Об области максимального притяжения преобразования нормальной случайной величины

В. В. ТРОШИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vikttrosh@gmail.com

УДК 519.214.6

Ключевые слова: большие выбросы, дискретное время, распределение максимума, область максимального притяжения, правильно меняющаяся функция.

Аннотация

Рассматриваются предельные распределения максимума независимых копий преобразования гауссовской случайной величины. Найдены критерии принадлежности таких величин областям максимального притяжения Фреше и Вейбулла. Приведены также простые достаточные условия.

Abstract

V. V. Troshin, On maximum domain of attraction for transformations of normal random variable, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 207—215.

Limit distributions of the maximum of independent copies of a transformation of a Gaussian random variable are studied. Sufficient and necessary conditions are found for the transformations belonging to Fréchet and Weibull maximum domains of attraction. Simple sufficient conditions are also given.

1. Введение

Нахождение вероятностей высоких выбросов является нередкой задачей при исследовании финансовых и экономических данных, а также в некоторых областях физики. Временны́е ряды с разными хвостами распределения удобно моделировать при помощи гауссовских временны́х рядов благодаря развитости техники работы с ними и зависимости простого вида между наблюдениями. В основе классической теории асимптотики экстремумов лежит следующая теорема.

Теорема 1 (теорема Гнеденко—Фишера—Типпета [2]). *Пусть* X_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — *последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Если найдутся последовательности констант* $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и невырожденная функция распределения* H, *такие что*

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{-1}(\max(X_1, \ldots, X_n) - d_n) \stackrel{d}{=} H,$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 207—215.

то H принадлежит к одному из трёх типов распределений:

распределение Фреше: $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

распределение Вейбулла: $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{-\alpha}\}, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

распределение Гумбеля: $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$

В таком случае мы говорим, что распределение X_i (или сама случайная величина X_i) лежит в области максимального притяжения распределения H.

Известны также условия на X_i, при которых максимумы сходятся к данному распределению H (см., например, [2]). В некоторых задачах теории экстремальных значений и статистики экстремумов, в частности связанных с экстремумами временны́х рядов, бывает удобно моделировать исследуемые случайные величины функциями от гауссовских случайных величин. В первую очередь это связано с условиями зависимости случайных величин, которые переходят в условия на их корреляции. Пусть $f(x)$ — неотрицательная функция. В [1] найдены достаточные условия для того, чтобы $f(X)$ принадлежало области максимального притяжения Фреше, где X — стандартная нормальная случайная величина. В настоящей работе мы найдём необходимые и достаточные условия для этого, также найдём аналогичные условия для области Вейбулла и достаточные условия для области Гумбеля.

2. Условия принадлежности $f(X)$ к области максимального притяжения Фреше

В этом разделе мы исследуем, когда функция $f(X)$ принадлежит области максимального притяжения Фреше, где X — стандартная нормальная гауссовская величина. Предположим, что функция $f(x)$ неограниченно возрастает с ростом x, причём начиная с некоторого x_0 она дважды дифференцируема и её первая производная не обращается в нуль, а также $f(x)$ ограничена сверху при $x < x_0$.

Определение 1. Функция $R(x)$ называется правильно меняющейся на бесконечности с показателем α, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(tx)}{R(x)} = t^\alpha \text{ для всех } t > 0. \tag{1}$$

Функция $R(x)$ называется правильно меняющейся в нуле с показателем α, если выполнено (1) при $x \to 0$. Функция $L(x)$ называется медленно меняющейся, если она правильно меняется с показателем 0.

Замечание 1. Очевидно, что правильно меняющаяся функция с показателем α есть произведение медленно меняющейся функции и x^α.

Мы будем говорить, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, если $f(x)/g(x) \to 1$ при $x \to x_0$.

Утверждение 1 [2]. *Распределение случайной величины принадлежит области максимального притяжения распределения Фреше с показателем α, если и только если хвост распределения эквивалентен на бесконечности некоторой правильно меняющейся функции $R(x)$ с показателем $-\alpha$. В дальнейшем в такой ситуации мы будем говорить, что случайная величина принадлежит* $\mathrm{FMDA}(\alpha)$.

В нашем случае это значит, что

$$P(f(X) > y) \sim R(y),$$

где $R(x)$ взята из определения 1. Это равносильно для больших y соотношению

$$P\big(X > f^{-1}(y)\big) \sim R(y).$$

Сделаем замену $z = f^{-1}(y)$. Тогда

$$P(X > z) \sim R\big(f(z)\big), \quad z \to \infty.$$

Поскольку

$$P(X > z) \sim \Psi(z) := \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \to \infty,$$

то достаточно найти такие функции f, что

$$\Psi(z) \sim R(f(z)), \quad z \to \infty.$$

Сформулируем главный результат этого раздела.

Теорема 2. *Пусть X — стандартная нормальная случайная величина, $f(x)$ — дважды дифференцируемая в выколотой окрестности бесконечности функция, причём первая её производная положительна. Тогда для того чтобы $P(f(X) > y)$ правильно менялась на бесконечности с отрицательным показателем $-\alpha$ (т. е. для того чтобы $f(X) \in \mathrm{FMDA}(\alpha)$), необходимо и достаточно, чтобы нашлась правильно меняющаяся в нуле с показателем $-1/\alpha$ функция $G(x)$, такая что*

$$G\big(\Psi(z)\big) \sim f(z).$$

Для доказательства нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 1 [4]. *Для любой правильно меняющейся на бесконечности функции $R(x)$ с показателем $\alpha > 0$ существует правильно меняющаяся на бесконечности функция $G(x)$ с показателем $1/\alpha$, такая что*

$$G\big(R(x)\big) \sim x, \quad R\big(G(x)\big) \sim x, \quad x \to \infty.$$

Лемма 2. *Для любой правильно меняющейся на бесконечности функции $R(x)$ с показателем $-\alpha$ ($\alpha > 0$) существует правильно меняющаяся в нуле функция $G(x)$ с показателем $-1/\alpha$, такая что*

$$G\big(R(x)\big) \sim x, \quad x \to \infty, \quad \text{и} \quad R\big(G(x)\big) \sim x, \quad x \to 0.$$

Доказательство. Правильно меняющиеся на бесконечности функции для достаточно больших x не обращаются в ноль. Функция $1/R(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем α. Тогда по лемме 1 существует асимптотически обратная к ней правильно меняющаяся функция $G_1(x)$ с показателем $1/\alpha$. Тогда можно взять $G(x) = G_1(1/x)$. $\square$

Лемма 3. *Для любой правильно меняющейся в нуле функции $G(x)$ с показателем $-\alpha$ ($\alpha > 0$) существует правильно меняющаяся на бесконечности функция $R(x)$ с показателем $-1/\alpha$, такая что*

$$R\big(G(x)\big) \sim x, \quad x \to 0, \quad \textit{и} \quad G\big(R(x)\big) \sim x, \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Правильно меняющиеся на бесконечности функции для достаточно маленьких x не обращаются в ноль. Рассмотрим функцию $G(1/x)$, правильно меняющуюся на бесконечности с показателем α. Для неё существует $R_1(x)$ из леммы 1 с показателем $1/\alpha$. Тогда можно взять $R(x) = 1/R_1(x)$. $\square$

Лемма 4. *Пусть строго положительная функция $R(x)$ правильно меняется в 0 (∞) и $g(x) \sim h(x)$ — такие функции, что*

$$\lim_{x\to 0\ (\infty)} g(x) = 0\ (\infty), \qquad \lim_{x\to 0\ (\infty)} h(x) = 0\ (\infty).$$

Тогда

$$R\big(g(x)\big) \sim R\big(h(x)\big), \quad x \to 0\ (\infty).$$

Доказательство. Возведение в степень и произведение, очевидно, сохраняют эквивалентность, поэтому достаточно доказать утверждение для произвольной строго положительной медленно меняющейся функции $L(x)$. (Правильно меняющаяся функция получается из медленно меняющейся умножением на x в некоторой степени.) Так как медленно меняющиеся функции не обращаются в ноль начиная с некоторого x_0, имеем

$$\frac{L\big(g(x)\big)}{L\big(h(x)\big)} = \frac{L\big(\big(g(x)/h(x)\big)h(x)\big)}{L\big(h(x)\big)}. \tag{2}$$

Так как $\lim g(x)/h(x) = 1$, то начиная с некоторого x $g(x)/h(x) \in [1/2, 3/2]$. Следовательно, из того что соотношение (1) для медленно меняющихся функций равномерно по t на любом отрезке [4], получаем, что предел правой части (2) равен единице. $\square$

Доказательство теоремы 2. Ранее было доказано, что утверждение теоремы эквивалентно

$$\Psi(z) \sim R\big(f(z)\big),$$

где R — правильно меняющаяся на бесконечности функция с показателем $-\alpha$.

Необходимость. Пусть $G(x)$ — асимптотически обратная к $R(x)$ функция (которая является правильно меняющейся по лемме 2). Так как правильно меняющиеся функции сохраняют эквивалентность, то

$$G\big(\Psi(z)\big) \sim G\big(R\big(f(z)\big)\big) \sim f(z).$$

Достаточность. Если $G\big(\Psi(z)\big) \sim f(z)$, то пусть $R(z)$ — асимптотически обратная к $G(x)$ функция (которая является правильно меняющейся по лемме 3). Тогда получаем, что

$$R\big(f(z)\big) \sim R\Big(G\big(\Psi(z)\big)\Big) \sim \Psi(z). \qquad \square$$

Замечание 2. Легко показать, что это условие можно представить в виде

$$f(x) \sim \exp\left\{\frac{x^2}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha}\ln\sqrt{2\pi}x + \ln L\big(\Psi(x)\big)\right\},$$

где $L(x)$ медленно меняется в нуле.

В [1] было доказано, что для функций вида

$$f(x) = C\exp\left\{\frac{x^2}{2\alpha} + H(x)\right\},$$

где

$$\frac{H'(x)}{x} \to 0, \quad \frac{H''(x)}{x^2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

верно $f(X) \in \mathrm{FMDA}(\alpha)$ (сравните это с предыдущим замечанием).

3. Условия принадлежности $f(X)$ к MDA Вейбулла

Теперь исследуем, когда функция $f(X)$ содержится в области максимального притяжения Вейбулла. Наш ход рассуждений будет практически копией доказательство для области Фреше. Предположим, что функция $f(x)$ стремится к $x_F < \infty$ с ростом x, причём начиная с некоторого x_0 она дважды дифференцируема и её первая производная не обращается в нуль, а также $f(x) < x_F - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ при $x < x_0$. Для начала приведём утверждение, на которое будем опираться.

Утверждение 2 [2]. *Функция распределения F принадлежит области максимального притяжения Вейбулла $\Psi(\alpha)$, $\alpha > 0$, тогда и только тогда, когда существует число $x_F < \infty$, такое что $\bar{F}(x_F - x^{-1}) = R(x)$, где $R(x)$ — некоторая правильно меняющаяся на бесконечности функция с показателем $-\alpha$.*

В нашем случае это равносильно

$$P(f(X) > x_F - x^{-1}) \sim R(x), \quad x \to \infty.$$

Сделав замену $z = f^{-1}(x_F - x^{-1})$, получим

$$\Psi(z) \sim R\left(\frac{1}{x_F - f(z)}\right), \quad z \to \infty,$$

где

$$\Psi(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{z\sqrt{2\pi}}.$$

Теорема 3. *Пусть X — стандартная нормальная случайная величина, $f(x)$ — дважды дифференцируемая для всех $x > x_0$ функция с положительной первой производной. Для того чтобы функция $f(X)$ принадлежала области максимального притяжения Вейбулла $\Psi(\alpha)$, $\alpha > 0$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$x_F - f(z) \sim G\bigl(\Psi(z)\bigr),$$

где $G(x)$ — правильно меняющаяся в нуле функция с показателем $1/\alpha$.

Доказательство. Выше было показано, что это равносильно

$$\Psi(z) \sim P\left(\frac{1}{x_F - f(z)}\right), \quad z \to \infty.$$

Необходимость. Применяя лемму 2, получаем

$$G_1\bigl(\Psi(z)\bigr) \sim \frac{1}{x_F - f(z)},$$

где G_1 — некоторая правильно меняющаяся в нуле функция с показателем $-1/\alpha$. Теперь возведём обе части в степень -1:

$$x_F - f(z) \sim G\bigl(\Psi(z)\bigr),$$

где $G(z)$ правильно меняется в нуле с показателем $1/\alpha$.

Достаточность доказывается обращением этих двух шагов в другую сторону (с помощью леммы 3). □

Полученное условие сложно проверить. Далее мы выведем достаточные условия, которые хоть и не являются необходимыми, зато легко проверяются. Весь ход рассуждений будет практически копией вывода аналогичных условий для области максимального притяжения Фреше, полученных в [1].

Утверждение 3. *Пусть функция $f(x)$ строго возрастает и дважды дифференцируема при $x > x_0$, причём $\sup f(x) = x_F < \infty$. Пусть X — стандартная нормальная случайная величина. Тогда если при $x > x_0$ имеет место представление*

$$x_F - f(x) = C \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha} + \int\limits_0^x sg(s)\,ds\right\}$$

для некоторых C>0 и дважды дифференцируемой функции $g(x)$, такой что $g(x) \to 0$ и $g'(x)/x \to 0$ при $x \to \infty$, то $f(X) \in \mathrm{MDA}\bigl(\Psi(\alpha)\bigr)$.

Доказательство. Пусть $h(z) = \ln\bigl(x_F - f(z)\bigr)$. Тогда

$$h'(z) = -\frac{z}{\alpha} + zg(z), \quad \frac{1}{z^2}h'(z) = o(1), \quad z \to \infty.$$

Откуда, обозначив

$$a_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}}$$

и домножив равенство на $\ln y$, получим

$$-\frac{\alpha\ln y}{a_n}h'(a_n)=\ln y+o(1),\quad \frac{\alpha^2\ln^2 y}{a_n^2}h''\left(a_n-\frac{\alpha\theta_n\ln y}{a_n}\right)=o(1),\quad n\to\infty,$$

для всех $1>\theta_n>0$ и $y>0$. Заметим, что левые части есть не что иное, как второй и третий член в разложении по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Если мы сложим равенства, то получим

$$h(a_n-\alpha a_n^{-1}\ln y)-h(a_n)=\ln y+o(1),\quad n\to\infty.$$

Применим экспоненту к обеим частям равенства:

$$\frac{x_F-f(a_n-\alpha a_n^{-1}\ln y)}{x_F-f(a_n)}\to y,\quad n\to\infty. \tag{3}$$

Из предельной теоремы Бермана [3] нам известно, что

$$\lim_{n\to\infty}P\Big(\max_{k=1,\dots,n}\xi_k<a_n^{-1}x+a_n\Big)=e^{-e^{-x}}.$$

Взяв $x=-\alpha\ln y$, $d_n=x_F-f(a_n)$, получим

$$\lim_{n\to\infty}P\left(d_n^{-1}\Big(x_F-\max_{k=1,\dots,n}f(\xi_k)\Big)>\frac{x_F-f(a_n^{-1}\alpha\ln y+a_n)}{d_n}\right)=e^{-y^{\alpha}}.$$

Из этого равенства и (3) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}P\Big(d_n^{-1}\Big(x_F-\max_{k=1,\dots,n}f(\xi_k)\Big)>y\Big)=e^{-y^{\alpha}},$$

$$\lim_{n\to\infty}P\Big(d_n^{-1}\Big(\max_{k=1,\dots,n}f(\xi_k)-x_F\Big)<-y\Big)=e^{-(-(-y))^{\alpha}}.$$

Сравнив это с определением области максимального притяжения, получим, что $f(X)\in\mathrm{MDA}\big(\Psi_\alpha(x)\big)$. □

Замечание 3. Аналогично случаю Фреше доказывается, что эти условия не являются достаточными.

4. Достаточные условия принадлежности $f(X)$ к MDA Гумбеля

Осталось рассмотреть случай области максимального притяжения Гумбеля. К сожалению, для него нет таких хороших условий в терминах правильно меняющихся функций. Некоторым их аналогом являются следующие объекты.

Определение 2. Пусть F — функция распределения, $x_F\leqslant\infty$. Пусть найдётся $z<x_F$, такое что

$$\bar F(x)=C\exp\Big\{\int\limits_z^x\frac{-1}{a(t)}\,dt\Big\},\quad x<x_F,$$

где $C > 0$, $a(\cdot) > 0$ — положительная абсолютно непрерывная функция с плотностью a', причём $\lim\limits_{x \to x_F} a'(x) = 0$. Такую функцию распределения F назовём функцией фон Мизеса.

В этом разделе мы будем опираться на следующее утверждение: если функция распределения является функцией фон Мизеса, то она лежит в области максимального притяжения Гумбеля [2].

Утверждение 4 [2]. *Функция F является функцией фон Мизеса тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\bar{F}(x)F''(x)}{F'^2} \to -1, \quad x \to x_F.$$

Теперь напомним формулу дифференцирование обратной функции. Пусть $g(y) = f^{-1}(y)$, $g(y) = z$. Тогда $f(z) = y$, $g\big(f(z)\big) = z$ и

$$g'(y) = \frac{1}{f'(z)}, \quad g''(y) = -\frac{f''(z)}{f'^3}.$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ стремится к x_F (которое может быть равным бесконечности) с ростом x, причём начиная с некоторого x_0 она дважды дифференцируема и её первая производная не обращается в нуль. Дополнительно потребуем, чтобы при $x < x_0$ было верно, что если $x_F < \infty$, то $f(x) < x_F - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, а если $x_F = \infty$, то $f(x)$ ограничена при $x < x_0$.

Утверждение 5. *Распределение случайной величины $f(X)$ является функцией фон Мизеса тогда и только тогда, когда*

$$\frac{f''(z)}{zf'(z)} \to 0, \quad z \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\bar{F}_{f(X)}(y) = \bar{F}_X\big(g(y)\big) \sim \frac{\exp\{-g(y)^2/2\}}{g(y)\sqrt{2\pi}},$$

Продифференцируем это равенство:

$$F'_{f(X)}(y) = F'_X\big(g(y)\big)g'(y) = \frac{g'(y)\exp\{-g(y)^2/2\}}{\sqrt{2\pi}},$$

Продифференцируем второй раз:

$$F''_{f(X)}(y) = F''_X\big(g(y)\big)g'^2 + F'_X\big(g(y)\big)g''(y) = \\ = \frac{-g'^2\exp\{-g(y)^2/2\}g(y)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{g''(y)\exp\{-g(y)^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Теперь подставим три последние формулы:

$$\frac{\bar{F}(x)F''(x)}{F'^2} \sim \frac{-g'^2 g(y) + g''(y)}{g(y)g'^2} = \frac{-z/f'^2 - f''(z)/f'^3}{z/f'^2} = -1 - \frac{f''(z)}{zf'(z)}.$$

По утверждению 4 функция F является функцией фон Мизеса тогда и только тогда, когда левая часть в последней цепочке стремится к -1. Это равносильно тому, что правая часть стремится к -1, а это то же самое, что и

$$\frac{f''(z)}{zf'(z)} \to 0. \qquad \square$$

Выражаю благодарность моему научному руководителю В. И. Питербаргу за постановку задачи и полезные советы.

Литература

[1] Питербарг В. И., Мазур А. Е. Гауссовские копульные временные ряды с тяжёлыми хвостами и сильной временной зависимостью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2015. — Т. 60, № 5. — С. 3—7.

[2] De Haan L., Ferreira A. Extreme Value Theory: An Introduction. — New York: Springer, 2007.

[3] Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields. — Providence: Amer. Math. Soc., 2012. — (Transl. Math. Monogr.; Vol. 148).

[4] Seneta E. Regularly Varying Functions. — Berlin: Springer, 1976. — (Lect. Notes Math.; Vol. 508).