Вероятность высокого максимума траектории гауссовского нестационарного процесса

С. Г. КОБЕЛЬКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: sergeyko81@gmail.com

В. И. ПИТЕРБАРГ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Институт системных исследований «НИИСИ РАН»
e-mail: piter@mech.math.msu.su

И. В. РОДИОНОВ
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
e-mail: vecsell@gmail.com

Э. ХАШОРВА
Университет Лозанны, Швейцария
e-mail: Enkelejd.Hashorva@unil.ch

УДК 519.218

Ключевые слова: нестационарные процессы, гауссовские процессы, максимум, метод Пикандса, метод двойных сумм.

Аннотация

Рассматриваются гауссовские процессы, дисперсия которых достигает своего абсолютного максимума в единственной точке. В максимально общих условиях применимости метода двойных сумм найдена асимптотика вероятности высокого выброса траектории процесса такого вида.

Abstract

S. G. Kobelkov, V. I. Piterbarg, I. V. Rodionov, E. Hashorva, On the maximum of a Gaussian process with unique maximum point of its variance, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 161—174.

Gaussian random processes whose variances reach their maximum values at unique points are considered. Exact asymptotic behavior of probabilities of large absolute maximums of their trajectories have been evaluated using the double sum method under the widest possible conditions.

1. Введение

Цель настоящей заметки — обобщить результат работы [3], используя при этом тот же метод двойных сумм, но в максимально возможной общности.

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 161—174.

Метод двойных сумм предложен Дж. Пикандсом [8] для вычисления вероятности высокого выброса гауссовского стационарного процесса. В [1] этот метод несколько обобщён, при этом исправлена ошибка автора работы [8]. Далее этот метод был также обобщён на случай гауссовских однородных и неоднородных полей [9], при этом, как и в работе Пикандса, предполагается степенное поведение ковариационной функции в нуле, а в случае неоднородного поля также степенное поведение функции дисперсии в точке её максимума. Однако в то время как степенное или почти степенное (правильное изменение) поведение ковариации представляется существенным для метода двойных сумм, требование в [3,9] степенного поведения дисперсии выглядит достаточно искуственным, не присущим методу двойных сумм. В настоящей заметке мы отказываемся от этого требования, а также показываем необходимость правильного изменения функции ковариации для применения метода двойных сумм. Упомянем ещё недавнюю работу [6], где показано, что поведение дисперсии может быть не обязательно степенным, но всё же правильное её изменение требуется.

Пусть $X(t)$, $t \in [-S,S]$, — п. н. непрерывный гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(s,t)$, обозначим $\sigma^2(t) = r(t,t)$. Мы изучаем асимптотическое поведение при $u \to \infty$ вероятности

$$P([-S,S];u) := P\Big(\max_{t\in[-S,S]} X(t) > u\Big). \tag{1}$$

Мы предполагаем, что единственной точкой абсолютного максимума функции $\sigma(t)$ является ноль и значение максимума равно единице, имея в виду, что всегда можно сдвинуть время и изменить масштаб. Введём следующие условия.

A1. Случайный процесс X п. н. непрерывен.

Это условие, в частности, выполнено (существует п. н. непрерывная версия процесса), если выполнено среднеквадратическое условие Гёльдера, т. е. для некоторых положительных констант Γ и γ имеет место соотношение

$$E\big(X(t) - X(s)\big)^2 \leqslant \Gamma|t-s|^\gamma, \quad s,t \in [-S,S]. \tag{2}$$

В настоящей работе условия (2), в отличие от работы [3] (см. также [2, 9]), не предполагается.

A2. Функция $\sigma(t)$ достигает своего абсолютного максимума на отрезке $[-S,S]$ в точке 0 и только в ней, при этом $\sigma(0) = 1$. Кроме того, существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{t\downarrow 0,\ s\downarrow 0} \frac{1-\sigma^2(t)}{1-r(s,t)} \in [0,\infty] \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow 0,\ s\uparrow 0} \frac{1-\sigma^2(t)}{1-r(s,t)} \in [0,\infty]. \tag{3}$$

Если хотя бы один из этих пределов равен 0, то дополнительно предположим, что существуют такие $c > 0$ и $K < \infty$, что для всех $x \in [0,c]$ уравнение $1-\sigma^2(t) = x$ имеет не более чем K корней.

Заметим, что из условия A2 следует неравенство $r(s,t) \leqslant 1$ для всех $s,t \in \in [-S,S]$, причём равенство имеет место только в случае $s=t=0$.

Обозначим через $\rho(s,t):=r(s,t)/\sigma(s)\sigma(t)$ корреляционную функцию процесса X.

A3 (локальная стационарность в точке 0). Существует ковариационная функция $\rho(t)$ стационарного процесса, такая что

$$\lim_{s,t\to 0} \frac{1-\rho(s,t)}{1-\rho(t-s)} = 1.$$

A4. Для функции ρ из условия A3 найдутся положительная функция $q(u)$ и функция $h(t)$, $h(t)>0$, такие что для всех $t \neq 0$ существует предел

$$\lim_{u\to\infty} u^2\bigl(1-\rho(q(u)t)\bigr) = h(t), \tag{4}$$

причём для некоторого $\varepsilon > 0$ это соотношение выполнено равномерно в $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Заметим, что, поскольку $\rho(0) = 1$ и в силу A3 функция ρ непрерывна, $q(u) \to 0$ при $u \to \infty$, поэтому соотношение (4) выполняется равномерно в любом компактном множестве. Кроме того, из соотношения (4) также следует, что для любых положительных s, t выполнено

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1-\rho(q(u)t)}{1-\rho(q(u)s)} = \frac{h(t)}{h(s)}. \tag{5}$$

Отсюда по определению правильно меняющейся функции следует, что функция $1-\rho(t)$ правильно меняется в нуле (определения и результаты о правильно меняющихся функциях можно найти в [5]). Соответствующий индекс правильного изменения (обозначим его через α) положителен, кроме того, $h(t) = t^{\alpha}$. Действительно, если $\alpha < 0$, функция $\rho(t)$ разрывна в нуле, если $\alpha = 0$, то $h(t) = 1$ для всех $t > 0$ и $h(t) = 0$ при $t = 0$, т. е. эта функция тоже разрывна. Далее, если $\alpha > 2$, то из условий A3 и A4 следует, что $\rho''(t) \equiv 0$, а это противоречит условию положительной определённости функции ρ. Следовательно, $\alpha \in (0,2]$. Добавим также, что если $\alpha = 2$, но всё же $t^{-2}\bigl(1-\rho(t)\bigr) \to 0$, это же утверждение имеет место. Итак, условие A4 эквивалентно соответствующему условию из [1], поэтому невыполнение этого условия является критическим для метода двойных сумм. Имеем, что

$$\text{функция } 1-\rho(t) \text{ правильно меняется в нуле с индексом } \alpha \in (0,2]. \tag{6}$$

Итак, поскольку $1-\rho(t) = \ell(t)t^{\alpha}$, где $\ell(t)$ — медленно меняющаяся функция в нуле, то

$$q(u) = (1-\rho)^{\leftarrow}(u^{-2}),$$

где верхний индекс $\leftarrow$ обозначает обобщённую обратную функцию. Применяя теоремы 1.5.12, 1.5.13 (лемма де Бруина) и утверждение 1.5.15 из [5], получаем, что

$$q(u) \sim u^{-2/\alpha}\ell^{\#}(u^{-2})^{1/\alpha} \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{7}$$

Знак $\sim$ обозначает асимптотическую эквивалентность, а через $\ell^{\#}$ обозначена сопряжённая по де Бруину функция к ℓ. В силу (5) соотношение (4) имеет место для всех q', таких что $\lim\limits_{u\to\infty} q(u)/q'(u) = 1$. Следовательно, поскольку q правильно меняется на бесконечности, без ограничения общности далее можно считать, что функция q монотонна.

Заметим, что в силу теоремы Боянича—Сенеты медленно меняющуюся функцию $\ell^{\#}$ часто можно выразить в явном виде [5, теорема 2.3.3 и следствие 2.3.4]. Например, если

$$\frac{\ell\bigl(u^{-2}\ell(u^{-2})\bigr)}{\ell(u^{-2})} \to 1 \quad \text{при} \quad u \to \infty,$$

то $\ell^{\#} \sim 1/\ell$.

В разделе 2 мы повторяем результаты для стационарного процесса из [1], используя предложенные в работе понятия и обозначения. В разделе 3 доказан основной результат заметки, его формулировка дана в подразделе 3.3. В коротком разделе 4 приведены два примера, демонстрирующие общность полученных в работе результатов.

2. Стационарные процессы

В этом разделе предполагается, что $X(t)$, $t \in [0, S]$, — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией ρ, определённой в предыдущем разделе. Здесь мы формулируем результаты статьи [1] с некоторыми очевидными более поздними обобщениями.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A4. *Тогда для любого* $T > 0$ *имеет место соотношение*

$$P([0, q(u)T]; u) = \bigl(1 + \gamma(u)\bigr) H_\alpha(T)\Psi(u),$$

где $\gamma(u) \to 0$ *при* $u \to \infty$, *число* $\alpha \in (0, 2]$ *определено в* (6), *учитываются замечания, приведённые после условия* A4. *Далее,*

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_u^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx, \quad H_\alpha(T) = \mathbf{E}\exp\Bigl(\max_{[0,T]} \chi(t)\Bigr),$$

где $\chi(t)$ — *гауссовский процесс с непрерывными траекториями,* $\chi(0) = 0$, *его дисперсия приращений и среднее равны соответственно*

$$\operatorname{var}\bigl(\chi(t) - \chi(s)\bigr) = 2h(|t - s|), \quad E\chi(t) = -h(t).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Пусть, кроме того,* $\rho(t) < 1$ *для всех* $t > 0$. *Тогда для любого множества* $E \subset \mathbb{R}$, *являющегося замыканием открытого, имеет место соотношение*

$$P(E; u) = \operatorname{mes}(E)\mathcal{H}_\alpha \frac{\Psi(u)}{q(u)}\bigl(1 + o(1)\bigr), \quad u \to \infty,$$

где

$$\mathcal{H}_\alpha = \lim_{T\to\infty} T^{-1} H_\alpha(T) \in (0,\infty).$$

Это предельное соотношение имеет место, даже если множество E *зависит от* u, $E = E(u)$, *а именно если существуют отрезки* $E^-(u), E^+(u) \subset \mathbb{R}$, *такие что* $E^-(u) \subset E \subset E^+(u)$, *при этом* $\lim_{u\to\infty} \operatorname{mes}\bigl(E^-(u)\bigr)/q(u) = \infty$ *и для некоторого* $\delta \in (0,1/2)$ *выполнено соотношение* $\operatorname{mes}\bigl(E^+(u)\bigr)e^{-\delta u^2} \to 0$ *при* $u \to \infty$.

3. Гауссовские процессы с единственной точкой максимума дисперсии

В этом разделе рассматривается гауссовский нестационарный процесс $X(t)$, $t \in [-S,S]$, с нулевым средним, удовлетворяющий условиям A1—A4. Из A2 и A4 следует, что существует предел

$$\lim_{u\to\infty} u^2\bigl(1 - \sigma^2(q(u)t)\bigr) = h_1(t) \in [0,\infty]. \tag{8}$$

Отметим, что предельные соотношения в A2 могут быть получены из соотношения (8). Предел $h_1(t)$ может быть равен нулю, он может также быть положителен и конечен, наконец, он может равняться бесконечности. Эти утверждения не меняются при замене t на другое с тем же знаком. т. е. из той же полупрямой. Если этот предел равен нулю для всех t, то скажем, что это *почти стационарный случай*, ниже будет объяснено почему. Если предел равен бесконечности, то будем говорить о *случае Талаграна*, в этом случае

$$P([-S,S];u) \sim P(X(0) > u), \quad u \to \infty.$$

Доказательство приведено ниже. М. Талагран доказал это соотношение для общих гауссовских случайных функций в максимально общих условиях (см. список литературы и обсуждения в [9]). Наконец, скажем, что имеет место *переходный случай*, если предел $h_1(t)$ положителен и конечен. Поскольку мы не предполагаем чётности функции σ, то, рассматривая левый и правый пределы в (8), мы можем получить комбинации описанных выше случаев, например $h_1(t) = \infty$ для всех $t \in [-S,0)$ и $h_1(t) \in (0,\infty)$ для всех $t \in (0,S]$. В последнем случае, пользуясь рассуждениями, приведёнными для $1 - \rho(q(u)t)$, получаем, что для некоторого $\beta \geqslant 0$ функция $1 - \sigma^2(t)$, $t > 0$, правильно меняется в нуле и, кроме того, $h_1(t) = h_1(1)t^\beta$. Поскольку

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u^2\bigl(1 - \sigma^2(q(u)t)\bigr)}{u^2\bigl(1 - \rho(q(u)t)\bigr)} = \frac{h_1(t)}{h(t)},$$

то можно заключить, что $\alpha = \beta$ и, более того, функции $1 - \sigma^2(t)$ и $1 - \rho(t)$ обязаны быть эквивалентными с точностью до положительной константы, т. е.

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - \sigma^2(t)}{1 - \rho(t)} = \frac{h_1(1)}{h(1)} > 0.$$

Сформулируем теперь два вспомогательных утверждения, верных для всех описанных выше типов поведения функции $\sigma(t)$. Первое из них — это стандартная локальная лемма метода двойных сумм, обобщение леммы 1 (см. также [2, 9]).

Лемма 2. *При выполнении условий* A1—A4 *для произвольного* $T > 0$ *имеют место соотношения*

$$P([0, q(u)T]; u) = P_\alpha^+(T)\Psi(u)\big(1 + o(1)\big)$$

и

$$P([-q(u)T, q(u)T]; u) = P_\alpha(T)\Psi(u)\big(1 + o(1)\big) \quad \textit{при} \quad u \to \infty,$$

где

$$P_\alpha^+(T) = E \max_{t\in[0,T]} e^{\chi_1(t)}, \quad P_\alpha(T) = E \max_{t\in[-T,T]} e^{\chi_1(t)}.$$

Здесь $\chi_1(t) = \chi(t) - h_1(t)$, *если* $h_1(t) < \infty$, *и* $\chi_1(t) = 0$, *если* $h_1(t) = \infty$.

Доказательство этой леммы представляет собой достаточно простое повторение доказательства леммы 6.1 из [9] с использованием условий A1—A4 и соотношения (8). Случай $h_1(t) = \infty$, случай Талаграна, рассматривается аналогично. Заметим только, что в этом случае необходимо отдельно доказывать слабую сходимость в $C([-T, T])$ условного процесса

$$\chi_u(t) = u(X(q(u)t) - u) + w$$

при условии $X(0) = u - w/u$, сузив пространство непрерывных функций до $C([-T, 0])$, если $t > 0$, или до $C([0, T])$, если $t < 0$. Нетрудно показать, что в этих случаях при условии $X(0) = u - w/u$ имеет место соотношение

$$\max_{t\in[-T,T]} \chi_u(t) \to \max_{t\in[-T,0]} \big(\chi(t) - h_1(t)\big) \quad \text{при} \quad u \to \infty$$

в топологии слабой сходимости (при $t > 0$). Аналогично и для случая $t < 0$. Если $h_1(t) = \infty$ для всех t, этот слабый предел равен 0.

Второй результат позволяет выделять информативный временной интервал, зависящий от u, на котором сосредоточена искомая асимптотика. Рассмотрим множество

$$B_u = \{t\colon 1 - \sigma^2(t) \leqslant u^{-2}\log^A u\}, \quad A > 1. \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть* X — *гауссовский процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условиям* A1—A4. *Тогда для любого множества* E, *являющегося замыканием открытого и содержащего ноль, и для любого* $B \in (1, A)$ *выполнено соотношение*

$$P(E; u) = P(E \cap B_u; u)\big(1 + O(e^{-\log^B u})\big) \quad \textit{при} \quad u \to \infty.$$

Доказательство. Так как траектории процесса X п. н. непрерывны, то в силу неравенства Бореля—Судакова—Цирельсона (см., например, [9]), поскольку

$\sigma(0)=1$ является единственным абсолютным максимумом непрерывной на отрезке $[-S,S]$ функции σ, для некоторых $a>1/2$, $b>0$ и всех положительных u, ε имеет место неравенство

$$P(E\setminus[-\varepsilon,\varepsilon];u)\leqslant b\exp(-au^2).$$

По условиям A3 и A4 для стандартизированного процесса $\bar X(t)=X(t)/\sigma(t)$, $t\in[-S,S]$, получаем, что для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ (таких, чтобы, кроме всего прочего, выполнялось $\sigma(t)>0$, $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$) и для всех $s,t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ и некоторых положительных c_0, γ имеет место оценка

$$\mathbf{E}\big(\bar X(s)-\bar X(t)\big)^2=2\big(1-\rho(s,t)\big)\leqslant c_0|t-s|^\gamma.$$

Применяя теперь теорему 8.1 из [9] к процессу $\bar X$, по определению множества B_u имеем, что для некоторых положительных c_i, C_i, $i=1,2$, выполнено

$$P\Big(\sup_{t\in E\cap[-\varepsilon,\varepsilon]\setminus B_u}\bar X(t)\sigma(t)>u\Big)\leqslant P\left(\sup_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]}\bar X(t)>\frac{u}{\sqrt{1-u^{-2}\log^A u}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_1u^{c_1}\exp\left(-\frac{u^2}{2-2u^{-2}\log^A u}\right)\leqslant C_2u^{c_1}\exp(-c_2\log^A u)\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

Поскольку $0\in E$, получаем, что $P(E;u)\geqslant P(X(0)>u)=\Psi(u)$ для всех $u>0$, таким образом, утверждение леммы выполнено для всех $B\in(1,A)$. $\square$

3.1. Почти стационарный случай

Сначала рассмотрим почти стационарный случай, обобщающий случай $\beta>\alpha$ в обозначениях [2,3,9]. Для $t\in[-S,S]$ обозначим

$$f(t)=\frac{1}{2}\big(1-\sigma^2(t)\big),$$

а также

$$L_+(\lambda):=\int\limits_0^\delta e^{-\lambda f(t)}\,dt,\quad L_-(\lambda):=\int\limits_{-\delta}^0 e^{-\lambda f(t)}\,dt,\quad \lambda>0.$$

Заметим, что в силу условий на $\sigma(t)$ поведение этих интегралов при $\lambda\to\infty$ не зависит от выбора $\delta>0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Если* $h_1(t)=0$, $t\in[-S,S]$, *то*

$$P([0,S],u)=H_\alpha L_+(u^2)\,q^{-1}(u)\Psi(u)\big(1+o(1)\big) \tag{10}$$

и

$$P([-S,S],u)=H_\alpha\big(L_+(u^2)+L_-(u^2)\big)q^{-1}(u)\Psi(u)\big(1+o(1)\big)\quad \textit{при}\quad u\to\infty. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала упрощённую модель процесса X, потом, используя стандартные неравенства, в первую очередь неравенство Слепяна, распространим полученный результат на общие процессы X, это довольно стандартный приём (см. [9]). Пусть $X_0(t)$, $t \in [-S, S]$, — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Упрощённая модель имеет следующий вид:

$$X(t) = X_0(t)\sigma(t), \quad t \in [-S, S],$$

очевидно, $X(t)$ удовлетворяет условиям A1—A4. Повторим, что сейчас рассматривается случай

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\sigma^2(t)}{1-\rho(t)} = 0, \tag{12}$$

где предел по t является двусторонним. Выберем малые ε_+ и ε_-, такие что $\varepsilon_+ > \varepsilon_- > 0$. Для достаточно большого u_0 и всех $u \geqslant u_0$ можно выбрать такое $\varepsilon = \varepsilon(u) \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, что $(\log^A u)/\varepsilon \in \mathbb{N}$. Мы используем такой выбор ε ниже. Обозначим

$$\begin{aligned} B_k^+(u) &= \bigl\{t \geqslant 0\colon k\varepsilon \leqslant u^2\bigl(1-\sigma^2(t)\bigr) < (k+1)\varepsilon\bigr\}, \\ B_k^-(u) &= \bigl\{t < 0\colon k\varepsilon \leqslant u^2\bigl(1-\sigma^2(t)\bigr) < (k+1)\varepsilon\bigr\}. \end{aligned} \tag{13}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать множества $B_k(u) = B_k^+(u)$, анализ множеств $B_k^-(u)$ проводится аналогично. Поскольку $q(u)$ — регулярно меняющаяся функция с индексом $-2/\alpha$, то из (12) и (13) следует, что

$$\zeta(u) := \frac{|B_1(u)|}{q(u)} \to \infty \quad \text{при} \quad u \to \infty, \tag{14}$$

где $|\cdot|$ обозначает длину. Заметим, что множества индексов

$$\mathcal{K} = \{k\colon B_k(u) \cap B_u \neq \varnothing\}, \quad \mathcal{K}^- = \{k\colon B_k(u) \subset B_u\}$$

совпадают для выбранного выше ε. Определим

$$\sigma_k = \sqrt{1 - u^{-2}k\varepsilon}, \quad u_k = \frac{u}{\sigma_k}.$$

Введём для всех $k \in \mathcal{K}$ события

$$A_k(u) = \Bigl\{\max_{t\in B_k(u)} X_0(t) > u_k\Bigr\}, \quad A_k'(u) = \Bigl\{\max_{t\in B_k(u)} X_0(t) > u_{k+1}\Bigr\}.$$

Выберем $a \in (0,1)$ и обозначим $\upsilon(u) = q(u)\zeta^a(u)$. Заметим, что $\upsilon(u)/q(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Определим два множества индексов

$$D(u) = \{k\colon |B_k(u)| > \upsilon(u)\}, \quad D'(u) = \{k\colon |B_k(u)| \leqslant \upsilon(u)\}$$

соответствующих «длинным» и «коротким» временны́м интервалам. Как и в [10], нетрудно показать, что сумма вероятностей множеств $A_k(u)$ по $k \in D'(u)$ пренебрежимо мала по сравнению с суммой вероятностей $A_k(u)$ по $k \in D(u)$. Заметим, что

$$u \leqslant u_k \leqslant u + u^{-1}\log^A u, \quad k \in \mathcal{K}.$$

Из условия E2 вытекает, что для всех достаточно больших u каждое множество $B_k(u)$, $k \geqslant 0$, состоит из конечного (не более чем K) числа интервалов. Тем самым найдутся подынтервалы $B_k'(u)$ множеств $B_k(u)$, $k \in D(u)$, такие что $|B_k'(u)|/q(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Следовательно, для всех $k \in D(u)$ множества $B_k(u)$ и гауссовские процессы $X_0(t)$, $t \in B_k(u)$, удовлетворяют условиям теоремы 1. Поэтому имеем, что

$$P(A_k) = \big(1+\gamma(u_k)\big) H_\alpha |B_k(u)| q^{-1}(u_k) \Psi(u_k)$$

и

$$P(A_k') = \big(1+\gamma(u_{k+1})\big) H_\alpha |B_k(u)| q^{-1}(u_{k+1}) \Psi(u_{k+1}),$$

где $\gamma(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Из леммы 1 вытекает, что для всех $k \in D'(u)$ выполнено

$$P(A_k) \leqslant C |B_k(u)| q^{-1}(u_k) \Psi(u_k),$$

где C — некоторая положительная константа, не зависящая от k. С другой стороны, из неравенства Бонферрони следует, что

$$P(B_u; u) \leqslant \sum_{k \in \mathcal{K}} P\big(A_k(u)\big) \tag{15}$$

и

$$P(B_u; u) \geqslant \sum_{k \in \mathcal{K}} P\big(A_k'(u)\big) - \sum_{k,l \in \mathcal{K},\, k \neq l} P\big(A_k(u) A_l(u)\big). \tag{16}$$

Доказательства асимптотической эквивалентности сумм

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} P\big(A_k(u)\big), \quad \sum_{k \in \mathcal{K}} P\big(A_k'(u)\big)$$

при $u \to \infty$ и соотношения

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} P\big(A_k(u)\big) = H_\alpha L_+(u^2)\, q^{-1}(u) \Psi(u) \big(1 + o(1)\big)$$

проводятся аналогично соответствующим рассуждениям в [10] и здесь не приводятся. Оценивание же двойной суммы весьма похоже на такое же оценивание в [2, 9], она является бесконечно малой по отношению к простым, поэтому подробного доказательства мы также не приводим.

Применяя упомянутые выше стандартные приёмы перехода от упрощённой модели $X(t) = X_0(t)\sigma(t)$ к общей, получаем утверждение теоремы. □

3.1.1. Замечания о представлениях и свойствах функции $L_\pm(\lambda)$

Введём монотонные перестановки $f_+(t)$ и $f_-(t)$ функций $f(t)$, $t \in [0, S]$, и $f(t)$, $t \in [-S, 0]$, соответственно, определяемые как обобщённые обратные функции

$$f_\pm = F_\pm^{\leftarrow},$$

где

$$F_+(x) = \operatorname{mes}\{x \colon f(t) \leqslant x,\ t \in [0, S]\}, \quad x \in [0, 1],$$

и

$$F_-(x) = \mathrm{mes}\{x\colon f(t) \leqslant x,\ t \in [-S,0]\}, \quad x \in [0,1], \text{ —}$$

функции распределения соответствующих мер времён пребывания (см., например, [7]).

Важным свойством монотонной перестановки является то, что для любой монотонной функции ϕ выполнено соотношение

$$\int_0^S \phi\bigl(f(t)\bigr)\,dt = \int_0^S \phi\bigl(f_+(t)\bigr)\,dt, \tag{17}$$

аналогично для f_-.

Замечание 1. Если $\sigma(t)$ локально монотонна в нуле (монотонна в окрестности нуля) слева и справа, то для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем, что $f_-(t) = f(t)$, $t \in [-\varepsilon, 0]$, и $f_+(t) = f(t)$, $t \in [0,\varepsilon]$, т. е. для $x \in [0,1]$ выполнено $F_\pm(x) = f^{\leftarrow}(x)$.

Из леммы 3 следует, что функции распределения $F_+(x)$ и $F_-(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, могут быть определены вне интервала $[0, u^{-2}\log^A u]$ произвольно (см. (9)), при этом асимптотическое поведение вероятности $P([-S,S];u)$ не изменится. Заметим, что в этих обозначениях

$$L_+(\lambda) = \bigl(1+o(1)\bigr)\int_0^1 e^{-\lambda x}dF_+(x), \quad L_-(\lambda) = \bigl(1+o(1)\bigr)\int_0^1 e^{-\lambda x}dF_-(x), \quad \lambda \to \infty.$$

Рассмотрим в первую очередь важный случай, когда $F_\pm(x)$ правильно меняется в нуле, т. е. для некоторых медленно меняющихся в нуле функций $\ell_\pm(t)$

$$F_\pm(x) \sim \ell_\pm(x)x^{a_\pm} \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{18}$$

где $a_\pm \geqslant 0$. В силу теорем XIII.2 и XIII.3 из [4] соотношение (18) эквивалентно соотношению

$$L_\pm(\lambda) \sim \Gamma(1+a_\pm)\lambda^{-a_\pm}\ell_\pm\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Используя теперь (7), получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть выполнены вышеприведённые условия и* $h_1(t) \equiv 0$. *Если выполнено соотношение* (18) *с определёнными выше величинами* $\ell_\pm$, $a_\pm$, *то* $a_\pm \leqslant 1/\alpha$ *и выполнены асимптотические соотношения*

$$P([0,S],u) = H_\alpha\Gamma(1+a_+)u^{2/\alpha-2a_+}\ell_+(u^2)\bigl(\ell^{\#}(u^{-2})\bigr)^{1/\alpha}\Psi(u)\bigl(1+o(1)\bigr), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} P([-S,S],u) = H_\alpha\bigl(\Gamma(1+a_+)u^{2/\alpha-2a_+}\ell_+(u^2) + \Gamma(1+a_-)u^{2/\alpha-2a_-}\ell_-(u^2)\bigr) \times \\ \times \bigl(\ell^{\#}(u^{-2})\bigr)^{1/\alpha}\Psi(u)\bigl(1+o(1)\bigr) \end{aligned} \tag{20}$$

при $u \to \infty$.

Замечание 2.

1. Если функции $f_\pm(x) = x^{\beta_\pm}\ell_\pm(x)$ правильно меняются в нуле с положительными индексами $\beta_\pm$ (функции $\ell_\pm(x)$ медленно меняются), то в силу теоремы 1.5.3 из [5] существуют асимптотически монотонные эквиваленты функций $f_\pm$, обозначим их через $f_{*,\pm}(t)$. Следовательно, используя предыдущие рассуждения, можно взять $F_\pm(x) = f^{\leftarrow}_{*,\pm}(x)$. Используя выводы, аналогичные выводу соотношения (7), получаем
$$F_\pm(x) \sim x^{1/\beta_\pm}\ell^{\#}_\pm(x), \quad x \to 0.$$
2. Случай правильного изменения f в нуле рассмотрен недавно в [6], где получено соотношение (19). Кроме того, в [6] предполагается симметричное поведение функции $1-\sigma$ около нуля, однако ясно, что случай несимметричной функции рассматривается похожим образом. Заметим также, что в [3] рассмотрен случай $\ell_\pm(x) = 1$, $x \in [-S, S]$, поэтому $L_\pm(\lambda) \sim \Gamma(1+1/\beta)\lambda^{-1/\beta}$.

Рассмотрим теперь другие представления функций $L_\pm(\lambda)$. Интегрируя по частям и выбирая A достаточно большим, в почти стационарном случае получаем, что
$$L_\pm(\lambda) \sim e^{-2\log^{A/2}\lambda} + \\ + \lambda \int\limits_0^{2\lambda^{-1}\log^{A/2}\lambda} e^{-\lambda x}F_\pm(x)\,dx =: e^{-2\log^{A/2}\lambda} + J_\pm(\lambda) \sim J_\pm(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Кроме того, если $\sigma(t)$ локально монотонна в окрестности нуля, получаем, что
$$J_\pm(\lambda) \sim \int\limits_{\exp(-2\log^{A/2}\lambda)}^{1} f^{\leftarrow}(-\lambda^{-1}\log v)\,dv, \quad \lambda \to \infty. \tag{21}$$

3.2. Случай Талаграна

Из лемм 2 и 3 следует, что если $h_1(t) = \infty$ для всех $t \neq 0$, то
$$P([0,S],u) = P([-S,S],u) = \Psi(u)\big(1+o(1)\big) \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{22}$$

3.3. Переходный случай

Мы уже знаем, что в этом случае $1-\sigma^2(t) = Ct^\alpha\ell_1(t)$, где $\ell(t)/\ell_1(t) \to 1$ при $t \to 0$, причём $1 - r(s,t) \sim |t-s|^a\ell(t-s)$, $s,t \to 0$. Нахождение асимптотики вероятности превышения высокого уровня в этом случае очень похоже на соответствующие вычисления в [2, 3, 9]. Единственное отличие состоит в том, что там рассмотрен только случай $\ell(t) = \ell_1(t) = 1$. Но в [6] показано, что наличие медленно меняющейся функции не влияет на окончательный вывод. Таким образом, получаем в этом случае соотношения

$$P([0,S],u) = \bigl(1+o(1)\bigr)P_\alpha^+\Psi(u), \tag{23}$$

$$P([-S,S],u) = \bigl(1+o(1)\bigr)P_\alpha\Psi(u) \tag{24}$$

при $u \to \infty$, где

$$P_\alpha^+ = \lim_{T\to\infty} P_\alpha^+(T) \in (0,\infty), \quad P_\alpha = \lim_{T\to\infty} P_\alpha(T) \in (0,\infty).$$

Отметим, что в отличие от почти стационарного случая в случае Талаграна и переходном случае двусторонняя вероятность не равна асимптотически сумме односторонних.

3.4. Основной результат

Теперь объединим все полученные асимптотики и сформулируем основную теорему. Будем говорить, что имеет место

случай S-S, если речь идёт о почти стационарном случае, рассмотренном в утверждении 2;

случай S-T, если $h_1(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $h_1(t) = \infty$ при $t > 0$;

случай P-S, если $h_1(t) \in (0,\infty)$ при $t \leqslant 0$ и $h_1(t) = 0$ при $t > 0$

и далее аналогично для оставшихся шести случаев.

Теорема 3. *Пусть гауссовский процесс с нулевым средним $X(t)$, $t \in [-S,S]$, удовлетворяет условиям* A1—A4. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

- *В случае* S-S *имеет место соотношение* (11).
- *В других четырёх случаях, содержащих* S, *асимптотическое поведение вероятности $P([-S,S],u)$ равно правой части соотношения* (10).
- *В случае* T-T *имеет место соотношение* (22).
- *В случае* P-P *имеет место соотношение* (24).
- *В случаях* T-P, P-T *асимптотическое поведение вероятности равно правой части соотношения* (23).

Замечание 3.

1. Для любого ограниченного множества $E \subset [-S,S]$, которое является замыканием открытого множества, содержащего единственную точку максимума дисперсии, имеет место эквивалентность $P(E,u) \sim P([-S,S],u)$ при $u \to \infty$. В частности, основной результат не зависит от $S > 0$.
2. В случае когда точка максимума дисперсии σ^2 является граничной, имеют место соответствующие односторонние асимптотики.

4. Примеры

Приведём два иллюстрирующих примера для случая S-S. Экзотические ситуации с локально немонотонной $\sigma(t)$ могут быть рассмотрены с использованием монотонной перестановки функции $f(t) = 1 - \sigma^2(t)$.

Пример 1. Случай очень пологого максимума. Для положительных ε, β и t положим

$$f(t) = 1 - \sigma^2(t) = e^{-t^{-\beta}}, \quad t \in (0, \varepsilon].$$

Имеем, что $\sigma(t)$ — чётная и локально монотонная с обеих сторон в нуле функция, и можно просто писать $F_\pm = F$. При $x > 0$ получаем, что

$$F(x) = f^{\leftarrow}(x) = \log^{-1/\beta}\left(\frac{1}{x}\right),$$

т. е. $a_\pm = 0$, $\ell(x) = \log^{-1/\beta}(1/x)$. Следовательно, по предложению 1 получаем асимптотику

$$P([-S,S],u) = 2^{1-1/\beta} H_\alpha \log^{-1/\beta}(u) \frac{\Psi(u)}{q(u)} \big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad u \to \infty.$$

Асимптотическое поведение вероятности $P([-S,S],u)$ такого типа, для очень пологих максимумов, до сих пор в литературе не рассматривалось.

Пример 2. Теперь рассмотрим ситуацию, когда $1 - \sigma^2(t)$ и $1 - r(s,t)$ очень близки при $s, t \to 0$. Возьмём $1 - \sigma^2(t) = t^\alpha \log(1/t)$, при этом, конечно, предположим, что $\ell(t)$ в условиях A3 и A4 такое, что $\log(1/t)/\ell(t) \to 0$ при $t \to 0$, т. е. $1 - r(s,t) \sim |t-s|^a \ell(t-s)$, $s, t \to 0$. По [5, следствие 2.3.4] (см. также замечание 2) имеем, что

$$\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\#} \sim \frac{1}{\log(1/t)},$$

т. е.

$$F_\pm(x) \sim \frac{x^{1/\alpha}}{\log(1/x)}, \quad x \to 0,$$

и

$$L_\pm(u^2) \sim \frac{\Gamma(1 + 1/\alpha) u^{-2/\alpha}}{2 \log u} \quad \text{при} \quad u \to \infty.$$

Итак,

$$P([-S,S],u) = H_\alpha \frac{\ell^{\#}(u^{-2})^{1/\alpha}}{\log u} \Psi(u) \big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad u \to \infty$$

(см. (7)).

Исследование частично поддержано Российским научным Фондом, проект 14-49-00079, Российским фондом фундаментальных исследований, грант 19-01-00090, и грантом Швейцарского национального научного фонда 200021-175752.

Литература

[1] Питербарг В. И. О работе Пикандса «Вероятности пересечения для гауссовского стационарного процесса» // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1972. — Т. 5. — С. 25—30.

[2] Питербарг В. И. Двадцать лекций о гауссовских процессах. — М.: МЦНМО, 2015.

[3] Питербарг В. И., Присяжнюк В. П. Асимптотика вероятности большого выброса гауссовского нестационарного процесса // Теор. вероятн. и матем. стат. — 1978. — Т. 18. — С. 121—134.

[4] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1967.

[5] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.

[6] Dębicki K., Hashorva E., Liu P. Extremes of Gaussian random fields with regularly varying dependence structure // Extremes. — 2017. — Vol. 20. — P. 333—392.

[7] Geman D., Horowitz J. Occupation densities // Ann. Probab. — 1980. — Vol. 8, no. 1. — P. 1—67.

[8] Pickands J., III. Upcrossing probabilities for Gaussian stationary processes // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 51—73.

[9] Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields. — Providence: Amer. Math. Soc., 2012. — (Transl. Math. Monogr.; Vol. 148).

[10] Piterbarg V. I., Rodionov I. V. High excursions of Bessel and related random processes // Stoch. Proc. Appl. — 2020. — Vol. 130, no. 8. — P. 4859—4872.