимума, а также характера поведения функции $g(\mathbf{x})$ в окрестности множества точек максимума. Ограничимся случаем, когда

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_d, \tag{6}$$

т. е. рассмотрим задачу, в которой ограничение функции $g(\mathbf{x})$ на единичную сферу достигает своего максимума на многообразии размерности 0: в точках $(\pm 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}_{d-1}$. Подобное ограничение объясняется границами применимости техники доказательства, развитой для случая $g(\mathbf{x}) = x_1 x_2$ в [1, 12]. Случай произвольного соотношения собственных значений матрицы $R^{1/2} A R^{1/2}$, а именно случай, когда максимальное собственное значение имеет кратность больше 1, рассматривается в рамках решения общей задачи в [2].

Доказательство основного результата будет построено на применении метода двойных сумм: доказательстве основной леммы на бесконечно малом временно́м промежутке и переходе к конечному интервалу $[0, p]$ с использованием неравенства Бонферрони. Сформулируем основную лемму и теорему.

Лемма 1. *Пусть п. н. непрерывный центрированный гауссовский стационарный векторный процесс $\boldsymbol{\xi}(t)$ удовлетворяет условиям* E1′, E2′. *Тогда при условии* (6) *для любого $T > 0$ при $u \to \infty$*

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t \in [0, Tu^{-1/\alpha}]} \langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t) \rangle > u\Big) = \\ = \frac{2}{\prod\limits_{j=2}^{d} \sqrt{1 - \lambda_j/\lambda_1}} H_\alpha\left(\left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha} T\right) \Psi\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right)\big(1 + o(1)\big),$$

где

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

Применяя метод двойных сумм, который будет детально описан в процессе доказательства, получим требуемый результат.

Теорема 1. *Пусть п. н. непрерывный центрированный гауссовский стационарный векторный процесс $\boldsymbol{\xi}(t)$ удовлетворяет условиям* E1′, E2′. *Тогда при условии* (6) *для любого $p > 0$ при $u \to \infty$*

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t \in [0, p]} \langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t) \rangle > u\Big) = \\ = \left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha} \frac{2}{\prod\limits_{j=2}^{d} \sqrt{1 - \lambda_j/\lambda_1}} p H_\alpha u^{1/\alpha} \Psi\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right)\big(1 + o(1)\big).$$

3. Доказательство локальной леммы

Определим $\Delta_0 := [0, Tu^{-1/\alpha}]$. Разобьём доказательство на два случая:

1) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_j < 0$ для всех $j = 2, \dots, d$;
2) существует $j \in \{2, \dots, d\}$, такое что $\lambda_j > 0$; в частности, $\lambda_2 > 0$.

Доказательство леммы в первом случае будет дано в полном объёме, в то время как при рассмотрении второго случая в некоторых моментах мы будем существенно опираться на доказательство, проведённое для первого случая.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_j < 0$ при $j = 2, \dots, d$. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\max_{t\in\Delta_0}\langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u\Big) = \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\Bigg(\int\limits_{\langle \mathbf{x}, D\mathbf{x}\rangle > u} + \int\limits_{0<\langle \mathbf{x}, D\mathbf{x}\rangle < u} + \int\limits_{\langle \mathbf{x}, D\mathbf{x}\rangle < 0}\Bigg)\exp\left(-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right)\times \\
&\quad \times \mathbf{P}\Big(\max_{t\in\Delta_0}\langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u \mid \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{x}\Big)\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

где $|\mathbf{x}|^2 = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2$. Используя результат в [3, 4, 7], найдём асимптотическое поведение первого интеграла при $u \to \infty$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\langle \mathbf{x}, D\mathbf{x}\rangle > u}\exp\left(-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right)\mathbf{P}\Big(\max_{t\in\Delta_0}\langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u \mid \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{x}\Big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \\
&\quad = \mathbf{P}(\langle \boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle > u) = \frac{2}{\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}}\Psi\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right).
\end{aligned}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,d}$ - стандартный базис в $\mathbb{R}^d$. Перейдём к изучению второго интеграла (обозначим его I). В данном интеграле сделаем замену переменных

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\mathbf{e}_1 - \sqrt{\frac{\lambda_1}{u}}\mathbf{w}.$$

В этих переменных область интегрирования переписывается в виде

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon 0 < \langle \mathbf{x}, D\mathbf{x}\rangle < u\} = \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \colon 0 < w_1 - \frac{1}{2u}\langle \mathbf{w}, D\mathbf{w}\rangle < \frac{u}{2\lambda_1}\right\} =: D_u(\mathbf{w}).$$

Определим для всех $u > 0$ и $\mathbf{w} \in D_u(\mathbf{w})$ гауссовский векторный процесс на $[0, T]$:

$$\boldsymbol{\chi}_u(t) := \sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\left(\boldsymbol{\xi}(tu^{-1/\alpha}) - \sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\mathbf{e}_1\right) + \mathbf{w}.$$

Тогда

$$I = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi u}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right) \int\limits_{D_u(\mathbf{w})} \exp\left(w_1 - \frac{\lambda_1}{2u}|\mathbf{w}|^2\right) \times$$
$$\times \mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,T]}\left(\chi_{1,u}(t) + \frac{1}{u}\zeta_u(t)\right) > w_1 - \frac{1}{2u}\langle \mathbf{w}, D\mathbf{w}\rangle \;\middle|\; \boldsymbol{\chi}_u(0) = \mathbf{0}\right)\mathrm{d}\mathbf{w}, \quad (8)$$

где $\chi_{1,u}(t)$ — первая компонента вектора $\boldsymbol{\chi}_u(t)$ и

$$\zeta_u(t) := \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\chi}_u(t), D\boldsymbol{\chi}_u(t)\rangle - \langle \boldsymbol{\chi}_u(t), D\mathbf{w}\rangle.$$

Вычислим условное математическое ожидание и условную ковариационную матрицу гауссовского векторного процесса $\boldsymbol{\chi}_u(t)$ при условии $\{\boldsymbol{\chi}_u(0) = \mathbf{0}\}$. Для условного среднего имеем

$$E(\boldsymbol{\chi}_u(s) \mid \boldsymbol{\chi}_u(0) = \mathbf{0}) = \bar{R}(su^{-1/\alpha})\left(\mathbf{w} - \frac{u}{\lambda_1}\mathbf{e}_1\right), \quad (9)$$

где $\bar{R}(s) := I_d - R(s)$. Принимая во внимание предельное соотношение (4), получаем при $u \to \infty$

$$E(\boldsymbol{\chi}_u(s) \mid \boldsymbol{\chi}_u(0) = \mathbf{0}) = -|s|^\alpha \frac{C\mathbf{e}_1}{\lambda_1} + \mathbf{w}o(1), \quad (10)$$

где $o(1)$ — $(d \times d)$-матрица, не зависящая от $\mathbf{w}$, компоненты которой стремятся к нулю при $u \to \infty$.

Для условной ковариационной матрицы имеем

$$\Sigma := \mathrm{var}\big(\boldsymbol{\chi}_u(t) - \boldsymbol{\chi}_u(s) \mid \boldsymbol{\chi}_u(0)\big),$$

согласно формуле вычисления условной ковариации для гауссовских векторных процессов имеем

$$\Sigma = \frac{u}{\lambda_1}\big(2\bar{R}\big((t-s)u^{-1/\alpha}\big) - \big(R(tu^{-1/\alpha}) - R(su^{-1/\alpha})\big)^2\big).$$

В частности, при $u \to \infty$

$$\Sigma = \frac{2}{\lambda_1}|t-s|^\alpha C + \rho(u,s,t), \quad (11)$$

где $\rho(u,s,t)$ не зависит от $\mathbf{w}$ по свойствам условных гауссовских распределений и стремится к нулю равномерно по $s,t \in [0,T]$ при $u \to \infty$.

Домножая матрицу Σ слева на $\mathbf{e}_i^\top$ и справа на $\mathbf{e}_i$, а также используя (4) для всех достаточно больших u, получаем, что

$$\mathrm{var}(\chi_{i,u}(t) - \chi_{i,u}(s) \mid \boldsymbol{\chi}_u(0) = \mathbf{0}) \leqslant G_i|t-s|^\alpha \quad (12)$$

для всех $t,s \in [0,T]$, где $G_i = 4c_{ii}/\lambda_1$. Ввиду требования $C \succ 0$ имеем $c_{ii} > 0$ для всех $i = 1,\ldots,d$.

Предыдущие соотношения (10)—(12) обеспечивают слабую сходимость семейства гауссовских векторных процессов $\boldsymbol{\chi}_u(t)$, взятых при условии $\{\boldsymbol{\chi}_u(0) = \mathbf{0}\}$, к гауссовскому векторному процессу

$$\boldsymbol{\chi}(t) := \left(\sqrt{2\frac{c_{ii}}{\lambda_1}}B_{i,\alpha/2}(t) - \frac{c_{i1}}{\lambda_1}|t|^\alpha\right)^\top_{i=1,\dots,d},$$

где $\boldsymbol{B}_{\alpha/2}(t) = \big(B_{i,\alpha/2}(t)\big)^\top_{i=1,\dots,d}$ — векторный процесс, состоящий из в общем случае зависимых копий дробного броуновского движения $B_{\alpha/2}(t)$, таких что

$$2\frac{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}{\lambda_1}E\big(B_{i,\alpha/2}(t) - B_{i,\alpha/2}(s)\big)\big(B_{j,\alpha/2}(t) - B_{j,\alpha/2}(s)\big) = 2\frac{c_{ij}}{\lambda_1}|t-s|^\alpha.$$

После подстановки $s = 0$ и тривиальных преобразований получим

$$EB_{i,\alpha/2}(t)B_{j,\alpha/2}(s) = \frac{c_{ij}}{2\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}(|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t-s|^\alpha).$$

Вернёмся к интегралу I. Разобьём его на два интеграла I_1, I_2, таких что интегрирование в I_1 ведётся по области

$$D_{u,1}(\mathbf{w}) := D_u(\mathbf{w}) \cap \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \colon w_1 < \frac{u}{\lambda_1}\right\},$$

а в I_2 по области

$$D_{u,2}(\mathbf{w}) := D_u(\mathbf{w}) \cap \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \colon w_1 > \frac{u}{\lambda_1}\right\}.$$

Как мы увидим, данные интегралы равны и рассматриваются симметричным образом. В интеграле I_1 сделаем замену переменных

$$p_1 = w_1 - \frac{1}{2u}\langle \mathbf{w}, D\mathbf{w}\rangle, \quad p_j = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_j}{u}}w_j, \quad j = 2,\dots,d,$$

т. е.

$$w_1 = \frac{u}{\lambda_1} - \frac{u}{\lambda_1}\sqrt{1 - \frac{2\lambda_1}{u}\left(p_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^d \frac{\lambda_j}{\lambda_1 - \lambda_j}p_j^2\right)} =: \frac{u}{\lambda_1} - \frac{u}{\lambda_1}\sqrt{j_u(\mathbf{p})},$$

$$w_j = \sqrt{\frac{u}{\lambda_1 - \lambda_j}}p_j, \quad j = 2,\dots,d.$$

В этих переменных область

$$D_{u,1}(\mathbf{w}) = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \colon 0 < p_1 < \frac{u}{2\lambda_1}\right\} \cap D_u(\mathbf{p}),$$

где

$$D_u(\mathbf{p}) := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \colon j_u(\mathbf{p}) \geqslant 0\},$$

а якобиан рассматриваемой замены переменных равен

$$|J_u(\mathbf{p})| := \frac{\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{\lambda_1-\lambda_j}}{u^{(d-1)/2}}\sqrt{j_u(\mathbf{p})}.$$

Таким образом,

$$I_1 = \left(\frac{\lambda_1}{u}\right)^{1/2}\frac{1}{\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}}\exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^{u/(2\lambda_1)}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\,\mathrm{d}p_1\int\limits_{D_u(\mathbf{p})}\frac{1}{\sqrt{j_u(\mathbf{p})}}\exp\Bigl(p_1-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{d}p_j^2\Bigr)\times$$
$$\times\mathbf{P}\Bigl(\max_{t\in[0,T]}\Bigl(\chi_{1,u}(t)+\frac{1}{u}\zeta_u(t)\Bigr)>p_1\;\Bigl|\;\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}\Bigr)\,\mathrm{d}p_2\ldots\mathrm{d}p_d, \qquad (13)$$

где теперь

$$\zeta_u(t)=\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\chi}_u(t),D\boldsymbol{\chi}_u(t)\rangle-\bigl(u-u\sqrt{j_u(\mathbf{p})}\bigr)\chi_{1,u}(t)-\sqrt{u}\sum_{j=2}^{d}\frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_j}}p_j\chi_{j,u}(t).$$

Следовательно,

$$\chi_{1,u}(t)+\frac{1}{u}\zeta_u(t)=$$
$$=\sqrt{j_u(\mathbf{p})}\chi_{1,u}(t)+\frac{1}{2u}\langle\boldsymbol{\chi}_u(t),D\boldsymbol{\chi}_u(t)\rangle-\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{j=2}^{d}\frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_j}}p_j\chi_{j,u}(t).$$

Приступим к мажорированию рассматриваемого интеграла. Поскольку $p_1\in\in[0,u/2\lambda_1]$ и в рассматриваемом случае для всех $j=2,\ldots,d$ имеем $\lambda_j<0$, существует положительная константа $c_1>0$, такая что

$$j_u(\mathbf{p})\leqslant 1+\frac{c_1}{u}\sum_{j=2}^{d}p_j^2.$$

Используя неравенство $\sqrt{1+x}\leqslant 1+\sqrt{x}$, верное для всех $x\geqslant 0$, получаем оценку

$$\sqrt{j_u(\mathbf{p})}\leqslant 1+\sqrt{\frac{c_1}{u}}\sum_{j=2}^{d}|p_j|.$$

Имеем

$$\mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,T]}\left(\chi_{1,u}(t)+\frac{1}{u}\zeta_u(t)\right)>p_1\;\middle|\;\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{d}\mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,T]}|\chi_{j,u}(t)|>\sqrt{\frac{p_1u}{2d|\lambda_j|}}\;\middle|\;\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}\right)+$$

$$+\sum_{j=2}^{d}\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,T]}\frac{|p_j|}{\sqrt{u}}|\chi_{j,u}(t)|>\frac{p_1\sqrt{\lambda_1-\lambda_j}}{4(d-1)|\lambda_j|}\;\Big|\;\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}\Big)+$$

$$+\;\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,T]}|\chi_{1,u}(t)|>\frac{p_1}{4}\;\Big|\;\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}\Big)+$$

$$+\sum_{j=2}^{d}\mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,T]}\frac{|p_j|}{\sqrt{u}}|\chi_{1,u}(t)|>\frac{p_1}{4(d-1)\sqrt{c_1}}\;\Big|\;\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}\right)=:$$

$$=:\sum_{j=1}^{d}P_{1,j}+\sum_{j=2}^{d}P_{2,j}+P_3+\sum_{j=2}^{d}P_{4,j}.$$

Принимая во внимание равенство (9), для каждого $i=1,\dots,d$ получаем

$$|E(\chi_{i,u}(t)\mid\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0})|\leqslant\frac{2|c_{i1}|}{\lambda_1}T^{\alpha}+\frac{2}{\sqrt{u}}\sum_{j=2}^{d}\left(\frac{\sqrt{c_1}|c_{i1}|}{\lambda_1}+\frac{|c_{ij}|}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_j}}\right)|p_j|T^{\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant c_2T^{\alpha}\left(1+\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{j=2}^{d}|p_j|\right)=:B(\mathbf{p}).\quad(14)$$

Согласно неравенству (12) условная дисперсия процесса $\chi_{i,u}(t)$ при условии $\{\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}\}$ не превосходит величины G_iT^{α}, где G_i — определённые ранее константы. Учитывая данную оценку, можно применить теорему 8.1 из [10] для оценки подынтегральной вероятности в (13). Для того чтобы применить данную теорему, перейдём к центрированным гауссовским случайным процессам

$$\chi_{i,u}(t)-E(\chi_{i,u}(t)\mid\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}).$$

Для всех действительных x верно $(a-x)^2+x^2\geqslant a^2/2$, т. е. $-(a-x)^2\leqslant x^2-a^2/2$. Принимая во внимание (12) и (14), получаем, используя теорему 8.1 из [10], где несущественные положительные константы заменены на $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$, что

$$P_{1,j}\leqslant\tilde{c}_1T^{\alpha/2}(p_1u)^{1/\alpha-1/2}\exp\left(\tilde{c}_2\sum_{j=2}^{d}\frac{1}{u}p_j^2-\tilde{c}_3up_1\right),\quad j=1,\dots,d,$$

$$P_{2,j}\leqslant\tilde{c}_1T^{\alpha/2}\left(\frac{p_1\sqrt{u}}{|p_j|}\right)^{2/\alpha-1}\exp\left(\tilde{c}_2\sum_{j=2}^{d}\frac{1}{u}p_j^2-\tilde{c}_3u\frac{p_1^2}{p_j^2}\right),\quad j=2,\dots,d,$$

$$P_3\leqslant\tilde{c}_1T^{\alpha/2}p_1^{2/\alpha-1}\exp\left(\tilde{c}_2\sum_{j=2}^{d}\frac{1}{u}p_j^2-\tilde{c}_3p_1^2\right),$$

$$P_{4,j}\leqslant\tilde{c}_1T^{\alpha/2}\left(\frac{p_1\sqrt{u}}{|p_j|}\right)^{2/\alpha-1}\exp\left(\tilde{c}_2\sum_{j=2}^{d}\frac{1}{u}p_j^2-\tilde{c}_3u\frac{p_1^2}{p_j^2}\right),\quad j=2,\dots,d.$$

В тех случаях, когда после центрирования процессов теорема 8.1 из [10] неприменима, мажорированную сходимость искомого интеграла можно доказать, используя верхнюю оценку 1 для данных вероятностей. Ввиду данных оценок и

симметричности подынтегральной функции в (13) достаточно доказать мажорированную сходимость для интегралов, соответствующих вероятностям вида $P_{1,1}$, $P_{2,2}$ и P_3. Сходимость интегралов, соответствующих вероятностям $P_{1,1}$ и P_3 очевидна. Докажем сходимость интеграла, соответствующего вероятности $P_{2,2}$ (обозначим его $I_{2,2}$). Имеем

$$I_{2,2} \leqslant \left(\frac{\lambda_1}{u}\right)^{1/2} \frac{\tilde{c}_1 T^{\alpha/2}}{\prod\limits_{j=2}^{d} \sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}} \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right) \int\limits_0^{u/(2\lambda_1)} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \,\mathrm{d}p_1 \int\limits_{D_u(\mathbf{p})} \mathrm{d}p_2 \ldots \mathrm{d}p_d \times$$

$$\times \left(\frac{p_1\sqrt{u}}{|p_2|}\right)^{2/\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{j_u(\mathbf{p})}} \exp\left(p_1 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{d} p_j^2\right) \exp\left(\tilde{c}_2 \sum_{j=2}^{d} \frac{1}{u} p_j^2 - \tilde{c}_3 u \frac{p_1^2}{p_2^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{u}\right)^{1/2} \frac{\tilde{c}_1 T^{\alpha/2}}{\prod\limits_{j=2}^{d} \sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}} \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right) \int\limits_0^{\frac{u}{2\lambda_1}} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathrm{d}p_1 \int\limits_{D_u(\mathbf{p})} \mathrm{d}p_2 \ldots \mathrm{d}p_d \times$$

$$\times \left(\frac{p_1\sqrt{u}}{|p_2|}\right)^{2/\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{j_u(\mathbf{p})}} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{\tilde{c}_3 u}\, p_1}{|p_2|} - \frac{|p_2|}{2\sqrt{\tilde{c}_3 u}}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{d}\left(1 - \frac{2\tilde{c}_2}{u}\right) p_j^2 + \frac{p_2^2}{4\tilde{c}_3 u}\right).$$

Сделаем замену переменных

$$v_1 = p_2, \quad v_2 = \frac{p_1}{p_2}, \quad v_j = p_j, \quad j = 3, \ldots, d.$$

Якобиан данной замены равен $1/|v_1|$. По виду $j_u(\mathbf{p})$ и поскольку $\lambda_j < 0$, $j = 2, \ldots, d$, в области интегрирования для некоторой положительной константы $\tilde{c}_4$ имеем

$$\sqrt{j_u(\mathbf{p})} \geqslant \sqrt{\frac{\tilde{c}_4}{u}}|p_2| = \sqrt{\frac{\tilde{c}_4}{u}}|v_1|.$$

Отсюда для интеграла получим оценку сверху в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_4}} \left(\frac{\lambda_1}{u}\right)^{1/2} \frac{\tilde{c}_1 T^{\alpha/2}}{\prod\limits_{j=2}^{d} \sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}} u^{1/\alpha} \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}v_1 \ldots \mathrm{d}v_d \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} |v_2|^{2/\alpha-1} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\sqrt{\tilde{c}_3 u}\, v_2 - \frac{v_1}{2\sqrt{\tilde{c}_3 u}}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{d}\left(1 - \frac{2\tilde{c}_2}{u}\right) v_j^2 - \frac{v_1^2}{2} + \frac{\tilde{c}_2 v_1^2}{u} + \frac{v_1^2}{4\tilde{c}_3 u}\right).$$

Наконец, сделаем замену переменных

$$z_1 = v_1, \quad z_2 = \sqrt{\tilde{c}_3 u}\, v_2 - \frac{v_1}{2\sqrt{\tilde{c}_3 u}}, \quad z_j = v_j, \quad j = 3, \ldots, d.$$

Якобиан данной замены равен $\sqrt{\tilde{c}_3 u}$, и в переменных $\mathbf{z}$ верхняя оценка переписывается как

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_3\tilde{c}_4}}\left(\frac{\lambda_1}{u}\right)^{1/2}\frac{\tilde{c}_1 T^{\alpha/2}}{\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}}u^{1/\alpha-1/2}\exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_d\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\times$$

$$\times\left|\frac{z_1}{2\tilde{c}_3 u}+\frac{z_2}{\sqrt{\tilde{c}_3 u}}\right|^{2/\alpha-1}\exp\left(-z_2^2-\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{d}\left(1-\frac{2\tilde{c}_2}{u}\right)z_j^2-\frac{z_1^2}{2}+\frac{\tilde{c}_2 z_1^2}{u}+\frac{z_1^2}{4\tilde{c}_3 u}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_3\tilde{c}_4}}\left(\frac{\lambda_1}{u}\right)^{1/2}\frac{\tilde{c}_1 T^{\alpha/2}}{\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}}\exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_d\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\times$$

$$\times\left|\frac{z_1}{2\tilde{c}_3\sqrt{u}}+\frac{z_2}{\sqrt{\tilde{c}_3}}\right|^{2/\alpha-1}\exp\left(-z_2^2-\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{d}\left(1-\frac{2\tilde{c}_2}{u}\right)z_j^2-\frac{z_1^2}{2}+\frac{\tilde{c}_2 z_1^2}{u}+\frac{z_1^2}{4\tilde{c}_3 u}\right).$$

Для доказательства сходимости интеграла достаточно отметить, что $2/\alpha-1\geqslant 0$, и рассмотреть достаточно большое u, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{2}-\frac{\tilde{c}_2}{u}-\frac{1}{4\tilde{c}_3 u}>\frac{1}{3}.$$

С этого момента можно воспользоваться теоремой о мажорированной сходимости под интегралом. Примем во внимание предыдущие рассуждения относительно предельного распределения случайного процесса $\boldsymbol{\chi}_u(t)$, взятого при условии $\{\boldsymbol{\chi}_u(0)=\mathbf{0}\}$. После замены времени

$$t'=t\left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha},\quad T'=T\left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha}$$

ввиду самоподобности дробно-броуновского движения при $u\to\infty$ предельная вероятность в (13) примет вид

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t'\in[0,T']}\left(\sqrt{2}B_{\alpha/2}(t')-|t'|^{\alpha}\right)>p_1\Big).$$

Наконец, при $u\to\infty$

$$I_1=\left(\frac{\lambda_1}{2\pi u}\right)^{1/2}\frac{1}{\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}}\exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right)\int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}p_1\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}p_2\ldots\mathrm{d}p_d\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}}\exp\left(p_1-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{d}p_j^2\right)\times$$

$$\times\mathbf{P}\Big(\max_{t'\in[0,T']}\left(\sqrt{2}B_{\alpha/2}(t')-|t'|^{\alpha}\right)>p_1\Big)\big(1+o(1)\big)=$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{2\pi u}\right)^{1/2} \frac{1}{\prod\limits_{j=2}^{d} \sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right)\left(H_\alpha\left(\left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha} T\right) - 1\right)\big(1+o(1)\big).$$

С учётом интеграла I_2 получаем, что при $u \to \infty$

$$I = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi u}\right)^{1/2} \frac{2}{\prod\limits_{j=2}^{d} \sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}} \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right)\left(H_\alpha\left(\left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha} T\right) - 1\right)\big(1+o(1)\big) =$$
$$= \frac{2}{\prod\limits_{j=2}^{d} \sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}} \Psi\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right)\left(H_\alpha\left(\left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha} T\right) - 1\right)\big(1+o(1)\big).$$

Вместе с малостью третьего интеграла (который берётся по области $\langle \mathbf{x}, D\mathbf{x}\rangle < 0$), фактически следующей из проведённых оценок для второго интеграла, и асимптотикой первого интеграла в (7) получаем утверждение леммы в случае, когда $\lambda_j < 0$ для всех $j = 2, \dots, d$.

Обратимся ко второму случаю, а именно $\lambda_2 > 0$. Необходимость отдельного рассмотрения данного случая объясняется техническими сложностями при доказательстве мажорированной сходимости интеграла, фигурирующего в первой части доказательства (а именно при оценке снизу множителя $j_u(\mathbf{p})$). Возьмём некоторое $\delta \in (0,1)$, значение которого уточним позднее. Для краткости введём событие

$$A_0 := \Big\{\max_{t\in\Delta_0} \langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u\Big\}.$$

Имеем

$$\mathbf{P}(A_0) = \mathbf{P}\left(A_0, |\xi_1(0)| > \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right) + \mathbf{P}\left(A_0, |\xi_1(0)| \leqslant \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(A_0, |\xi_1(0)| > \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right) + 2\mathbf{P}\left(A_0, \xi_1(0) \in \left[0, \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right]\right) =: P_1 + 2P_2.$$

Наша цель — подобрать соответствующее δ и показать, что основной вклад в асимптотику искомой вероятности вносит вероятность P_1. Для этого рассмотрим отдельно P_2. Для некоторого $\gamma \in (0,1)$, значение которого уточним позднее,

$$P_2 = \mathbf{P}\left(A_0, \xi_1(0) \in \left[0, \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right],\ \max_{t\in\Delta_0} \lambda_1 \xi_1^2(t) > \gamma u\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(A_0, \xi_1(0) \in \left[0, \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right],\ \max_{t\in\Delta_0} \lambda_1 \xi_1^2(t) \leqslant \gamma u\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}\lambda_1\xi_1^2(t)>\gamma u,\ \xi_1(0)\in\left[0,\delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right]\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}\lambda_2\sum_{j=2}^{d}\xi_j^2(t)>u(1-\gamma)\right)=$$
$$=\mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}|\xi_1(t)|>\sqrt{\frac{\gamma u}{\lambda_1}},\ \xi_1(0)\in\left[0,\delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right]\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}\sum_{j=2}^{d}\xi_j^2(t)>\frac{u(1-\gamma)}{\lambda_2}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}\xi_1(t)>\sqrt{\frac{\gamma u}{\lambda_1}},\ \xi_1(0)\in\left[0,\delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right]\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}\sum_{j=2}^{d}\xi_j^2(t)>\frac{u(1-\gamma)}{\lambda_2}\right)=:2P_{2,1}+P_{2,2}.$$

Рассмотрим процесс типа хи-квадрат, фигурирующий в $P_{2,2}$. Оценим данную вероятность сверху, используя теорему 8.1 из [10]. Для этого перепишем данную вероятность в виде

$$P_{2,2}=\mathbf{P}\left(\max_{(t,\mathbf{w})\in\Delta_0\times\mathbb{S}_{d-2}}\sum_{j=2}^{d}\xi_j(t)w_j>\sqrt{\frac{u(1-\gamma)}{\lambda_2}}\right).$$

Введём центрированное гауссовское п. н. непрерывное поле $Y(t,\mathbf{w})$, $(t,\mathbf{w})\in\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}_{d-2}$, определяемое выражением

$$Y(t,\mathbf{w})=\sum_{j=2}^{d}\xi_j(t)w_j.$$

Отметим, что в силу независимости компонент вектора $\boldsymbol{\xi}(t)$ при каждом фиксированном t имеем

$$\max_{(t,\mathbf{w})\in\Delta_0\times\mathbb{S}_{d-2}}EY^2(t,\mathbf{w})=1.$$

Нетрудно проверить, что условие в теореме 8.1 из [10] выполнено, поэтому для некоторых констант $c>0$ и a имеем при всех $u\geqslant u_0$

$$P_{2,2}\leqslant cu^a\exp\left(-\frac{u(1-\gamma)}{2\lambda_2}\right).$$

Выберем такое $\gamma\in(0,1)$, что

$$\frac{1-\gamma}{2\lambda_2}>\frac{1}{2\lambda_1}.$$

Для этого возьмём произвольное $\varepsilon\in(0,1-\lambda_2/\lambda_1)$ (напомним, что $\lambda_1>\lambda_2>0$) и положим

$$\gamma=1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\varepsilon.$$

После такого выбора γ для вероятности $P_{2,2}$ имеем при всех $u \geqslant u_0$

$$P_{2,2} \leqslant cu^a \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon u}{2\lambda_2}\right).$$

Вернёмся к вероятности $P_{2,1}$. По формуле полной вероятности имеем (далее для краткости вместо $\xi_1(t)$ будем писать $\xi(t)$)

$$P_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\delta\sqrt{u/\lambda_1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0} \xi(t) > \sqrt{\frac{\gamma u}{\lambda_1}} \;\Big|\; \xi(0) = x\right) \mathrm{d}x.$$

Сделаем в данном интеграле замену переменных

$$x = \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{u}}\frac{y}{\delta}.$$

После данной замены искомая вероятность примет вид

$$P_{2,1} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\lambda_1}{2\pi u}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\delta^2 u}{2\lambda_1}\right) \int\limits_0^{\delta^2(u/\lambda_1)} \exp\left(y - \frac{\lambda_1}{2\delta^2 u} y^2\right) \times$$
$$\times \mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0} \xi(t) > \sqrt{\frac{\gamma u}{\lambda_1}} \;\Big|\; \xi(0) = \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{u}}\frac{y}{\delta}\right) \mathrm{d}y.$$

Для каждого фиксированного $y \in [0, \delta^2 u/\lambda_1]$ введём семейство гауссовских случайных процессов $\eta_u(t)$ на $t \in [0, T]$ по формуле

$$\eta_u(t) = \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\left(\xi(tu^{-1/\alpha}) - \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right) + y.$$

Имеем

$$\left\{\eta_u(0) \;\Big|\; \xi(0) = \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{u}}\frac{y}{\delta}\right\} \stackrel{d}{=} 0.$$

В терминах $\eta_u(t)$ рассматриваемая вероятность переписывается в виде

$$P_{2,1} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\lambda_1}{2\pi u}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\delta^2 u}{2\lambda_1}\right) \int\limits_0^{\delta^2(u/\lambda_1)} \exp\left(y - \frac{\lambda_1}{2\delta^2 u} y^2\right) \times$$
$$\times \mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,T]} \eta_u(t) > y + \delta(\sqrt{\gamma} - \delta)\frac{u}{\lambda_1} \;\Big|\; \eta_u(0) = 0\Big) \mathrm{d}y.$$

Оценим сверху вероятность под интегралом. Для этого найдём характеристики условного распределения $\{\eta_u(t) \mid \eta_u(0) = 0\}$. Во-первых, для условного математического ожидания имеем

$$E(\eta_u(t) \mid \eta_u(0) = 0) = \bar{r}(tu^{-1/\alpha})\left(y - \delta^2\frac{u}{\lambda_1}\right),$$

где $\bar{r}(t) := 1 - r(t)$, а $r(t)$ — ковариационная функция стационарного гауссовского процесса $\xi(t)$. Для ковариационной функции, удовлетворяющей условию Пикандса

$$r(t) = 1 - c|t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \quad t \to 0, \quad c > 0, \quad \alpha \in (0, 2],$$

при $u \to \infty$ имеем

$$E(\eta_u(t) \mid \eta_u(0) = 0) = -\frac{c\delta^2}{\lambda_1}|t|^\alpha + yo(1),$$

где $o(1)$ не зависит от y и стремится к нулю при $u \to \infty$. Здесь же отметим, что в силу условия $y \in [0, \delta^2 u/\lambda_1]$ и условия Пикандса для всех достаточно больших u имеем

$$\max_{t\in[0,T]} E(\eta_u(t) \mid \eta_u(0) = 0) = 0.$$

В то же время для ковариационной матрицы $\mathrm{var}(\eta_u(t) - \eta_u(s) \mid \eta_u(0) = 0)$ имеем для всех $t, s \in [0, T]$

$$\mathrm{var}(\eta_u(t) - \eta_u(s) \mid \eta_u(0) = 0) = \delta^2 \frac{u}{\lambda_1}\big(2\bar{r}\big((t-s)u^{-1/\alpha}\big) - \big(r(tu^{-1/\alpha}) - r(su^{-1/\alpha})\big)^2\big).$$

Таким образом, при $u \to \infty$

$$\mathrm{var}(\eta_u(t) - \eta_u(s) \mid \eta_u(0) = 0) = \frac{2c\delta^2}{\lambda_1}|t - s|^\alpha + \rho(u, s, t),$$

где $\rho(u, s, t)$ не зависит от y в силу свойств условных гауссовских распределений и стремится к нулю равномерно по $s, t \in [0, T]$ при $u \to \infty$. Кроме этого, для всех $t, s \in [0, T]$ и всех достаточно больших u верна оценка

$$\mathrm{var}(\eta_u(t) - \eta_u(s) \mid \eta_u(0) = 0) \leqslant \frac{4c\delta^2}{\lambda_1}|t - s|^\alpha.$$

Воспользуемся теоремой 8.1 из [10], из которой следует, что для всех достаточно больших u при $\delta < \sqrt{\gamma}$ для некоторой константы $b > 0$ верна оценка

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,T]} \eta_u(t) > y + \delta(\sqrt{\gamma} - \delta)\frac{u}{\lambda_1} \;\Big|\; \eta_u(0) = 0\Big) \leqslant \\
&\quad \leqslant bu^{2/\alpha-1} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{8c\delta^2 T^\alpha}\left(y + \delta(\sqrt{\gamma} - \delta)\frac{u}{\lambda_1}\right)^2\right) \leqslant \\
&\quad \leqslant bu^{2/\alpha-1} \exp\left(-\frac{\lambda_1 y^2}{8c\delta^2 T^\alpha} - \frac{u^2}{8c\lambda_1 T^\alpha}(\sqrt{\gamma} - \delta)^2\right).
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $y \in [0, \delta^2 u/\lambda_1]$. Данное неравенство не только обеспечивает сходимость рассматриваемого интеграла, но и позволяет, взяв $\delta \in (0, 1)$ таким, что $\delta < \sqrt{\gamma}$, доказать, что при $u \to \infty$

$$P_{2,1} = O\left(u^{2/\alpha-3/2} \exp\left(-\frac{\delta^2 u}{2\lambda_1} - \frac{u^2}{8c\lambda_1 T^\alpha}(\sqrt{\gamma} - \delta)^2\right)\right).$$

Обратимся к вероятности P_1, определяемой соотношением

$$P_1 = \mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}\langle\boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u,\ |\xi_1(0)| > \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right) = \mathbf{P}\left(A_0, |\xi_1(0)| > \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right).$$

Покажем, что данная вероятность вносит основной вклад в рассматриваемую асимптотику. Во-первых,

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{P}\left(A_0,\ |\xi_1(0)| > \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle > u\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(A_0,\ |\xi_1(0)| > \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle \in [0,u]\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(A_0,\ |\xi_1(0)| > \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle < 0\right) =: P_{1,1} + P_{1,2} + P_{1,3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим первую из данных вероятностей. Очевидно, данную вероятность можно переписать в виде

$$P_{1,1} = \mathbf{P}\left(\langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle > u\right) - \mathbf{P}\left(|\xi_1(0)| \leqslant \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle > u\right).$$

Асимптотическое поведение первой из данных вероятностей было получено в самом начале доказательства леммы. Для второй вероятности имеем оценку сверху

$$\mathbf{P}\left(|\xi_1(0)| \leqslant \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle > u\right) \leqslant \mathbf{P}\Big(\sum_{j=2}^{d}\xi_j^2(0) > \frac{u(1-\delta^2)}{\lambda_2}\Big).$$

Для случайной величины хи-квадрат с $d-1$ степенями свободы существуют константы $b > 0$ и a, такие что при $u \to \infty$

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{j=2}^{d}\xi_j^2(0) > \frac{u(1-\delta^2)}{\lambda_2}\Big) = bu^a \exp\left(-\frac{u(1-\delta^2)}{2\lambda_2}\right)\big(1+o(1)\big).$$

Принимая во внимание тот факт, что можно взять $\delta \in (0,1)$ таким, что $\delta < \sqrt{\gamma}$ и

$$\frac{1-\delta^2}{2\lambda_2} > \frac{1}{2\lambda_1},$$

получаем, что второй член в $P_{1,1}$ не вносит вклада в основную асимптотику искомой вероятности. Другими словами, при данном выборе $\delta \in (0,1)$ при $u \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(|\xi_1(0)| \leqslant \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle > u\right) = o\big(\mathbf{P}\left(\langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle > u\right)\big).$$

Наконец, обратимся к рассмотрению вероятности $P_{1,2}$, которую можно переписать в виде

$$2\mathbf{P}\left(A_0, \xi_1(0) > \delta\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \langle\boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle \in [0,u]\right).$$

Рассмотрение данной вероятности практически слово в слово повторяет рассмотрение вероятности

$$\mathbf{P}(A_0,\ \langle \boldsymbol{\xi}(0), D\boldsymbol{\xi}(0)\rangle \in [0,u])$$

в первом случае с заменой соответствующих областей интегрирования. В частности, область интегрирования $D_u(\mathbf{w})$ заменяется на область

$$\tilde{D}_u(\mathbf{w}) := D_u(\mathbf{w}) \cap \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \colon w_1 < (1-\delta)\frac{u}{\lambda_1} \right\},$$

а $D_u(\mathbf{p})$ заменяется на область

$$\tilde{D}_u(\mathbf{p}) := D_u(\mathbf{p}) \cap \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \colon j_u(\mathbf{p}) \geqslant \delta^2\}.$$

Последнее ограничение позволяет провести мажорирование интеграла в (13) с использованием того факта, что в области интегрирования

$$\frac{1}{\sqrt{j_u(\mathbf{p})}} \leqslant \frac{1}{\delta}.$$

Аналогично первому случаю из анализа вероятности $P_{1,2}$ следует, что $P_{1,3}$ не вносит вклада в основную асимптотику искомой вероятности. Доказательство леммы во втором случае заканчивается применением теоремы о мажорированной сходимости и небольшими выкладками, проведёнными в конце доказательства леммы для первого случая.

4. Доказательство теоремы

Докажем теорему только для случая $\lambda_1 > 0$, $\lambda_j < 0$ для всех $j = 2, \ldots, d$. В общем случае нам понадобится дискретизация рассматриваемого процесса, которая подробно рассмотрена в [2]. Введём разбиение отрезка $[0,p]$:

$$\Delta_k = [kTu^{-1/\alpha}, (k+1)Tu^{-1/\alpha}], \quad k = 0, \ldots, N_p, \quad N_p = \left[\frac{p}{Tu^{-1/\alpha}}\right].$$

Введём события A_k:

$$A_k := \Big\{ \max_{t\in\Delta_k} \langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u \Big\}.$$

В силу стационарности гауссовского векторного процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$ имеем

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,p]} \langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u \Big) \leqslant (N_p+1)\mathbf{P}(A_0).$$

В то же время по неравенству Бонферрони

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,p]} \langle \boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u \Big) \geqslant N_p\mathbf{P}(A_0) - 2\sum_{k=1}^{N_p}(N_p-k)\mathbf{P}(A_0, A_k). \tag{15}$$

По основной лемме

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{\mathbf{P}\Big(\max\limits_{t\in[0,p]}\langle\boldsymbol{\xi}(t),D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle>u\Big)}{pu^{1/\alpha}\Big(2/\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}\Big)\Psi(\sqrt{u/\lambda_1})}\leqslant\frac{H_\alpha\big((c_{11}/\lambda_1)^{1/\alpha}T\big)}{T}. \tag{16}$$

Оценим вторую сумму, которую обозначим через $\mathbf{S}_2(u,T)$. Если удастся показать, что

$$\limsup_{T\to\infty}\ \limsup_{u\to\infty}u^{1/2-1/\alpha}\exp\left(\frac{u}{2\lambda_1}\right)\mathbf{S}_2(u,T)=0, \tag{17}$$

то теорема следует из (15), (16) и определения H_α.

Перейдём к доказательству (17). Проведём оценку для суммы $\mathbf{S}_2(u,T)$ в три этапа ($\varepsilon>0$ будет выбрано позже):

$$\mathbf{S}_2(u,T)\leqslant N_p\mathbf{P}(A_0,A_1)+N_p\sum_{k=2}^{N_\varepsilon}\mathbf{P}(A_0,A_k)+N_p\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{N_p}\mathbf{P}(A_0,A_k)=:\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3.$$

Обратимся к Σ_1. В соответствии с основной леммой имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_0,A_1)&=2\mathbf{P}(A_0)-\mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,2Tu^{-1/\alpha}]}\langle\boldsymbol{\xi}(t),D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle>u\Big)=\\&=\frac{2}{\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}}\Psi\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right)\times\\&\times\left(2H_\alpha\left(\left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha}T\right)-H_\alpha\left(\left(\frac{c_{11}}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha}2T\right)\right)\big(1+o(1)\big).\end{aligned}$$

Используя определение H_α и данное соотношение, докажем, что

$$\limsup_{T\to\infty}\ \limsup_{u\to\infty}u^{1/2-1/\alpha}\exp\left(\frac{u}{2\lambda_1}\right)\Sigma_1=0.$$

Для интервалов, отделённых друг от друга величиной ε, т. е. для таких Δ_0 и Δ_k, что $T(k-1)u^{-1/\alpha}\geqslant\varepsilon$, используем следующую цепочку соотношений (напомним, что $\lambda_1>0$, $\lambda_j<0$, $j=2,\dots,d$):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_0,A_k)&\leqslant\mathbf{P}\Big(\max_{t\in\Delta_0}\lambda_1\xi_1^2(t)>u,\ \max_{s\in\Delta_k}\lambda_1\xi_1^2(s)>u\Big)\leqslant\\&\leqslant4\mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}\xi_1(t)>\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \max_{s\in\Delta_k}\xi_1(s)>\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right)\leqslant\\&\leqslant4\mathbf{P}\left(\max_{(t,s)\in\Delta_0\times\Delta_k}\xi_1(t)+\xi_1(s)>2\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим гауссовское центрированное п. н. непрерывное поле $\eta(t,s)$ на $S=(t,s)$, $(t,s)\in\Delta_0\times\Delta_k$, определяемое соотношением

$$\eta(t,s):=\xi_1(t)+\xi_1(s).$$

На рассматриваемом множестве справедливо соотношение

$$E\eta^2(t,s) = 2 + 2\langle \mathbf{e}_1, R(t-s)\mathbf{e}_1\rangle.$$

Кроме того,

$$2 + 2\max_S \langle \mathbf{e}_1, R(t-s)\mathbf{e}_1\rangle = 4 - 2\Big(1 - \max_S r_{11}(t-s)\Big).$$

Тогда, поскольку $I_d \pm R(t)$ положительно определены для всех $t > 0$, для некоторого $\delta \in (0,1]$

$$\max_S E\eta^2(t,s) = 4 - 2\Big(1 - \max_S r_{11}(t-s)\Big) \leqslant 4 - 2\delta,$$

где мы использовали тот факт, что $|t-s| \geqslant \varepsilon > 0$ на S. Кроме того, для всех $(t,t') \in \Delta_0 \times \Delta_0$, $(s,s') \in \Delta_k \times \Delta_k$ и всех достаточно больших u

$$\begin{aligned} E\big(\eta(t,s) - \eta(t',s')\big)^2 &\leqslant 2E\big(\xi_1(t) - \xi_1(t')\big)^2 + 2E\big(\xi_1(s) - \xi_1(s')\big)^2 = \\ &= 4\big(1 - r_{11}(t-t')\big) + 4\big(1 - r_{11}(s-s')\big) \leqslant 8c_{11}\left(|t-t'|^\alpha + |s-s'|^\alpha\right). \end{aligned}$$

Используя результат теоремы 8.1 из [10] для гауссовского центрированного п. н. непрерывного поля $\eta(t,s)$, получим оценку: для некоторого действительного a и всех положительных u

$$\Sigma_3 = O\left(u^a \exp\left(-\frac{4u}{2\lambda_1(4-2\delta)}\right)\right) = O\left(u^a \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1(1-\delta/2)}\right)\right).$$

В силу неравенства (18) и того факта, что количество слагаемых в сумме Σ_3 ведёт себя степенным образом по u

$$\limsup_{u\to\infty} u^{1/2-1/\alpha} \exp\left(\frac{u}{2\lambda_1}\right)\Sigma_3 = 0.$$

Наконец, рассмотрим сумму Σ_2. Обратимся к цепочке соотношений (18) и предпоследней вероятности, фигурирующей в данном соотношении. Из условия (4) следует существование такого $\varepsilon > 0$, что для всех $t \in [0,\varepsilon]$

$$I_d - 2|t|^\alpha C \preceq R(t) \preceq I_d - \frac{|t|^\alpha}{2}C,$$

откуда, в частности, получаем, что для всех $t \in [0,\varepsilon]$

$$1 - 2c_{11}|t|^\alpha \leqslant r_{11}(t) \leqslant 1 - \frac{c_{11}}{2}|t|^\alpha.$$

Осталось применить лемму 6.3 из [10], чтобы получить для всех достаточно больших u и некоторой абсолютной константы h оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}\xi_1(t) > \sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \max_{s\in\Delta_k}\xi_1(s) > \sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right) \leqslant \\ \leqslant hT^2\Psi\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right)\exp\left(-\frac{c_{11}}{8\lambda_1}(k-1)^\alpha T^\alpha\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{T\to\infty}\ \limsup_{u\to\infty} u^{1/2-1/\alpha}\exp\left(\frac{u}{2\lambda_1}\right)\Sigma_2 = O\left(\limsup_{T\to\infty} T\exp\left(-\frac{c_{11}}{8\lambda_1}T^{\alpha}\right)\right) = 0.$$

Данное соотношение вместе со следующей цепочкой неравенств завершает доказательство теоремы в случае $\lambda_1 > 0$, $\lambda_j < 0$, $j = 2,\dots,d$ (в данной цепочке неравенств необходимо совершить предельный переход $T\to\infty$):

$$\frac{H_\alpha\big((c_{11}/\lambda_1)^{1/\alpha}T\big)}{T} \geqslant \limsup_{u\to\infty}\frac{\mathbf{P}\Big(\max\limits_{t\in[0,p]}\langle\boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u\Big)}{pu^{1/\alpha}\Big(2/\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}\Big)\Psi(\sqrt{u/\lambda_1})} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{u\to\infty}\frac{\mathbf{P}\Big(\max\limits_{t\in[0,p]}\langle\boldsymbol{\xi}(t), D\boldsymbol{\xi}(t)\rangle > u\Big)}{pu^{1/\alpha}\Big(2/\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}\Big)\Psi(\sqrt{u/\lambda_1})} \geqslant \frac{H_\alpha\big((c_{11}/\lambda_1)^{1/\alpha}T\big)}{T} -$$

$$-\frac{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=2}^{d}\sqrt{1-\lambda_j/\lambda_1}}{p\sqrt{2\lambda_1}}\limsup_{u\to\infty}u^{1/2-1/\alpha}\exp\left(\frac{u}{2\lambda_1}\right)\mathbf{S}_2(u,T).$$

Доказательство теоремы в случае произвольного соотношения собственных значений $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ (в частности, в случае $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$) проводится с помощью метода дискретной аппроксимации, подробно описанной в [2].

Замечание. Отметим, что предположение об отрицательности собственных значений λ_j, $j = 2,\dots,d$, существенно понадобилось только для оценки вероятностей в сумме Σ_2.

Действительно, характер собственных значений λ_i, $i = 2,\dots,d$, не влияет на оценку суммы Σ_1. Вместе с этим для оценки суммы Σ_3 можно использовать следующие неравенства: для интервалов, отделённых друг от друга величиной ε, т. е. для таких Δ_0 и Δ_k, что $T(k-1)u^{-1/\alpha} \geqslant \varepsilon > 0$, используем следующую цепочку соотношений:

$$\mathbf{P}(A_0, A_k) \leqslant \mathbf{P}\left(\max_{t\in\Delta_0}|\boldsymbol{\xi}(t)| > \sqrt{\frac{u}{\lambda_1}},\ \max_{s\in\Delta_k}|\boldsymbol{\xi}(s)| > \sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\max_{(t,s)\in\Delta_0\times\Delta_k,\,(\mathbf{v},\mathbf{w})\in\mathbb{S}_{d-1}\times\mathbb{S}_{d-1}}\langle\boldsymbol{\xi}(t),\mathbf{v}\rangle + \langle\boldsymbol{\xi}(s),\mathbf{w}\rangle > 2\sqrt{\frac{u}{\lambda_1}}\right). \quad (19)$$

Рассмотрим гауссовское центрированное п. н. непрерывное поле $\eta(t,s,\mathbf{v},\mathbf{w})$ на $S = (t,s,\mathbf{v},\mathbf{w})$, $(t,s)\in\Delta_0\times\Delta_k$, $(\mathbf{v},\mathbf{w})\in\mathbb{S}_{d-1}\times\mathbb{S}_{d-1}$, определяемое соотношением

$$\eta(t,s,\mathbf{v},\mathbf{w}) := \langle\boldsymbol{\xi}(t),\mathbf{v}\rangle + \langle\boldsymbol{\xi}(s),\mathbf{w}\rangle,$$

На рассматриваемом множестве справедливо соотношение

$$E\eta^2(t,s,\mathbf{v},\mathbf{w}) = 2 + 2\langle\mathbf{v}, R(t-s)\mathbf{w}\rangle.$$

Кроме того,

$$2 + 2\max_S \langle \mathbf{v}, R(t-s)\mathbf{w}\rangle \leqslant 2 + 2\max_S |R(t-s)\mathbf{w}|.$$

Симметричная вещественная матрица $R(t-s)$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_d$, соответствующих собственным значениям $\kappa_1, \ldots, \kappa_d$ (быть может, некоторые из данных собственных значений равны). Представим любой вектор $\mathbf{w} \in \mathbb{S}_{d-1}$ в виде

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{l}_1 + \ldots + w_d\mathbf{l}_d.$$

Тогда в силу ортонормированности базиса и того факта, что $I_d \pm R(t)$ положительно определены для всех $t > 0$, для некоторого $\delta \in (0, 1]$

$$2 + 2\max_S |R(t-s)\mathbf{w}| = 2 + 2\max_{i=1,\ldots,d} |\kappa_i| = 4 - 2\Big(1 - \max_{i=1,\ldots,d} |\kappa_i|\Big) \leqslant 4 - 2\delta,$$

где мы использовали тот факт, что $|t-s| \geqslant \varepsilon > 0$ на S. Оценим дисперсию данного поля на S:

$$E\big(\eta(t,s,\mathbf{v},\mathbf{w}) - \eta(t',s',\mathbf{v}',\mathbf{w}')\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2E(\langle \boldsymbol{\xi}(t), \mathbf{v}\rangle - \langle \boldsymbol{\xi}(t'), \mathbf{v}'\rangle)^2 + 2E(\langle \boldsymbol{\xi}(s), \mathbf{w}\rangle - \langle \boldsymbol{\xi}(s'), \mathbf{w}'\rangle)^2.$$

Оценка обоих слагаемых проводится схожим образом, поэтому отдельно рассмотрим первое слагаемое:

$$E(\langle \boldsymbol{\xi}(t), \mathbf{v}\rangle - \langle \boldsymbol{\xi}(t'), \mathbf{v}'\rangle)^2 = E\bigg(\sum_{i=1}^d (\xi_i(t)v_i - \xi_i(t')v_i')\bigg)^2 \leqslant$$
$$\leqslant d\sum_{i=1}^d E(\xi_i(t)v_i - \xi_i(t')v_i')^2 = d\sum_{i=1}^d \big(v_i^2 + (v_i')^2 - 2v_iv_i'r_{ii}(t-t')\big) =$$
$$= d\sum_{i=1}^d \Big((v_i - v_i')^2 + 2v_iv_i'\big(1 - r_{ii}(t-t')\big)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant d|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 + 2d\max_{i=1,\ldots,d}\big(1 - r_{ii}(t-t')\big) \leqslant d|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 + 4d\Big(\max_{i=1,\ldots,d} c_{ii}\Big)|t-t'|^\alpha.$$

Используя результат предложения 8.1 в [10] для гауссовского центрированного п. н. непрерывного поля $\eta(t,s,\mathbf{v},\mathbf{w})$, получим оценку: для некоторого действительного a и всех положительных u

$$\Sigma_3 = O\left(u^a \exp\left(-\frac{4u}{2\lambda_1(4-2\delta)}\right)\right) = O\left(u^a \exp\left(-\frac{u}{2\lambda_1(1-\delta/2)}\right)\right).$$

В силу неравенства (19) и того факта, что количество слагаемых в сумме Σ_3 ведёт себя степенным образом по u

$$\limsup_{u\to\infty} u^{1/2-1/\alpha} \exp\left(\frac{u}{2\lambda_1}\right)\Sigma_3 = 0.$$

Автор выражает признательность В. И. Питербаргу за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

[1] Жданов А. И. Вероятности высоких выбросов траекторий произведения гауссовских стационарных процессов // Теория вероятн. и её примен. — 2015. — Т. 60, № 3. — С. 605—613.

[2] Жданов А. И., Питербарг В. И. Большие выбросы процессов гауссовского хаоса. Аппроксимация в дискретном времени // Теория вероятн. и её примен. — 2018. — Т. 63, № 1. — С. 3—28.

[3] Коршунов Д. А., Питербарг В. И., Хашорва Э. Об экстремальных значениях гауссовского хаоса // Докл. Акад. наук. — 2013. — Т. 452, № 5. — С. 483—485.

[4] Коршунов Д. А., Питербарг В. И., Хашорва Е. Об асимптотическом методе Лапласа и его применении к случайному хаосу // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 6. — С. 868—883.

[5] Питербарг В. И., Стаматович С. Предельная теорема для a-выходов траекторий χ^2-процесса за высокий уровень // Теория вероятн. и её примен. — 2003. — Т. 48, № 4. — С. 811—818.

[6] Albin P., Hashorva E., Ji L., Ling C. Extremes and Limit Theorems for Difference of Chi-Type Processes. — 2015. — `arXiv:1508.02758[math.PR]`.

[7] Hashorva E., Korshunov D., Piterbarg V. I. Asymptotic expansion of Gaussian chaos via probabilistic approach // Extremes. — 2015. — Vol. 18, no. 3. — P. 315—347.

[8] Piterbarg V. High deviations for multidimensional stationary Gaussian process with independent components // Stability Problems for Stochastic Models. — VSP, 1994. — P. 197—230.

[9] Piterbarg V. I. High excursions for nonstationary generalized chi-square processes // Stoch. Process Appl. — 1994. — Vol. 51. — P. 307—337.

[10] Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields. — Providence: Amer. Math. Soc., 1996. — (Transl. Math. Monogr.; Vol. 148).

[11] Piterbarg V. I. High extrema of Gaussian chaos processes // Extremes. — 2016. — Vol. 19, no. 2. — P. 253—272.

[12] Piterbarg V. I., Zhdanov A. On probability of high extremes for product of two independent Gaussian stationary processes // Extremes. — 2015. — Vol. 18, no. 1. — P. 99—108.