Гармонический анализ ветвящихся случайных блужданий с тяжёлыми хвостами

А. И. РЫТОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: rytova.anastasiya@gmail.com

УДК 519.21

Ключевые слова: ветвящиеся случайные блуждания, моменты, докритический случай, преобразование Фурье, гармонический анализ.

Аннотация

Рассматривается симметричное, однородное по пространству ветвящееся случайное блуждание по многомерной решётке с непрерывным временем и одним источником ветвления частиц. На переходные интенсивности случайного блуждания, лежащего в основе процесса, накладываются условия, приводящие к бесконечной дисперсии скачков. Получена оценка скорости роста преобразования Фурье переходных интенсивностей и асимптотика средней численности частиц в источнике в докритическом случае.

Abstract

A. I. Rytova, Harmonic analysis of random walks with heavy tails, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 175—189.

We consider a continuous-time symmetric, spatially homogeneous branching random walk on a multidimensional lattice with a single branching source. Corresponding transition intensities of the underlying random walk are assumed to have heavy tails. This assumption implies that the variance of jumps is infinite. The growth rate estimate of the Fourier transform for transition intensities and of the asymptotics of the mean number of particles in the source in subcritical case are obtained.

1. Введение

Рассматривается симметричное, однородное по пространству, неприводимое ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем по $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$, и одним источником ветвления частиц, расположенным в начале координат.

Одной из первых работ по исследованию такой модели для простого случайного блуждания и процесса чистого размножения в источнике была, по-видимому, работа [10]. Более общие модели симметричного ветвящегося случайного блуждания с конечной дисперсией скачков случайного блуждания и одним источником ветвления рассматривались многими авторами (см., например, [6, 9]). Как было показано в [4, 11], отказ от конечности дисперсии скачков приводит

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 175—189.

к новым эффектам в ветвящемся случайном блуждании. Случайным блужданиям (без ветвления) с бесконечной дисперсией скачков посвящён ряд публикаций (см., например, [7] и библиографию в ней). В [5] для случайных блужданий по $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$, имеющих тяжёлые хвосты и удовлетворяющих некоторому условию регулярности, получена глобальная предельная теорема о поведении переходных вероятностей при совместном росте временной и пространственной координат. В [4] изучено асимптотическое поведение функции Грина и собственного значения эволюционного оператора средних численностей частиц для надкритического ветвящегося случайного блуждания с тяжёлыми хвостами.

Приведём краткое описание модели, предложенной в [11]. Случайное блуждание, лежащее в основе процесса, определяется матрицей переходных интенсивностей $A = \big(a(x,y)\big)_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющей условиям $a(x,y) \geqslant 0$ при $x \neq y$, $-\infty < a(x,x) < 0$, $a(0) = -\sum\limits_{z\neq 0} a(z)$, условиям симметрии и пространственной однородности $a(x,y) = a(y,x) = a(0,y-x)$, неприводимости, т. е. когда для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ существует такой набор векторов $z_1,\dots,z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum\limits_{i=1}^{k} z_i$ и $a(z_i) \neq 0$ для $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда значения $a(x,y)$ можно выразить функцией одного аргумента $a(z) := a(0,z)$. Через σ^2 обозначим дисперсию скачков случайного блуждания. Тогда, как известно,

$$\sigma^2 = \sum_{z\neq 0} |z|^2 \, \frac{a(z)}{-a(0)}.$$

Как показано, например, в [3], для данной модели вероятности $p(t,x,y)$ перехода частицы из точки x за время t в точку y удовлетворяют обратным уравнениям Колмогорова

$$\frac{dp(t,x,y)}{dt} = \sum_{x'} a(x,x')p(t,x',y), \quad p(0,x,y) = \delta(y-x), \tag{1}$$

где $\delta(\cdot)$ — дискретная δ-функция Кронекера на $\mathbb{Z}^d$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$a(z) \sim \frac{H(z/|z|)}{|z|^{d+\alpha}}, \quad |z| \to \infty, \tag{2}$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^d$, $H(z/|z|) = H(-z/|z|)$ — положительная непрерывная функция на $\mathbb{S}^{d-1} = \{z \in \mathbb{R}^d\colon |z| = 1\}$ и $\alpha \in (0,2)$. В таком предположении дисперсия скачков становится бесконечной [11].

Мы предполагаем также, что ветвление в источнике описывается процессом Гальтона—Ватсона с непрерывным временем, заданным инфинитезимальной производящей функцией

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Здесь через b_n обозначены интенсивности рождения n частиц от одной, которая мгновенно погибает. Считаем, что $b_n \geqslant 0$ при $n \neq 1$, $-\infty < b_1 < 0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = 0$. Обозначим через

$$\beta := f'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n = (-b_1)\left(-1 + \sum_{n\neq 1}^{\infty} n \frac{b_n}{-b_1}\right) \tag{3}$$

интенсивность источника, где последняя сумма характеризует среднее количество рождающихся частиц. Для получения процесса ветвящегося случайного блуждания случайное блуждание и ветвление совмещаются так, как это сделано в [4].

Основной интерес при исследовании описанной модели представляет поведение *локальных* численностей частиц $\mu_t(y)$ в произвольной точке $y \in \mathbb{Z}^d$ и их моменты $m_1(t,x,y) := \mathsf{E}_x \mu_t(y)$, где E_x — математическое ожидание при условии, что в начальный момент времени в системе была единственная частица, расположенная в точке x. Тогда (см. [3]) справедливы уравнения

$$\frac{dm_1(t,x,y)}{dt} = \sum_{x'} a(x,x') p(t,x',y) + \beta\delta(y), \quad m_1(0,x,y) = \delta(y-x). \tag{4}$$

В [3] отмечалось, что уравнения (1) и (4) можно трактовать как линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве

$$\frac{dp(t,x,y)}{dt} = \big(\mathcal{A}p(t,\cdot,y)\big)(x), \quad p(0,x,y) = \delta_(y-x), \tag{5}$$

$$\frac{dm_1(t,x,y)}{dt} = \big(\mathcal{H}_\beta m_1(t,\cdot,y)\big)(x), \quad m_1(0,x,y) = \delta_(y-x), \tag{6}$$

в которых оператор $\mathcal{A}\colon \ell^p(\mathbb{Z}^d) \to \ell^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определяется равенством

$$(\mathcal{A}f)(x) = \sum_{x'} a(x,x') f(x'),$$

а оператор $\mathcal{H}_\beta$ — равенством

$$\mathcal{H}_\beta := \mathcal{A} + \beta\Delta_0,$$

где $\Delta_x = \delta_x \delta_x^T$, а $\delta_x = \delta_x(\cdot)$ обозначает вектор-столбец на решётке, принимающий единичное значение в точке x и нули в остальных точках. В пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ оператор $\mathcal{A}$ является самосопряжённым.

Важным инструментом анализа операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}_\beta$ служит преобразование Фурье переходных интенсивностей случайного блуждания

$$\phi(\theta) := \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} a(z) e^{i\langle z,\theta\rangle}, \quad \theta \in [-\pi,\pi]^d. \tag{7}$$

Также исследование ветвящегося случайного блуждания удобно проводить в терминах так называемой функции Грина

$$G_\lambda(x,y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, p(t,x,y)\, dt, \tag{8}$$

являющейся преобразованием Лапласа переходных вероятностей случайного блуждания. Согласно (1) функцию Грина можно также представить в виде

$$G_\lambda(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{i\langle\theta, y-x\rangle}}{\lambda - \phi(\theta)}\, d\theta, \tag{9}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Будем называть, следуя, например, [11], случайное блуждание *возвратным*, если $G_0 := G_0(0,0) = \infty$, и *невозвратным*, если $G_0 < \infty$. Согласно (9) для установления возвратности случайного блуждания достаточно оценок сверху и снизу преобразования Фурье $\phi(\theta)$.

Поведение ветвящегося случайного блуждания существенно зависит от свойства возвратности. Обозначим через β_c наименьшую интенсивность источника, такую что при $\beta > \beta_c$ спектр оператора $\mathcal{H}_\beta$ содержит положительное собственное значение. В [6] для модели ветвящегося случайного блуждания с конечной дисперсией скачков было установлено, что численности частиц как в каждой точке решётки, так и на всей решётке растут экспоненциально только при $\beta > \beta_c$. В [13] показано, что для случая одного источника вне зависимости от предположений о дисперсии скачков выполняются следующие соотношения: если $G_0 = \infty$, то $\beta_c = 0$, и если $G_0 < \infty$, то $\beta_c = G_0^{-1}$.

Для рассматриваемой модели ветвящегося случайного блуждания отказ от конечности дисперсии скачков приводит к новым эффектам. Так, несмотря на то что при выполнении условия (2) основные дифференциальные и интегральные уравнения для производящих функций и моментов численностей частиц сохраняются, свойства и асимптотики функций $\phi(\theta)$, $p(t,x,y)$ и, как следствие, функций $G_\lambda(x,y)$, $m_1(t,x,y)$ качественно меняются. Например, в случае бесконечной дисперсии скачков соотношение $G_0 < \infty$ возможно в размерности $d = 1$ при $\alpha \in (0,1)$, а также в размерностях $d \geqslant 2$ при $\alpha \in (0,2)$, тогда как в случае конечной дисперсии скачков соотношение $G_0 < \infty$ выполняется только в размерностях $d \geqslant 3$. Это приводит к тому, что для решёток $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ значение β_c может быть строго положительным, т. е. при $d = 1$ или $d = 2$ ветвящееся случайное блуждание с тяжёлыми хвостами (в отличие от случая конечной дисперсии скачков) может быть докритическим даже при надкритическом ветвящемся процессе в источнике.

Настоящая работа посвящена получению оценки $C|\theta|^\alpha \leqslant |\phi(\theta)|$, где $C > 0$ — некоторая константа, при условии (2) по методу, предложенному в [12] для $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$. Отметим, что данная оценка позволила в [12] установить невозвратность случайного блуждания без обращения к асимптотике $p(t,x,y)$. Также в работе получены асимптотики $m_1(t,0,0)$ при $t \to \infty$ в докритическом случае для произвольных $\mathbb{Z}^d$ и $\alpha \in (0,2)$ по методу, предложенному в [3]. Для этого было недостаточно одних только оценок преобразования Фурье и требовалась точная асимптотика функции $p(t,x,y)$, которая была установлена в [1] с помощью асимптотики тригонометрического ряда от нескольких переменных, полученной в [8].

Опишем структуру статьи. В разделе 2 приводится оценка преобразования Фурье и устанавливается критерий невозвратности случайного блуждания при выполнении условия (2). В разделе 3 напоминаются некоторые результаты из [3, 4], требующиеся в дальнейших доказательствах. В разделе 4 получены асимптотики $m_1(t,0,0)$ при $t \to \infty$ в докритическом случае для произвольных $\mathbb{Z}^d$ и $\alpha \in (0,2)$. В раздел 5 вынесено доказательство оценок преобразования Фурье для $d=3$ с применением гармонического анализа.

2. Свойства случайного блуждания

Из представления (9) вытекает, что для доказательства критерия возвратности случайного блуждания с тяжёлыми хвостами, лежащего в основе рассматриваемого ветвящегося случайного блуждания, достаточно иметь оценки снизу и сверху для преобразования Фурье. Оценки для $d=1$ и $d=2$ получены в [12]. Ниже приведена лемма, которая даёт такие оценки для $d=3$. Её доказательство вынесено в раздел 5.

Лемма 1. *Если $\alpha \in (0,2)$ и для неприводимой функции $a(\cdot)$ на $\mathbb{Z}^3$ выполнено условие* (2), *то для соответствующего преобразования Фурье $\phi(\theta)$ справедлива оценка*

$$C|\theta|^\alpha \leqslant |\phi(\theta)|, \quad \theta \in [-\pi,\pi]^3, \tag{10}$$

где $C>0$ — некоторая константа.

Ввиду соотношений (9) и (10) имеем

$$G_0 = \int\limits_0^\infty p(t,0,0)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{[-\pi,\pi]^3} \frac{d\theta}{-\phi(\theta)} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{[-\pi,\pi]^3} \frac{d\theta}{C|\theta|^\alpha}, \tag{11}$$

где последний интеграл сходится. Как показано в [12], аналогичные рассуждения справедливы для $d=1$ и $d=2$. Отсюда сразу получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Случайное блуждание на $\mathbb{Z}^d$, интенсивности которого удовлетворяют условию* (2), *возвратно при $d=1$ для $\alpha \in [1,2)$ и невозвратно при $d=1$ для $\alpha \in (0,1)$, а также при $d=2$ и $d=3$ для $\alpha \in (0,2)$.*

3. Основные уравнения

Напомним некоторые результаты, которые нам понадобятся в разделе 4. Приведём лемму о представлении преобразования Лапласа функции $m_1(t,x,y)$ через функцию Грина (см. [3, лемма 5.1.3]). При доказательстве леммы 5.1.3 не используется условие конечности дисперсии скачков, поэтому лемма остаётся справедливой и при выполнении условия (2).

Лемма 2. *Пусть $\beta < \beta_c$. Тогда преобразование Лапласа*

$$\hat{m}_1(\lambda, x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} m_1(t, x, y)\, dt \tag{12}$$

решения $m_1(t, x, y)$ задачи Коши (6) *имеет вид*

$$\hat{m}_1(\lambda, x, y) = \frac{\beta G_\lambda(0, y) G_\lambda(x, 0)}{1 - \beta G_\lambda(0, 0)} + G_\lambda(x, y). \tag{13}$$

Напомним также формулировку теоремы 1 из [4], в которой установлена асимптотика функции Грина случайного блуждания при выполнении условия (2).

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (0, 2)$. Если $\lambda \downarrow 0$, то имеют место следующие асимптотические равенства*:

а) $G_\lambda \sim \gamma_{d,\alpha} \lambda^{1/\alpha - 1}$ *при* $d = 1$, $\alpha \in (1, 2)$;

б) $G_\lambda \sim -\gamma_{d,\alpha} \ln \lambda$ *при* $d = 1$, $\alpha = 1$;

в) $G_\lambda - G_0 \sim -\gamma_{d,\alpha} \lambda^{d/\alpha - 1}$ *при* $d = 1$, $\alpha \in (1/2, 1)$, *или* $d = 2$, $\alpha \in (1, 2)$, *или* $d = 3$, $\alpha \in (3/2, 2)$;

г) $G_\lambda - G_0 \sim \gamma_{d,\alpha} \lambda \ln \lambda$ *при* $d = 1$, $\alpha = 1/2$, *или* $d = 2$, $\alpha = 1$, *или* $d = 3$, $\alpha = 3/2$;

д) $G_\lambda - G_0 \sim -\gamma_{d,\alpha} \lambda$ *при* $d = 1$, $\alpha \in (0, 1/2)$, *или* $d = 2$, $\alpha \in (0, 1)$, *или* $d = 3$, $\alpha \in (0, 3/2)$, *или* $d \geqslant 4$, $\alpha \in (0, 2)$,

где $\gamma_{d,\alpha}$ — некоторая положительная константа при каждых фиксированных размерностях d решётки $\mathbb{Z}^d$.

Также мы будем пользоваться тауберовыми теоремами для распределений и плотностей (см., например, [4, лемма 1] или [2, гл. XIII, § 5, теоремы 2 и 4]).

4. Моменты численностей частиц

Для доказательства теоремы о поведении при $t \to 0$ функции

$$m_1(t) := m_1(t, 0, 0)$$

докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $r = [d/\alpha]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа. Если $\lambda \to 0$, то справедливы асимптотические соотношения*

1) *при* $d = 1$, $\alpha \in (1, 2)$

$$\hat{m}_1^{(1)}(\lambda) \sim -\frac{\Gamma(2 - 1/\alpha)}{\Gamma^2(1 - 1/\alpha)} \frac{1}{\beta^2 h_{\alpha,1}} \lambda^{-1/\alpha}, \tag{14}$$

$$\hat{m}_1^{(2)}(\lambda) \sim \frac{\Gamma(1 - 1/\alpha)\Gamma(3 - 1/\alpha) - 2\Gamma^2(2 - 1/\alpha)}{\Gamma^3(1 - 1/\alpha)} \frac{1}{\beta^2 h_{\alpha,1}} \lambda^{-1-1/\alpha}; \tag{15}$$

2) *при* $d = 1$, $\alpha = 1$

$$\hat{m}_1^{(1)}(\lambda) \sim -\frac{1}{\beta^2 h_{1,1}} \lambda^{-1} \ln^{-2} \lambda, \quad \hat{m}_1^{(2)}(\lambda) \sim \frac{1}{\beta^2 h_{1,1}} \lambda^{-2} \ln^{-2} \lambda; \tag{16}$$

3) *при* $d = 1$, $\alpha \in (0,1)$ *или* $d \geqslant 2$, $\alpha \in (0,2)$ *для* $k \geqslant r$

$$\hat{m}_1^{(k)}(\lambda) \sim \frac{(-1)^k \Gamma(1 + k - d/\alpha) h_{\alpha,d}}{\big(1 - \beta G_0(0,0)\big)^2} \lambda^{-(1+k-d/\alpha)}. \tag{17}$$

Доказательство. Доказательство леммы проводится по схеме, предложенной для доказательства леммы 5.3.1 из [3] для случая конечной дисперсии скачков. По лемме 2 преобразование Лапласа $\hat{m}_1(\lambda)$ функции $m_1(t) = m_1(t,0,0)$ имеет вид

$$\hat{m}_1(\lambda) = \frac{G_\lambda(0,0)}{1 - \beta G_\lambda(0,0)}. \tag{18}$$

Введём обозначение $\hat{p}(\lambda)$ для $G_\lambda(0,0)$, отражающее его определение как преобразования Лапласа функции $p(t) := p(t,0,0)$. Из свойств преобразования Лапласа следует, что $\hat{p}(\lambda)$ обладает производными всех порядков:

$$\hat{p}^{(k)}(\lambda) = (-1)^k \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} t^k p(t)\, dt. \tag{19}$$

Производная $\hat{m}_1(\lambda)$ порядка k представляется в виде

$$\hat{m}_1^{(k)}(\lambda) = \frac{\hat{p}^{(k)}(\lambda)}{\big(1 - \beta \hat{p}(\lambda)\big)^2} + f(\lambda), \tag{20}$$

где функция $f(\lambda)$ есть сумма выражений вида

$$\frac{\big((\hat{p}^{(1)}(\lambda)\big)^{l_1} \big((\hat{p}^{(2)}(\lambda)\big)^{l_2} \cdots \big((\hat{p}^{(k-1)}(\lambda)\big)^{l_{k-1}}}{\big(1 - \beta \hat{p}(\lambda)\big)^{l_0}}, \tag{21}$$

умноженных на некоторые константы, взятая по всем наборам $\{l_j\}_{j=1}^{k-1}$, для которых

$$\sum_{j=1}^{k-1} j l_j = k.$$

Таким образом, исследование $\hat{m}_1^{(k)}(\lambda)$ сводится к исследованию $\hat{p}^{(j)}(\lambda)$, $0 \leqslant j \leqslant k$.

В [1] для произвольных $d \geqslant 1$ и $\alpha \in (0,2)$ была установлена локальная предельная теорема для переходных вероятностей при фиксированных $x, y \in \mathbb{Z}^d$ и $t \to \infty$

$$p(t,x,y) \sim h_{\alpha,d} t^{-d/\alpha}, \tag{22}$$

где $h_{\alpha,d} > 0$ — некоторая константа. Тогда при $t \to \infty$

$$t^k p(t) \sim h_{\alpha,d} t^{k-d/\alpha}. \tag{23}$$

Значения k, при которых функция $t^k p(t)$ будет суммируемой, должны удовлетворять условию $k - d/\alpha < -1$. При выполнении этого условия существует такое C, что

$$\left|\hat{p}^{(k)}(\lambda)\right| \leqslant C, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0. \tag{24}$$

В то же время значения k, при которых асимптотику $\hat{p}^{(k)}(\lambda)$ можно найти по (19) непосредственным применением тауберовой теоремы для плотностей, должны удовлетворять условию $\rho = 1 + k - d/\alpha > 0$. Тогда при $\lambda \to 0$

$$(-1)^k \hat{p}^{(k)}(\lambda) \sim \Gamma\left(1 + k - \frac{d}{\alpha}\right) h_{\alpha,d}\, \lambda^{-(1+k-d/\alpha)}. \tag{25}$$

Заметим, что

$$\inf\left\{k \;\middle|\; 1 + k - \frac{d}{\alpha} > 0\right\} = \left[\frac{d}{\alpha}\right].$$

Обозначим $r = [d/\alpha]$. Тогда получаем, что функция $\hat{p}^{(k)}(\lambda)$ при $k \leqslant r - 2$ будет ограниченной, причём при $k \geqslant r$ её асимптотика находится из тауберовой теоремы для плотностей [2, теорема 4], а при $k = r - 1$ возможны два случая: если $r \neq d/\alpha$, то $\hat{p}^{(k)}(\lambda)$ ограничена, если же $r = d/\alpha$, то $t^{r-1}p(t)$ при $t \to \infty$ будет иметь асимптотику $h_{\alpha,d} t^{-1}$. Тогда, например, из леммы 5.1.1 в [3] с $\mu = -1$, $\tilde{\mu} = 0$ получаем при $t \to \infty$, что

$$\int_0^t u^{r-1} p(u)\, du \sim h_{\alpha,d} \ln t,$$

откуда по тауберовой теореме для распределений [2, теорема 2] при $\lambda \to 0$ находим, что

$$(-1)^{(r-1)} \hat{p}^{(r-1)}(\lambda) \sim -h_{\alpha,d} \ln \lambda. \tag{26}$$

Отдельно рассмотрим случаи, соответствующие комбинациям $d = 1$ и $\alpha \in [1, 2)$, при которых $r = 0$ или $r = 1$. Выпишем явно первые две производные $\hat{m}(\lambda)$:

$$\hat{m}_1^{(1)}(\lambda) = \frac{\hat{p}^{(1)}(\lambda)}{\left(1 - \beta\hat{p}(\lambda)\right)^2},$$

$$\hat{m}_1^{(2)}(\lambda) = \frac{\hat{p}^{(2)}(\lambda)}{\left(1 - \beta\hat{p}(\lambda)\right)^2} + \frac{2\beta\left(\hat{p}^{(1)}(\lambda)\right)^2}{\left(1 - \beta\hat{p}(\lambda)\right)^3}.$$

Асимптотики $\hat{p}(\lambda)$, $\hat{p}^{(1)}(\lambda)$, $\hat{p}^{(2)}(\lambda)$ получаем с помощью (19), утверждений а), б) теоремы 2 и тауберовой теоремы для плотностей [2, теорема 4]. Тогда при $\lambda \to 0$ имеем утверждения (14)—(16) леммы.

Завершим доказательство леммы для $r \geqslant 2$. Для $k \leqslant r-1$ из оценок (24) и асимптотики (26) следует, что функция $f(\lambda)$ ведёт себя при $\lambda \to 0$ как константа в случае $r \neq d/\alpha$ и с точностью до константы как $\ln\lambda$ в случае $r = d/\alpha$. Тогда в силу (20) и (25) для $k \geqslant r$ при $\lambda \to 0$ имеет место асимптотическое равенство

$$\hat{m}_1^{(k)}(\lambda) \sim \frac{\hat{p}^{(k)}(\lambda)}{\bigl(1-\beta\hat{p}(\lambda)\bigr)^2}. \tag{27}$$

Используя (25) и утверждения в)—д) теоремы 2, получаем асимптотику (17). Лемма доказана. □

Теперь установим асимптотику функции $m_1(t)$ при $t \to \infty$ в докритическом случае.

Теорема 3. *Пусть $\beta < \beta_c$. Тогда $m_1(t,0,0) \sim C_1 u_1(t)$ при $t \to \infty$, где константы C_1 и функции $u_1(t)$ имеют следующий вид*:

а) *при $d=1$, $\alpha \in (1,2)$*

$$C_1 = \frac{\Gamma(3-1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha) - 2\Gamma^2(2-1/\alpha)}{\Gamma^3(1-1/\alpha)\Gamma(1+1/\alpha)}(\beta^2 h_{\alpha,1})^{-1}, \quad u_1(t) = t^{1/\alpha-2};$$

б) *при $d=1$, $\alpha=1$*

$$C_1 = (\beta^2 h_{1,1})^{-1}, \quad u_1(t) = t^{-1}\ln^{-2} t;$$

в) *при $d=1$, $\alpha \in (0,1)$ или $d \geqslant 2$, $\alpha \in (0,2)$*

$$C_1 = h_{\alpha,d}\bigl(1-\beta G_0(0,0)\bigr)^{-2}, \quad u_1(t) = t^{-d/\alpha}.$$

Доказательство. Проводится по схеме, предложенной для доказательства теоремы 5.3.2 из [3]. Как следует из (17) и теоремы 2, функция $\hat{m}_1(\lambda)$ имеет регулярную часть в нуле, поэтому согласно

$$\hat{m}_1^{(k)}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(-1)^k t^r m_1(t)\,dt$$

для получения асимптотики $m_1(t)$ с помощью тауберовой теоремы для плотностей [2, теорема 4] можно использовать асимптотику производной $\hat{m}^{(k)}(\lambda)$, найденную в лемме 3. При $\beta < \beta_c$ по лемме 3.3.5 из [3], доказательство которой не зависит от предположения о дисперсии скачков, функция $m_1(t)$ монотонно убывает. Тогда представление

$$t^{r+1}m_1(t) = (r+1)\int\limits_0^t u^r m_1(u)\,du - \int\limits_0^t u^{r+1}\bigl(-m_1'(u)\bigr)\,du, \tag{28}$$

где $r = [d/\alpha]$, позволяет найти асимптотику функции $t^{r+1}m_1(t)$ при $t \to \infty$ по асимптотикам интегралов

$$U_1(t) = \int\limits_0^t u^r m_1(u)\,du$$

и

$$U_2(t) = \int\limits_0^t u^{r+1}\big(-m_1'(u)\big)\,du$$

от неотрицательных функций. Тогда из соотношений

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U_1\{dt\} = (-1)^r \hat{m}_1^{(r)}(\lambda),$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U_2\{dt\} = (-1)^r \lambda\ \hat{m}_1^{(r+1)}(\lambda) + (r+1)(-1)^r\ \hat{m}_1^{(r)}(\lambda)$$

леммы 3, тауберовой теоремы для распределений [2, теорема 2] и (28) получаем асимптотики функции $m_1(t)$. Теорема доказана. □

5. Доказательство леммы 1

При доказательстве настоящей леммы будем следовать схеме доказательства теоремы 2 из [12]. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\theta) := \sum_{\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \frac{H(z/|z|)}{|z|^{3+\alpha}}\big(e^{i\langle\theta,z\rangle} - 1\big).$$

Обозначим через $\|\cdot\|$ max-норму в $\mathbb{R}^3$:

$$\|z\| = \max\{|z_1|, |z_2|, |z_3|\} \quad \text{для} \quad z = \{z_1, z_2, z_3\}.$$

Так как $\|z\| \leqslant |z| \leqslant \sqrt{3}\|z\|$ для любого $z \in \mathbb{Z}^3$, имеем оценки

$$H_0 3^{-(3+\alpha)/2} f(\theta) \leqslant |\Phi(\theta)| \leqslant H^0 f(\theta), \tag{29}$$

где

$$f(\theta) := \sum_{\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \frac{1}{\|z\|^{3+\alpha}}\big(1 - e^{i\langle\theta,z\rangle}\big).$$

При каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$ через C_k обозначим куб с целочисленными координатами $\{z \in \mathbb{Z}^3 \mid \|z\| \leqslant k\}$. Тогда

$$\mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} = \bigcup_{k=1}^\infty \{C_k \setminus C_{k-1}\}.$$

Следовательно, суммирование ряда $f(\theta)$ можно проводить по переменной $k \in \mathbb{N}$, соответствующей максимальной по модулю координате точек C_k. Заметим, что перечисление всех точек поверхности куба сложнее, чем точек всего куба, так как в первом случае нужно последовательно фиксировать каждую из координат и менять две другие, тогда как в случае куба достаточно единовременного задания трёх независимых диапазонов изменения каждой координаты.

Таким образом,

$$f(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3+\alpha}}\Bigg(\sum_{z\in C_k}\big(1-e^{i\langle\theta,z\rangle}\big)-\sum_{z\in C_{k-1}}\big(1-e^{i\langle\theta,z\rangle}\big)\Bigg).$$

Преобразуем выражение $e^{i\langle\theta,z\rangle}$ с помощью соотношений

$$\sum_{z_i=-k}^{k}e^{i\varphi z_i}=\sum_{z_i=1}^{k}\big(e^{-i\varphi}\big)^{z_i}+1+\sum_{z_i=1}^{k}(e^{i\varphi})^{z_i}=\frac{\sin\big((k+1/2)\varphi\big)}{\sin(1/2\varphi)}.$$

Тогда верно

$$f(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3+\alpha}}\big(24k^2+2-f_k(\theta)\big),\tag{30}$$

где

$$f_k(\theta):=\frac{\prod\limits_{i=1}^{3}\sin(k\theta_i+\theta_i/2)-\prod\limits_{i=1}^{3}\sin(k\theta_i-\theta_i/2)}{\sin(\theta_1/2)\sin(\theta_2/2)\sin(\theta_3/2)}.$$

Пользуясь формулами синуса суммы и разности, приводим $f_k(\theta)$ к виду

$$\begin{aligned}f_k(\theta)=2\Bigg(&\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\sin(k\theta_1)\sin(k\theta_2)\cos(k\theta_3)+\\&+\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\sin(k\theta_1)\sin(k\theta_3)\cos(k\theta_2)+\\&+\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\sin(k\theta_2)\sin(k\theta_3)\cos(k\theta_1)+\cos(k\theta_1)\cos(k\theta_2)\cos(k\theta_3)\Bigg).\end{aligned}$$

Заменим все произведения двух синусов и косинуса на соответствующие суммы косинусов. Сгруппируем слагаемые при косинусах с одинаковыми аргументами. Введём обозначение

$$S_d(\varphi):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{d+\alpha}}\cos(k\varphi).\tag{31}$$

При этом

$$S_d(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{d+\alpha}}.$$

Координаты $\theta\in[-\pi,\pi]^3$ обозначим через $\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$. Тогда согласно (30) получаем представление для $f(\theta)$, в котором каждое слагаемое является тригонометрическим рядом от одной переменной с монотонно убывающими коэффициентами:

$$\begin{aligned}f(\theta)=-\frac{1}{2}\big(&C_1(\theta)\cdot S_3(\theta_1-\theta_2-\theta_3)+C_2(\theta)\cdot S_3(\theta_1-\theta_2+\theta_3)+\\&+C_3(\theta)\cdot S_3(\theta_1+\theta_2-\theta_3)+(-C_4(\theta)+2)\cdot S_3(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\big)+\\&+24S_1(0)+2S_3(0),\end{aligned}\tag{32}$$

где для каждого $j = 1, 2, 3, 4$

$$C_j(\theta) := (-1)^{\delta_{3j}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + (-1)^{\delta_{2j}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + \\ + (-1)^{\delta_{1j}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + 1. \quad (33)$$

Найдём асимптотику $S_3(\varphi)$ при $\varphi \to 0+$. Как показано в [12], для $\alpha \in (0, 2)$ при $\varphi \to 0+$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+\alpha}} \sin(k\varphi) \sim \varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} - \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha(1+\alpha)} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right) \varphi^{\alpha+1}.$$

Здесь для $\alpha = 1$ выражение

$$\Gamma(1-\alpha) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right)$$

формально не определено и понимается как предел

$$\lim_{\alpha \to 1-} \Gamma(1-\alpha) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что

$$S_3'(\varphi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+\alpha}} \sin(k\varphi),$$

где асимптотика данного ряда уже приведена. Проинтегрируем это соотношение на $[0, \varphi]$:

$$\int_0^{\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+\alpha}} \sin(ku)\, du = \int_0^{\varphi} \left(u \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} - \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha(1+\alpha)} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right) u^{\alpha+1} \right) du = \\ = c - \frac{1}{2}\varphi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} + \frac{\Gamma(1-\alpha)\cos\bigl((1/2)\pi\alpha\bigr)}{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} \varphi^{\alpha+2},$$

где c — некоторая константа, но

$$S_3(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3+\alpha}},$$

поэтому

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3+\alpha}}.$$

Следовательно, при $\varphi \to 0+$

$$S_3(\varphi) \sim S_3(0) - \frac{1}{2} S_1(0) \varphi^2 + \frac{\Gamma(1-\alpha)\cos\bigl((1/2)\pi\alpha\bigr)}{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} \varphi^{2+\alpha}. \quad (34)$$

Тогда в силу (32) и (34) для $f(\theta)$ при $\theta \in [-\pi,\pi]^3$, $0 < \theta_3 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_1$, $|\theta| \to 0$ выполняется асимптотическое соотношение, правая часть которого уже не содержит рядов:

$$f(\theta) \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)\cos\bigl((1/2)\pi\alpha\bigr)}{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} \cdot F_1(\theta) + S_1(0)\cdot F_2(\theta), \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1(\theta) &= -\frac{1}{2}\cdot(C_1(\theta)\cdot|\theta_1-\theta_2-\theta_3|^{2+\alpha} + C_2(\theta)\cdot|\theta_1-\theta_2+\theta_3|^{2+\alpha} + \\
&\quad + C_3(\theta)\cdot|\theta_1+\theta_2-\theta_3|^{2+\alpha} + C_4(\theta)\cdot|\theta_1+\theta_2+\theta_3|^{2+\alpha}), \\
F_2(\theta) &= -2\cdot\theta_1\theta_2\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - 2\cdot\theta_1\theta_3\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - \\
&\quad - 2\cdot\theta_2\theta_3\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + \theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+24.
\end{aligned}$$

Получим оценку для $F_1(\theta)$. Заменим $C_j(\theta)$, $j=1,2,3,4$, на (33) и перегруппируем слагаемые. Тогда

$$\begin{aligned}
F_1(\theta) = -\frac{1}{2}\Bigg(&\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_3}{2}\right)J_1(\theta_1,\theta_2,\theta_3) + \\
&+ \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_3}{2}\right)J_2(\theta_1,\theta_2,\theta_3) + \\
&+ \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)J_3(\theta_1,\theta_2,\theta_3) + J_4(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\Bigg),
\end{aligned}$$

где при каждом $i=1,2,3,4$

$$\begin{aligned}
J_i(\theta_1,\theta_2,\theta_3) := (-1)^{\delta_{1i}}|\theta_1-\theta_2-\theta_3|^{2+\alpha} + (-1)^{\delta_{2i}}|\theta_1-\theta_2+\theta_3|^{2+\alpha} + \\
+ (-1)^{\delta_{3i}}|\theta_1+\theta_2-\theta_3|^{2+\alpha} + (1-\delta_{4i}2)|\theta_1+\theta_2+\theta_3|^{2+\alpha},
\end{aligned}$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Оценим выражение $J_1(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$. Изменим знак под модулями так, чтобы везде при θ_1 был знак плюс, и сгруппируем слагаемые с одинаковым знаком перед θ_3. Тогда верны соотношения

$$\begin{aligned}
J_1(\theta_1,\theta_2,\theta_3) &= (|\theta_1+\theta_2+\theta_3|^{2+\alpha} - |\theta_1-\theta_2+\theta_3|^{2+\alpha}) - \\
&\quad - (|\theta_1+\theta_2-\theta_3|^{2+\alpha} - |\theta_1-\theta_2-\theta_3|^{2+\alpha}) = \\
&= \int\limits_{-\theta_2}^{\theta_2}\int\limits_{-\theta_3}^{\theta_3}\mu''(\theta_1+t+s)\,dt\,ds \geqslant \int\limits_{\theta_2/2}^{\theta_2}\int\limits_{\theta_3/2}^{\theta_3}(2+\alpha)(1+\alpha)|\theta_1+t+s|^{\alpha}\,dt\,ds \geqslant \\
&\geqslant \frac{(2+\alpha)(1+\alpha)}{2^{2+\alpha}}\theta_2\theta_3|\theta_1+\theta_2+\theta_3|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Оценивая аналогичным образом выражения $J_2(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$, $J_3(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ и используя то, что

$$x\cdot\operatorname{ctg}x = 1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2) \quad \text{при} \quad x\to 0,$$

получаем при $\theta\in[-\pi,\pi]^3$, $0<\theta_3\leqslant\theta_2\leqslant\theta_1$, $|\theta|\to 0$

$$F_1(\theta)\gtrsim|\theta_1+\theta_2+\theta_3|^\alpha\cdot 3\cdot\frac{(2+\alpha)(1+\alpha)}{2^{\alpha+1}}\geqslant C_1|\theta|^\alpha,$$

где $C_1>0$ — некоторая константа.

Для оценки $F_2(\theta)$ используем соотношение

$$x\cdot\operatorname{ctg}x = 1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2) \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Тогда при $\theta\in[-\pi,\pi]^3$, $0<\theta_3\leqslant\theta_2\leqslant\theta_1$, $|\theta|\to 0$ имеем

$$F_2(\theta)\gtrsim C_2|\theta|^2$$

для некоторой константы $C_2>0$.

Тогда для функции $f(\theta)$ при $\theta\in[-\pi,\pi]^3$, $0<\theta_3\leqslant\theta_2\leqslant\theta_1$, $|\theta|\to 0$ имеем

$$f(\theta)\gtrsim C_1|\theta|^\alpha+C_2|\theta|^2\gtrsim\ C_1|\theta|^\alpha. \tag{36}$$

Из предположения (2), соотношения (29) и оценки (36) следует утверждение леммы 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-01-0468а).

Литература

[1] Рытова А. И., Яровая Е. Б. Многомерная лемма Ватсона и её применение // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 3. — С. 395—403.

[2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.

[3] Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. — М.: Центр прикл. исслед. при механико-математическом ф-те МГУ, 2007.

[4] Яровая Е. Б. Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания // Теория вероятн. и её примен. — 2017. — Т. 62, № 3. — С. 518—541.

[5] Agbor A., Molchanov S., Vainberg B. Global limit theorems on the convergence of multidimensional random walks to stable processes // Stoch. Dyn. — 2015. — Vol. 15, no. 3. — 1550024.

[6] Albeverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I, Math. — 1998. — Vol. 326. — P. 975—980.

[7] Borovkov A., Borovkov K. Asymptotic Analysis of Random Walks. Heavy-Tailed Distributions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.

[8] Kozyakin V. Hardy type asymptotics for cosine series in several variables with decreasing power-like coefficients // Int. J. Adv. Res. Math. — 2016. — Vol. 5 — P. 35—51.

[9] Vatutin V. A., Topchii V. A. Limit theorem for critical catalytic branching random walks // Theory Probab. Appl. — 2005. — Vol. 49, no. 3. — P. 498—518.

[10] Yarovaya E. B. Use of spectral methods to study branching processes with diffusion in a noncompact phase space // Theor. Math. Phys. — 1991. — Vol. 88, no. 1. — P. 690—694.

[11] Yarovaya E. Branching random walks with heavy tails // Commun. Statist. Theory Methods. — 2013. — Vol. 42, no. 16. — P. 2301—2310.

[12] Yarovaya E. Criteria for transient behavior of symmetric branching random walks on $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}^2$ // New Perspectives on Stochastic Modeling and Data Analysis / J. R. Bozeman, V. Girardin, C. H. Skiadas, eds. — ISAST, 2014. — P. 283—294.

[13] Yarovaya E. B. The structure of the positive discrete spectrum of the evolution operator arising in branching random walks // Dokl. Math. — 2015. — Vol. 92, no. 1. — P. 507—510.