Большие уклонения для взвешенных сумм независимых одинаково распределённых величин с функционально заданными весами

И. В. СОБОЛЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

А. В. ШКЛЯЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ashklyaev@gmail.com

УДК 519.214.8

Ключевые слова: большие уклонения, взвешенные суммы, функциональные предельные теоремы, интегро-локальные теоремы.

Аннотация

Рассматривается взвешенная сумма $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,n} X_{j,n}$ с независимыми одинаково распределёнными шагами $X_{j,n}$, $j \leqslant n$, где $a_{j,n} = f(j/n)$ для некоторой дважды гладкой функции f. При выполнении условия Крамера для этой схемы получена интегро-локальная предельная теорема для $\mathbf{P}\bigl(S_n \in [x, x+\Delta_n)\bigr)$, $x/n \in [m^-, m^+]$ для некоторых m^-, m^+ и достаточно медленно стремящейся к нулю последовательности Δ_n. Полученный результат включает нормальные, умеренные и большие уклонения. Для процесса $Y_n(t)$, заданного траекторией S_n, рассматриваемого при условии $S_n \in [x, x+\Delta_n)$, доказана условная функциональная предельная теорема о сходимости к броуновскому мосту.

Abstract

I. V. Sobolev, A. V. Shklyaev, Large deviations of weighted sums of independent identically distributed random variables with functionally-defined weights, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 191—206.

Let $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,n} X_{j,n}$ be a weighted sum with independent, identically distributed steps $X_{j,n}$, $j \leqslant n$, where $a_{j,n} = f(j/n)$ for some $f \in C^2[0,1]$. Under Cramer's condition, we prove an integro-local limit theorem for $\mathbf{P}\bigl(S_n \in [x, x+\Delta_n)\bigr)$ as $x/n \in [m^-, m^+]$ for some m^-, m^+ and any sequence Δ_n tending to zero slowly enough. This result covers the whole scope of normal, moderate, and large deviations. For the stochastic process $Y_n(t)$, corresponding to $S_0, \ldots, S_n$, we obtain a conditional functional limit theorem concerning convergence $Y_n(t)$ to the Brownian bridge given the condition $S_n \in [x, x+\Delta_n)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 191—206.

1. Введение

Пусть $Y_{1,n}, \dots, Y_{n,n}$ — случайные величины с нерешётчатым распределением, образующие схему серий. В [2] получена интегро-локальная теорема для случайных величин

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_{j,n},$$

включающая в себя нормальные, умеренные и большие уклонения. В данной работе рассматривается частный случай, когда $Y_{j,n} = a_{j,n} X_{j,n}$, где $a_{j,n}$ — числовые коэффициенты, являющиеся значениями некоторой функции $f(x)$ в узловых точках $x_{j,n} = j/n$, а $X_{j,n}$ — одинаково распределённые случайные величины с нерешётчатым распределением, образующие схему серий. Интегральная теорема о больших уклонениях в рассматриваемом случае была получена в [5]. В описанном случае удаётся получить более компактную форму интегро-локальной теоремы.

Мы предполагаем выполнение для $X_{j,n}$ условия Крамера: $\mathbf{E} X_{1,1}^2 e^{hX_{1,1}}$ конечно при $h \in [H^-, H^+]$ для некоторых $H^- \leqslant 0 \leqslant H^+$. В работе найдена асимптотика вероятностей больших уклонений

$$\mathbf{P}\big(S_n \in [x, x+\Delta_n)\big) \sim \frac{\Delta_n C(h_{x/n})}{\sqrt{2\pi n} B(h_{x/n})} \exp\Big\{-h_{x/n} x + n \int_0^1 \ln R\big(h_{x/n} f(y)\big)\, dy\Big\}$$

при $n \to \infty$ и всех Δ_n, достаточно медленно стремящихся к 0, причём эквивалентность равномерна по $x \in [m_n^-, m_n^+]$, где $h_{x/n}$, R, C, B — некоторые функции, определённые в (4), (1), (8) и (9) соответственно, а m_n^- и m_n^+ определены в (2). Для соответствующего процесса

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]} - nM(h_{x/n}, t)}{\sqrt{n} B(h_{x/n}, 1)}$$

доказана условная функциональная предельная теорема о сходимости $Y_n(t)$ при условии $S_n \in [x, x+\Delta_n)$ к гауссовскому процессу, получаемому из броуновского моста заменой времени, где $B(h,t)$ и $M(h,t)$ определены в (11).

Работа имеет следующую структуру: в разделе 2 приведены вспомогательные утверждения, в разделе 3 сформулирована и доказана теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений для последовательности $Y_{j,n} = a_{j,n} X_{j,n}$, в разделе 4 получена асимптотика больших уклонений в случае $a_{j,n} = f(j/n)$, в разделе 5 доказана условная функциональная предельная теорема.

2. Интегро-локальная теорема для больших уклонений сумм разнораспределённых случайных величин, образующих схему серий

Рассмотрим $Y_{1,n}, \ldots, Y_{n,n}$ — случайные величины с нерешётчатым распределением, образующие схему серий, $\mathbf{E}Y_{j,n} = 0$. Введём некоторые обозначения:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_{j,n}, \quad \sigma_{j,n}^2 = \mathbf{D}Y_{j,n}, \quad B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{j,n}^2.$$

Будем предполагать, что выполнено правостороннее условие Крамера.

(A) При некоторых $h^- < 0 < h^+$ выполнено

$$\mathbf{E}Y_{j,n}^2 e^{hY_{j,n}} < \infty \quad \text{при} \quad h \in [h^-, h^+].$$

Положим

$$R_{j,n}(h) := \mathbf{E}e^{hY_{j,n}}, \quad R_n(h) = \prod_{j=1}^{n} R_{j,n}(h),$$

$$m_{j,n}(h) = \big(\ln(R_{j,n}(h)\big)', \quad m_n(h) = \sum_{j=1}^{n} m_{j,n}(h),$$

$$m_n^- = \lim_{h \to h^- + 0} m_n(h), \quad m_n^+ = \lim_{h \to h^+ - 0} m_n(h),$$

$$\sigma_{j,n}^2(h) = \big(m_{j,n}(h)\big)', \quad B_n^2(h) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{j,n}^2(h).$$

Стоит отметить, что функция $m_n(h)$ строго возрастает на $[h^-, h^+]$ в пределах от m_n^- до m_n^+, $B_n^2(h)$ строго положительна.

Пусть $h_n = h_n(x)$ — решение уравнения $m_n(h) = x$. Существование и единственность h_n при $x \in [m_n^-, m_n^+]$ вытекают из строгой монотонности функции $m_n(h)$.

Рассмотрим преобразование Крамера для случайной величины $Y_{j,n}$ с параметром h:

$$\mathbf{P}\big(Y_{j,n}^{(h)} \in dx\big) = \frac{e^{hx}\mathbf{P}(Y_{j,n} \in dx)}{R_{j,n}(h)}, \quad \mathbf{P}\big(S_n^{(h)} \in dx\big) = \frac{e^{hx}\mathbf{P}(S_n \in dx)}{R(h)},$$

соответствующие величины назовём сопряжёнными с параметром h.

Потребуем выполнение следующих условий.

(B) Существуют $0 < c_1 < c_2 < \infty$, такие что при всех n и $h \in [h^-, h^+]$

$$c_1 \leqslant \bar{\sigma}_n(h) \leqslant c_2, \quad \bar{\sigma}_n^2(h) = \max_{j \leqslant n} \sigma_{j,n}^2(h).$$

(C) Последовательность $B_n(h)$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$ и всех $h \in [h^-, h^+]$.

(D) Последовательность $\{(Y_{j,n}^{(h)} - \mathbf{E}Y_{j,n}^{(h)})^2 \sigma_{j,n}^{-2}(h)\}$ равномерно интегрируема при всех $h \in [h^-, h^+]$: существует такая функция $b(N) \downarrow 0$, $N \uparrow \infty$, что

$$\max_{j \leqslant n} \mathbf{E}\left(\left(\frac{Y_{j,n}^{(h)} - m_{j,n}(h)}{\sigma_{j,n}(h)}\right)^2; \frac{|Y_{j,n}^{(h)}|}{\sigma_{j,n}(h)} > N\right) \leqslant b(N).$$

При заданных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ положим

$$q_{j,n}^{(h)}(\varepsilon, N) := \sup_{\varepsilon < |t| < N} |\varphi_{j,n}^{(h)}(t)|, \quad \varphi_{j,n}^{(h)}(t) := \mathbf{E}e^{itY_{j,n}^{(h)}}.$$

(E) При любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$

$$\sup_{h \in [h^-, h^+]} B_n(h) \prod_{j=1}^{n} q_{j,n}^{(h)}(\varepsilon, N) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема A [2]. *Пусть $Y_{1,n}, \ldots, Y_{n,n}$ — случайные величины с нерешётчатым распределением, образующие схему серий, $\mathbf{E}Y_{j,n} = 0$, удовлетворяющие условиям* (A)—(E). *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi} B_n(h_n)} \exp(-x h_n + \ln R_n(h_n))(1 + o(1)), \quad n \to \infty,$$

при всех Δ_n, достаточно медленно стремящихся к 0, причём остаточный член $o(1)$ равномерен по $x \in [m_n^-, m_n^+]$.

Для удобства введём обозначение

$$\Delta_n[x) := [x, x + \Delta_n).$$

Замечание 1. Пусть h_n — некоторая последовательность, лежащая в $[h^-, h^+]$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n^{(h_n)} \in \Delta_n[x)) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi} B_n(h_n)} \exp\left(-\frac{x^2}{2B_n^2(h_n)}\right)(1 + o(1)), \quad n \to \infty,$$

при всех Δ_n, достаточно медленно стремящихся к 0, причём остаточный член $o(1)$ равномерен по $|x - m_n(h)| < K\sqrt{n}$ для некоторого K. Иначе говоря, асимптотика

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} \in \Delta_n[x)) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi} B_n(h)} \exp\left(-\frac{x^2}{2B_n^2(h)}\right)(1 + o(1)), \quad n \to \infty,$$

равномерна по $h \in [h^-, h^+]$.

Замечание 2. Теорема A в [2] формулируется при выполнении только правостороннего условия Крамера, т. е. при $h \in [0, h^+]$. Приведённая формулировка при $h \in [h^-, 0]$ вытекает отсюда применением результатов [2] к последовательности $\{-Y_{j,n}\}$, $j = 1, \ldots, n$.

3. Интегро-локальная теорема для больших уклонений взвешенных сумм независимых одинаково распределённых случайных величин

Предположим, что случайные величины $Y_{j,n}$ имеют вид $a_{j,n}X_{j,n}$, где $a_{j,n}$, $j \leqslant n$, — заданная последовательность положительных чисел, величины $X_{j,n}$, $j \leqslant n$, независимы при любом n и имеют одно и то же нерешётчатое распределение при всех j, n. Будем предполагать, что $\mathbf{E}X_{1,1} = 0$, $\mathbf{D}X_{1,1} = \sigma^2 < \infty$.

Пусть выполнены следущие условия.

(A*) $0 < A := \sup\limits_{j,n\in\mathbb{N}} a_{j,n} < \infty$.

(B*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{n} a_{j,n}^2 = \infty$.

(C*) При некоторых $H^- \leqslant 0 \leqslant H^+$ выполнены условия

$$\mathbf{E}X_{1,1}^2 e^{hX_{1,1}} < \infty, \quad h \in [H^-, H^+].$$

Аналогично предыдущему положим

$$R(h) := \mathbf{E}e^{hX_{1,1}} < \infty, \quad m(h) = \Big(\ln\big(R(h)\big)\Big)', \quad \sigma^2(h) = \big(m(h)\big)', \tag{1}$$

$$m_n(h) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n} m(a_{j,n}h), \quad B_n^2(h) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^2 \sigma^2(a_{j,n}h),$$

$$m_n^- = \lim_{h\to H^-/A} m_n(h), \quad m_n^+ = \lim_{h\to H+/A} m_n(h), \quad h_n = h_n(y) \colon m_n\big(h_n(y)\big) = y.$$

Как и прежде h_n существует и единственно при $y \in [m_n^-, m_n^+]$.

Теорема 1. *Пусть $X_{j,n}$ — одинаково распределённые случайные величины, образующие схему серий, имеющие нерешётчатое распределение с $\mathbf{E}X_{1,1} = 0$, $\mathbf{D}X_{1,1} = \sigma^2 < \infty$, удовлетворяющие условиям* (A*), (B*), (C*). *Тогда*

$$\mathbf{P}\big(S_n \in \Delta_n[x)\big) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi}B_n(h_n)} \exp\Big\{-h_n x + \sum_{j=1}^{n} \ln R(h_n a_{j,n})\Big\}\big(1 + o(1)\big)$$

при $n \to \infty$ и всех Δ_n, достаточно медленно стремящихся к 0, причём $o(1)$ равномерно по $x \in [m_n^-, m_n^+]$.

Доказательство. Проверим выполнение для $Y_{j,n}$ условий теоремы 1.

В условии (A) в качестве h^- и h^+ возьмём H^-/A и H^+/A соответственно.

Выполнение условий (B) и (C) гарантируется условиями (A*), (B*) ввиду неравенств

$$\max_{j\leqslant n} \sigma_{j,n}^2(h) = \max_{j\leqslant n} a_{j,n}^2 \sigma^2(a_{j,n}h) \in \Big[A^2 \min_{h\in[H^-,H^+]} \sigma^2(h), A^2 \max_{h\in[H^-,H^+]} \sigma^2(h)\Big],$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^2 \sigma^2(a_{j,n}h) \geqslant \min_{h\in[H^-,H^+]} \sigma^2(h) \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^2$$

и непрерывности положительной функции $\sigma^2(h)$ при $h \in [H^-, H^+]$.

Остаётся показать, что выполнены условия (D) и (E). При всех $h \in [H^-, H^+]$, $j \leqslant n$, верна оценка

$$\mathbf{E}\biggl(\biggl(\frac{X_{1,1}^{(a_{j,n}h)} - m(a_{j,n}h)}{\sigma(a_{j,n}h)}\biggr)^2; \frac{|X_{1,1}^{(a_{j,n}h)}|}{\sigma(a_{j,n}h)} > N\biggr) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\tilde h\in[H^-,H^+]} \frac{1}{\sigma^2(\tilde h)} \mathbf{E}\Bigl(\bigl(X_{1,1}^{(a_{j,n}h)} - m(H^-)\bigr)^2;\ X_{1,1}^{(a_{j,n}h)} > N \min_{\tilde h\in[H^-,H^+]} \sigma(\tilde h)\Bigr) +$$
$$+ \max_{\tilde h\in[H^-,H^+]} \frac{1}{\sigma^2(\tilde h)} \mathbf{E}\Bigl(\bigl(X_{1,1}^{(a_{j,n}h)} - m(H^+)\bigr)^2;\ X_{1,1}^{(a_{j,n}h)} < -N \min_{\tilde h\in[H^-,H^+]} \sigma(\tilde h)\Bigr).$$

Здесь оба математических ожидания стремятся к 0 при $N \to \infty$ в силу условия (C*), конечности $m(H^-)$ и $m(H^+)$ и неравенства

$$\max_{\tilde h\in[H^-,H^+]} \frac{1}{\sigma^2(\tilde h)} \mathbf{E}\Bigl(\bigl(X_{1,1}^{(a_{j,n}h)}\bigr)^2;\ X_{1,1}^{(a_{j,n}h)} > N \min_{\tilde h\in[H^-,H^+]} \sigma(\tilde h)\Bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\tilde h\in[H^-,H^+]} \frac{1}{\sigma^2(\tilde h) R(\tilde h)} \mathbf{E}\Bigl(X_{1,1}^2 e^{X_{1,1}H^+}; X_{1,1} > N \min_{[H^-,H^+]} \sigma^2(h)\Bigr).$$

Условие (E) выполняется в силу неравенства $q_{j,n}^{(h)} < q < 1$ [3, гл. 9, теорема 3.1] и неравенства

$$B_n(h) < \sqrt{n} A \max_{h\in[0,H]} \sigma(h). \qquad \square$$

Аналогичный результат можно получить в случае, когда $a_{j,n}$ имеют произвольные знаки. Предположим, что вместо (A*), (C*) выполнены следующие условия.

(A**) Пусть $-\infty < a := \inf_{j,n\in\mathbb{N}} a_{j,n} < 0 < \sup_{j,n\in\mathbb{N}} a_{j,n} =: A < \infty$.

(C**) При некоторых $H^- < 0 < H^+$ выполнено

$$\mathbf{E} X_{1,1}^2 e^{hX_{1,1}} < \infty, \quad h \in [H^-, H^+].$$

Определим как прежде величины $R(h)$, $m(h)$, $m_n(h)$, $B_n^2(h)$ и положим

$$m_n^+ = \lim_{h\to\min(H^+/A,H^-/a)} m_n(h), \quad m_n^- = \lim_{h\to\max(H^+/a,H^-/A)} m_n(h). \tag{2}$$

Пусть $h_n = h_n(x)$ — единственное решение уравнения $m_n(h) = x$ при $x \in [m_n^-, m_n^+]$.

Теорема 2. *Пусть $X_{j,n}$ — одинаково распределённые случайные величины, образующие схему серий, имеющие нерешётчатое распределение с $\mathbf{E}X_{1,1} = 0$, удовлетворяющие условиям* (A**), (B*), (C**). *Тогда*

$$\mathbf{P}\bigl(S_n \in \Delta_n[x)\bigr) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi} B_n(h_n)} \exp\Bigl\{-h_n x + \sum_{j=1}^{n} \ln R(h_n a_{j,n})\Bigr\}\bigl(1 + o(1)\bigr)$$

при $n \to \infty$ и всех Δ_n, стремящихся к нулю достаточно медленно. При этом $o(1)$ равномерно мало по $x \in [m_n^-, m_n^+]$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Отметим, что если среди $a_{j,n}$ присутствуют нулевые, то теорема A напрямую неприменима, но нетрудно видеть, что исключение нулевых слагаемых не меняет правой части интегро-локальной теоремы.

4. Случай функционально заданных весов

Рассмотрим случай, когда весовые коэффициенты являются значениями заданной функции в узловых точках, т. е.

$$a_{j,n} = f\left(\frac{j}{n}\right), \quad f \in C^2[0,1], \quad a = \inf_{x\in[0,1]} f(x), \quad A = \sup_{x\in[0,1]} f(x). \tag{3}$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n(h)}{n} = \int_0^1 f(y) m\big(hf(y)\big)\, dy.$$

Положим

$$m^- = \lim_{h\to\max(H^+/a, H^-, a)} \int_0^1 f(y) m\big(hf(y)\big)\, dy,$$

$$m^+ = \lim_{h\to\min(H^+/A, H^-/a)} \int_0^1 f(y) m\big(hf(y)\big)\, dy.$$

Пусть $h_{x/n}$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^1 f(y) m\big(hf(y)\big)\, dy = \frac{x}{n}, \tag{4}$$

которое существует и единственно в силу монотонности функции в левой части.

Теорема 3. *Пусть $X_{j,n}$ — одинаково распределённые случайные величины, образующие схему серий, имеющие нерешётчатое распределение с $\mathbf{E}X_{1,1} = 0$, удовлетворяющие условию* (C**), *$a_{j,n}$ заданы соотношением* (3). *Тогда*

$$\mathbf{P}\big(S_n \in \Delta_n[x]\big) \sim \frac{\Delta_n C(h_{x/n})}{\sqrt{2\pi n} B(h_{x/n})} \exp\Big\{-h_{x/n}x + n\int_0^1 \ln R\big(h_{x/n} f(x)\big)\, dx\Big\}$$

при $n \to \infty$ и всех Δ_n, стремящихся к 0 достаточно медленно, причём эквивалентность равномерна по $x/n \in [m^-, m^+]$, а $C(h)$ и $B(h)$ определены в (8) *и* (9) *соответственно.*

Замечание 3. Если функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода в точках $x_1, \ldots, x_m$ и принадлежит классу дважды гладких на интервалах непрерывности, а вторая производная в крайних точках интервалов имеет односторонние пределы, то множитель $C(h)$ имеет вид

$$\sqrt{\prod_{j=0}^{n} \frac{R\big(hf(x_{j+1}-0)\big)}{R\big(hf(x_j+0)\big)}},$$

где $x_0 = 0$, $x_{m+1} = 1$.

Доказательство. Заметим, что в силу непрерывности f условия (A**), (B*) выполнены и к последовательности применима теорема 2:

$$\mathbf{P}\big(S_n \in \Delta_n[x)\big) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi} B_n\big(h_n(x)\big)} \exp\bigg\{-h_n(x)x + \sum_{j=1}^{n} \ln R(h_n(x)a_{j,n})\bigg\}.$$

Используя разложение некоторой дважды гладкой функции $g(x)$ в ряд Тейлора, получаем равенство

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 f(x)m\big(hf(x)\big)\,dx + \frac{f(1)m\big(hf(1)\big) - f(0)m\big(hf(0)\big)}{2n} = \frac{x}{n},$$

единственное решение которого обозначим $\mathring{h}$. Положим

$$F(h) := \int_0^1 f(x)m\big(hf(x)\big)\,dx - \frac{x}{n}.$$

Рассмотрим функцию F в точке $\mathring{h}$:

$$F(\mathring{h}) = \frac{f(0)m\big(\mathring{h}f(0)\big) - f(1)m\big(\mathring{h}f(1)\big)}{2n} =: \frac{v}{n}.$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции F^{-1} и получим, что

$$\mathring{h} = F^{-1}\left(\frac{v}{n}\right) = F^{-1}(0) + \frac{v}{n}(F^{-1})'(0) + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{n^2}(F^{-1})''\left(\frac{\tilde{v}}{n}\right)$$

для некоторого $\tilde{v} \in (0, v)$. Отсюда имеем

$$\mathring{h} = h_{x/n} + \frac{D}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{6}$$

где
$$D = \frac{f(0)m\big(\mathring{h} f(0)\big) - f(1)m\big(\mathring{h} f(1)\big)}{2F'(h_{x/n})}.$$

Величина $O(1/n^2)$ в (6) равномерно мала по $x/n \in [m^-, m^+]$, так как v ограничено, а
$$(F^{-1})''\left(\frac{\tilde{v}}{n}\right) = -\frac{F''(h')}{(F')^3(h')}$$
при некотором $h' \in [h_{x/n}, \mathring{h}]$. Проведя аналогичные рассуждения, получаем
$$h_n = \mathring{h} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = h_{x/n} + \frac{D}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{7}$$
где величина $O(1/n^2)$ равномерно мала по $x/n \in [m^-, m^+]$. Пользуясь разложением функции $\ln R(h)$ в ряд Тейлора в точке $h_{x/n}$ и соотношениями (5), (7), получаем
$$\exp\{-h_n(x)x\} \sim \exp\left\{-h_{x/n}x - \frac{Dx}{n}\right\},$$
$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \ln R\left(h_n(x) f\left(\frac{j}{n}\right)\right)\right\} \sim$$
$$\sim \exp\left\{n\int_0^1 \ln R\big(h_{x/n} f(s)\big)\, ds + \frac{Dx}{n}\right\}\sqrt{\frac{R\big(h_{x/n} f(1)\big)}{R\big(h_{x/n} f(0)\big)}}.$$

Таким образом, полагая
$$C(h) := \sqrt{\frac{R\big(hf(1)\big)}{R\big(hf(0)\big)}}, \tag{8}$$
имеем
$$\mathbf{P}\big(S_n \in \Delta_n[x)\big) \sim \frac{\Delta_n C(h_{x/n})}{\sqrt{2\pi n} B_n(h_{x/n})} \exp\left\{-h_{x/n}x + n\int_0^1 \ln R\big(h_{x/n} f(y)\big)\, dy\right\}.$$
Остаётся заметить, что
$$B_n^2(h) = \sum_{j=1}^{n} f^2\left(\frac{i}{n}\right)\sigma^2\left(hf\left(\frac{i}{n}\right)\right) \sim n\int_0^1 f^2(s)\sigma^2\big(hf(s)\big)\, ds.$$
Положим
$$B^2(h) := \int_0^1 f^2(s)\sigma^2\big(hf(s)\big)\, ds. \tag{9}$$
Теорема 2 доказана. □

Замечание 4. В условиях теоремы 3 справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\big(S_n \in \Delta_n[x+z]\big) \sim \mathbf{P}\big(S_n \in \Delta_n[x]\big) \exp\left\{-h_{x/n}z - \frac{z^2}{2nB^2(h_{x/n})}\right\},$$

где $h_{x/n}$ — решение уравнения (4). Асимптотика равномерна по $x/n \in [m^-, m^+]$ и $|z| < b_n$, где $b_n = O(\sqrt{n})$.

Доказательство. С помощью соотношения

$$F\big(h_{(x+z)/n}\big) = \int\limits_0^1 f(y)m\big(h_{(x+z)/n}f(y)\big)\,dy - \frac{x}{n} = \frac{z}{n} \tag{10}$$

выразим $h_{(x+z)/n}$ через $h_{x/n}$:

$$h_{(x+z)/n} = h_{x/n} + (F^{-1})'(0)\frac{z}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = h_{x/n} + B_n(h_{x/n})^{-2}\frac{z}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int\limits_0^1 \ln R\big(h_{(x+z)/n}f(s)\big)\,ds = \int\limits_0^1 \ln R\big(h_{x/n}f(s)\big)\,ds + \big(h_{(x+z)/n} - h_{x/n}\big) \times$$

$$\times \int\limits_0^1 f(s)m\big(h_{x/n}f(s)\big)\,ds + \frac{\big(h_{(x+z)/n} - h_{x/n}\big)^2}{2}B^2(h_{x/n}) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

где $(F^{-1})'(0) = 1/F'(h_{x/n}) = B^{-2}(h_{x/n})$. В силу определения $h_{x/n}$

$$\big(h_{(x+z)/n} - h_{x/n}\big)\int\limits_0^1 f(s)m\big(h_{x/n}f(s)\big)\,ds = \big(h_{(x+z)/n} - h_{x/n}\big)\frac{x}{n}.$$

Тогда

$$h_{(x+z)/n}(x+z) - n\int\limits_0^1 \ln R\big(h_{(x+z)/n}f(s)\big)\,ds =$$

$$= h_{x/n}(x+z) + (h_{x+z}/n - h_{x/n})\frac{z}{n} -$$

$$- \int\limits_0^1 \ln R\big(h_{x/n}f(s)\big)\,ds - \frac{\big(h_{(x+z)/n} - h_{x/n}\big)^2}{2}B^2(h_{x/n}) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Применяя к $\mathbf{P}\big(S_n \in \Delta_n[x+z]\big)$ теорему 3 и используя непрерывность функций $B(h)$ и $C(h)$ по h, имеем требуемое утверждение. □

5. Функциональная предельная теорема

Рассмотрим $D[0,1]$ — пространство непрерывных справа функций на отрезке $[0,1]$ с топологией Скорохода. Определим для $x \in D[0,1]$ и $\delta > 0$

$$\omega_x(\delta) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1-\delta} \sup_{t,s \in [t,t+\delta]} \{|x(s) - x(t)|\}.$$

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема B [1, гл. 3, теорема 15.5]. *Пусть* $\mathbf{P}$, $\{\mathbf{P}_n\}$ *— вероятностные меры на пространстве* $D[0,1]$. *Предположим, что*

1) *при каждом положительном* η *существует* a, *такое что*

$$\mathbf{P}_n(x\colon |x(0)| > a) \leqslant \eta, \quad n \geqslant 1;$$

2) *при любых положительных* ε *и* η *существуют* $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ *и* n_0, *такие что*

$$\mathbf{P}_n(x\colon \omega_x(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \eta, \quad n \geqslant n_0.$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{P}_n\}$ *плотна, и если* $\mathbf{P}$ *— слабый предел подпоследовательности* $\{\mathbf{P}_{n'}\}$, *то* $\mathbf{P}$ *сосредоточена на множестве процессов с непрерывными траекториями.*

Пусть $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$ — одинаково распределённые случайные величины, образующие схему серий, удовлетворяющие условию (С**), функция $f \in C^2[0,1]$ имеет минимум a и максимум A. Обозначим значения в узловых точках $a_{j,n} = f(j/n)$. Положим

$$M(h,t) = \int\limits_0^t f(s) m\bigl(hf(s)\bigr)\, ds, \quad B^2(h,t) = \int\limits_0^t f^2(s)\sigma^2\bigl(hf(s)\bigr)\, ds. \tag{11}$$

Рассмотрим случайный процесс

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]} - nM(h_\theta, t)}{\sqrt{n} B(h_\theta, 1)},$$

где S_n определяется как и прежде, и положим

$$F(h,t) = \frac{\int_0^t \bigl(f(x)\sigma\bigl(hf(x)\bigr)\bigr)^2\, dx}{\int_0^1 \bigl(f(x)\sigma\bigl(hf(x)\bigr)\bigr)^2\, dx}.$$

Теорема 4. *Пусть* $X_{i,j}$ *удовлетворяют условию* (С**). *Тогда*

$$\mathbf{P}\bigl(Y_n \in \cdot\, | S_n \in \Delta_n[\theta n]\bigr) \to \mathbf{P}_{W_F^0}(\cdot), \quad n \to \infty, \tag{12}$$

при Δ_n, *достаточно медленно стремящихся к нулю, причём сходимость в* (12) *равномерна по* $\theta \in [m^-, m^+]$. *Здесь* $\mathbf{P}_{W_F^0}$ *— мера, заданная на* $D[0,1]$ *процессом* $W^0_{F(h_\theta,t)}$, W_t^0 *— броуновский мост.*

Доказательство теоремы 4 проводится в два этапа: в лемме 2 доказывается сходимость конечномерных распределений, в лемме 3 — плотность мер. Лемма 1 является вспомогательной. Из этих лемм согласно теореме Прохорова [1, гл. 1, теорема 6.1] следует слабая сходимость.

Лемма 1. *Распределение величины* $\bigl(S_n^{(h)} - m_n(h)\bigr)/B_n(h)$ *слабо сходится к стандартному нормальному распределению равномерно по* $h \in [H^-, H^+]$.

Доказательство. Рассмотрим вероятность попадания величины $\bigl(S_n^{(h)} - m_n(h)\bigr)/B_n(h)$ в отрезок $[a, b]$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\frac{S_n^{(h)} - m_n(h)}{B_n(h)} \in [a, b]\right) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{[(b-a)B_n(h)/\Delta_n]-1} \mathbf{P}\left(\frac{S_n^{(h)} - m_n(h)}{B_n(h)} \in \Delta_n[a + k\Delta_n)\right) + o\left(\frac{\Delta_n}{B_n(h)}\right) = \\
&\quad = \bigl(1 + o(1)\bigr) \sum_{k=0}^{[(b-a)B_n(h)/\Delta_n]-1} \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi}B_n(h)} \times \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{\bigl(m_n(h) + aB_n(h) + k\Delta_n - m_n(h)\bigr)^2}{2B_n^2(h)}\right\} = \\
&\quad = \bigl(1 + o(1)\bigr) \sum_{k=0}^{[(b-a)B_n(h)/\Delta_n]-1} \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi}B_n(h)} \exp\left\{-\frac{\bigl(a + (k\Delta_n)/B_n(h)\bigr)^2}{2}\right\} = \\
&\quad = \Phi(b) - \Phi(a) + o(1).
\end{aligned}
$$

Здесь асимптотика равномерна по $h \in [H^-, H^+]$ согласно замечанию 1 к теореме A. □

Лемма 2. *Пусть* $t_1, \ldots, t_k \in [0, 1]$. *Тогда*

$$
\mathbf{P}\bigl(Y_n(t_j) \in A_j,\ j = 1, \ldots, k \mid S_n \in \Delta_n[x)\bigr) \to \mathbf{P}\bigl(W^0_{F(h_\theta, t_j)} \in A_j,\ j = 1, \ldots, k\bigr),
$$

для произвольных отрезков $A_1, \ldots, A_k$ *равномерно по* $x/n \in [m^-, m^+]$.

Доказательство. Для краткости положим $M_t = M(h_{x/n}, t)$, $B_t^2 = B^2(h_{x/n}, t)$, $F(t_j) = F(h_{x/n}, t_j)$. Рассмотрим вероятность

$$
\mathbf{P}\bigl(Y_n(t_j) \in A_j,\ j = 1, \ldots, k \mid S_n \in \Delta_n[x)\bigr) \tag{13}
$$

и положим

$$
G := \{Y_n(t_j) \in A_j,\ j = 1, \ldots, k - 1\}.
$$

Представим вероятность (13) в интегральном виде:

$$\mathbf{P}\big(S_n \in \Delta_n[x)\big)^{-1} \int\limits_{A_k} \mathbf{P}\left(G, \frac{S_{[nt_k]} - nM_{t_k}}{\sqrt{n}B_1} \in dx_k\right) \times$$
$$\times\, \mathbf{P}\Bigg(\sum_{j=[nt_k]+1}^{n} a_{j,n} X_{j,n} \in \Delta_n[x - x_k B_1 \sqrt{n} - nM_{t_k})\Bigg). \quad (14)$$

По замечанию 4 последний множитель (14) представим в виде

$$\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n(B_1^2 - B_{t_k}^2)}} \exp\Bigg(h(x - nM_{t_k}) - n \int\limits_{t_k}^{1} \ln R\big(hf(s)\big)\, ds \Bigg) e^{hx_k B_1 \sqrt{n}} e^{-h^2 x_k^2 B_1^2 / B_{t_k}^2}, \quad (15)$$

где h — решение уравнения

$$\int\limits_{t_k}^{1} f(s) m\big(f(s)h\big)\, ds = \frac{x}{n} - M_{t_k}. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что $h_{x/n}$ по определению является решением этого уравнения.

Пусть

$$G^{(h)} := \Big\{ Y_n^{(h)}(t_j) \in A_j,\ j = 1, \ldots, k-1 \Big\}.$$

Тогда выражение (14) переписывается в виде

$$\int\limits_{A_k} \mathbf{P}\big(G^{(h_{x/n})},\ Y_n^{(h_{x/n})}(t_k) \in dx_k\big) \frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 - B_{t_k}^2}} \exp\left\{ -\frac{x_k^2 B_1^2}{2(B_1^2 - B_{t_k}^2)} \right\}. \quad (17)$$

Заметим, что

$$Y_n^{(h_n(x))}(t_j) - Y_n^{(h_n(x))}(t_{j-1}) =$$
$$= \frac{\sum\limits_{i=[nt_{j-1}]+1}^{[nt_j]} \Big(a_{i,n} X_{i,n}^{(a_{i,n} h_n(x))} - a_{i,n} m\big(a_{i,n} h_n(x)\big)\Big)}{B_n\big(h_n(x)\big)} \frac{B_n\big(h_n(x)\big)}{\sqrt{n} B(h_\theta, 1)} + r_n, \quad (18)$$

где

$$r_n = \frac{\sum\limits_{i=[nt_{j-1}]+1}^{[nt_j]} a_{i,n} m\big(a_{i,n} h_n(x)\big) - n \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} f(s) m\big(hf(s)\big)\, ds}{\sqrt{n} B(h_\theta, 1)}.$$

Первое слагаемое (18) сходится по распределению к величине $\mathcal{N}\big(0, F(t_j) - F(t_{j-1})\big)$ равномерно по $x/n \in [m^-, m^+]$ в силу леммы 1, а второе — к нулю. Таким образом, вектор

$$\big(Y_n^{(h_n(x)}(t_j) - Y_n^{(h_n(x)}(t_{j-1}),\ j \leqslant k\big),$$

а следовательно и вектор

$$\left(Y_n^{(h_{x/n})}(t_j) - Y_n^{(h_{x/n})}(t_{j-1}),\ j \leqslant k\right),$$

сходится по распределению к вектору из независимых величин $\mathcal{N}\big(0, F(t_j) - F(t_{j-1})\big)$. Следовательно, интеграл (17) сходится к

$$\int\limits_{A_1} \cdots \int\limits_{A_k} \frac{\exp\left(-\frac{x_1^2}{2F(t_1)} - \cdots - \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(F(t_k) - F(t_{k-1}))} - \frac{x_k^2}{2\left(1 - F(t_k)\right)}\right) dx_1 \cdots dx_k}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{F(t_1)\big(F(t_2) - F(t_1)\big) \ldots \big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big)\big(1 - F(t_k)\big)}}$$

как интеграл от непрерывной и ограниченной на $A_1 \times \cdots \times A_k$ функции. Здесь мы воспользовались тем, что $P\big(W^0_{F(t_j)} \in \partial A_j,\ j = 1, \ldots, k\big) = 0$. Лемма 2 доказана. $\square$

Лемма 3. *Последовательность мер* $\mathbf{P}\big(Y_n \in (\cdot) \mid S_n \in \Delta_n[\theta n)\big)$ *плотна.*

Доказательство. Для удобства введём множества

$$C_1 = \left\{t, s \in \left[\frac{1}{2} - \delta, 1\right] : |t - s| < \delta\right\}, \quad C_2 = \left\{t, s \in \left[0, \frac{1}{2} + \delta\right] : |t - s| < \delta\right\}.$$

Рассмотрим вероятность

$$\mathbf{P}\left(\sup_{|t-s|<\delta} |Y_n(s) - Y_n(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \;\middle|\; S_n \in \Delta_n[\theta n)\right) \tag{19}$$

и оценим её сверху суммой вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s,t \in C_1} |Y_n(s) - Y_n(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \;\middle|\; S_n \in \Delta_n[\theta n)\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\sup_{s,t \in C_2} |Y_n(s) - Y_n(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \;\middle|\; S_n \in \Delta_n[\theta n)\right). \tag{20}$$

Разобьём первую вероятность в (20) на две части, соответствующие событиям $|Y_n(1) - Y_n(1/2 - \delta)| > n^{3/5}$ и $|Y_n(1) - Y_n(1/2 - \delta)| \leqslant n^{3/5}$. Вероятность первой из них стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку по лемме 2

$$\mathbf{P}\left(\left|Y_n(1) - Y_n\left(\frac{1}{2} - \delta\right)\right| > n^{3/5} \;\middle|\; S_n \in \Delta_n[\theta n)\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для оценки вероятности второй части используем оценку

$$\int\limits_{-n^{3/5}}^{n^{3/5}} \mathbf{P}\left(\sup_{s,t \in C_1} |Y_n(s) - Y_n(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},\ Y_n(1) - Y_n\left(\frac{1}{2} - \delta\right) \in dy,\ S_n \in \Delta_n[\theta n)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-n^{3/5}}^{n^{3/5}} \mathbf{P}\left(\sup_{s,t \in C_1} |Y_n(s) - Y_n(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},\ Y_n(1) - Y_n\left(\frac{1}{2} - \delta\right) \in dy\right) \times$$

$$\times \mathbf{P}\left(S_{[n(1/2-\delta)]} \in \Delta_n\left[\theta n - B_1 y - (M_1 - M_{1/2-\delta})\right)\right).$$

По замечанию 4 и теореме 3 полученное выражение не превосходит

$$\frac{B_1}{B_{1/2-\delta}} \int\limits_{-n^{3/5}}^{n^{3/5}} \mathbf{P}\biggl(\sup_{s,t\in C_1} |Y_n(s)-Y_n(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},\ Y_n(1)-Y_n\left(\frac{1}{2}-\delta\right) \in dy\biggr) \times$$

$$\times \exp\biggl\{h_\theta y B_1 + h_\theta(M_1 - M_{1/2-\delta}) - \frac{y^2B_1^2}{2B_{1/2-\delta}^2} - n\int\limits_{1/2-\delta}^{1} \ln R\bigl(h_\theta f(s)\bigr)\,ds\biggr\}.$$

Следовательно, первое слагаемое (20) не превосходит

$$\frac{B_1}{B_{1/2-\delta}}\mathbf{P}\biggl(\sup_{|t-s|<\delta}\bigl|Y_n^{(h_\theta)}(s)-Y_n^{(h_\theta)}(t)\bigr| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},\ \left|Y_n^{(h_\theta)}(1)-Y_n^{(h_\theta)}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\right| \leqslant n^{3/5}\biggr).$$

Случай $t+\delta \leqslant 1/2$ рассматривается аналогично с использованием $Y_n(1/2+\delta)$ вместо $Y_n(1)-Y_n(1/2-\delta)$. В этом случае вместо множителя $B_1/B_{1/2-\delta}$ возникнет $B_1/(B_1^2-B_{1/2+\delta}^2)^{1/2}$. Возьмём максимум из этих двух величин и ограничим сверху константой L.

Положим $t_i = i\delta$, $i = 1,\ldots,r-1$ для $r=[1/\delta]$, $t_0=0$, $t_r=1$. По следствию из теоремы 8.3 из [1] имеем следующую оценку:

$$\mathbf{P}\biggl(\sup_{|t-s|<\delta}\bigl|Y_n^{(h_\theta)}(s)-Y_n^{(h_\theta)}(t)\bigr| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r}\mathbf{P}\biggl(\sup_{t_{i-1}\leqslant s\leqslant t_i}\bigl|Y_n^{(h_\theta)}(s)-Y_n^{(h_\theta)}(t_{i-1})\bigr| \geqslant \frac{\varepsilon}{6}\biggr).$$

Введём обозначение

$$\tilde{X}_{j,n}^{(a_{j,n}h_\theta)} = a_{j,n}X_{j,n}^{(a_{j,n}h_\theta)} - a_{j,n}m(a_{j,n}h_\theta), \quad \widetilde{X}_{0,0}^{(a_{j,n}h_\theta)} = 0.$$

Каждое слагаемое в сумме оценим сверху суммой вероятностей:

$$\mathbf{P}\biggl(\sup_{t_{i-1}\leqslant s\leqslant t_i}\biggl|\sum_{j=[nt_{i-1}]+1}^{[ns]}\tilde{X}_{j,n}^{(a_{j,n}h_\theta)}\biggr| \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}B(h_\theta,1)}{12}\biggr) +$$

$$+ I\biggl(\sup_{t_{i-1}\leqslant s\leqslant t_i}\biggl|n\int\limits_{t_{i-1}}^{s} f(x)m\bigl(h_\theta f(x)\bigr)\,dx - \sum_{j=[nt_{i-1}]+1}^{[ns]} a_{j,n}m(a_{j,n}h_\theta)\biggr| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}B(h_\theta,1)}{12}\biggr),$$

где $I(A)$ — индикатор события A. Рассмотрим величину под знаком супремума в индикаторе и оценим её сверху величиной $\max\limits_{[0,1]}\bigl(f(x)m\bigl(h_\theta f(x)\bigr)\bigr)'\delta/2$. Из этой оценки видно, что индикатор при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно малом δ равен 0.

Для оценки первого слагаемого воспользуемся неравенством Этемади [4, теорема 22.5]:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t_{i-1}\leqslant s\leqslant t_i}\left|\sum_{j=[nt_{i-1}]+1}^{[ns]}\tilde{X}_{j,n}^{(a_{j,n}h_\theta)}\right|\geqslant\frac{\varepsilon\sqrt{n}B(h_\theta,1)}{12}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 3\sup_{t_{i-1}\leqslant s\leqslant t_i}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{j=[nt_{i-1}]+1}^{[ns]}\tilde{X}_{j,n}^{(a_{j,n}h_\theta)}\right|\geqslant\frac{\varepsilon\sqrt{n}B(h_\theta,1)}{36}\right),$$

где правая часть не превосходит

$$3\sup_{t_{i-1}\leqslant s\leqslant t_i}\mathbf{P}\left(\frac{\left|\sum\limits_{j=[nt_{i-1}]+1}^{[ns]}\tilde{X}_{j,n}^{(a_{j,n}h_\theta)}\right|}{\sqrt{B^2_{ns}(h_\theta)-B^2_{nt_{i-1}}(h_\theta)}}\geqslant\frac{\varepsilon\sqrt{n}B(h_\theta,1)}{36\sqrt{B^2_{nt_i}(h_\theta)-B^2_{nt_{i-1}}(h_\theta)}}\right). \qquad (21)$$

По лемме 1 вероятность под знаком супремума эквивалентна

$$2\left(1-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}B(h_\theta,1)}{36\sqrt{n\delta\max\limits_{x\in[0,1]}f^2(x)\sigma^2(h_\theta x)}}\right)\right),$$

что в свою очередь эквивалентно

$$\frac{72\sqrt{\delta\max\limits_{x\in[0,1]}f^2(x)\sigma^2(h_\theta x)}}{\varepsilon B(h_\theta,1)}\exp\left\{-\frac{\big(\varepsilon B(h_\theta,1)\big)^2}{2\,36^2\delta\max\limits_{x\in[0,1]}f^2(x)\sigma^2(h_\theta x)}\right\}$$

при $\delta\to 0$. Следовательно, при любых η и ε, достаточно малом δ и достаточно больших n, имеем для вероятности (19) оценку сверху величиной η, что и означает выполнение условия теоремы B. $\square$

Литература

[1] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.

[2] Боровков А. А. Интегро-локальные и локальные теоремы о нормальных и больших уклонениях сумм разнораспределённых случайных величин в схеме серий // Теория вероятн. и её примен. — 2009. — Т. 54, № 4. — С. 625—644.

[3] Боровков А. А. Теория вероятностей. — М.: Либроком, 2016.

[4] Billingsley P. Probability and Measure. — New York: Wiley, 1995.

[5] Book S. Large deviation probabilities for weighted sums // Ann. Math. Stat. — 1972. — Vol. 43, no. 4. — P. 1221—1234.