Супремум евклидовых норм многомерных винеровского процесса и броуновского моста: точные асимптотики больших уклонений

В. Р. ФАТАЛОВ

УДК 519.2

Ключевые слова: большие уклонения, гауссовские поля на цилиндре, метод двойных сумм, распределение супремума.

Аннотация

Для $T > 0$ доказаны теоремы о точных асимптотиках при $u \to \infty$ вероятностей

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^{n} w_j^2(t) > u^2\Big\}, \quad \mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^{n} w_{j0,T}^2(t) > u^2\Big\},$$

где $w_j(t)$, $j = 1,\ldots,n$, — независимые винеровские процессы и $w_{j0,T}(t)$, $j = 1,\ldots,n$, — независимые броуновские мосты на отрезке $[0,T]$. Методом исследования является метод двойных сумм для гауссовских процессов и полей. Описано применение полученных результатов в статистической задаче проверки гипотезы однородности k одномерных выборок.

Abstract

V. R. Fatalov, Supremum of the Euclidean norms of the multidimensional Wiener process and Brownian bridge: Sharp asymptotics of probabilities of large deviations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 1, pp. 219—257.

For $T > 0$, we prove theorems concerning sharp asymptotics of the probabilities

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^{n} w_j^2(t) > u^2\Big\}, \quad \mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^{n} w_{j0,T}^2(t) > u^2\Big\},$$

as $u \to \infty$, where $w_j(t)$, $j = 1,\ldots,n$, are independent Wiener processes and $w_{j0,T}(t)$, $j = 1,\ldots,n$, are independent Brownian bridges on the segment $[0,T]$. Our research method is the double sum method for the Gaussian processes and fields. We also give an application of the obtained results to the statistical tests for the homogeneity hypothesis of k one-dimensional samples.

1. Введение и формулировка основных результатов

Как известно, *многомерный винеровский процесс* (или многомерное броуновское движение) служит основой для многих математических моделей в различных областях теории случайных процессов, статистической физики, квантовой механики, теории поля, техники и естествознания (см., в частности,

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 1, с. 219—257.

[2—4; 14, § 21, с. 108; 27, 28]). В упомянутых работах изложены некоторые важные результаты о распределениях различных функционалов от векторного винеровского процесса. Ряд асимптотических результатов для функционалов типа супремум и интегральных функционалов от указанного процесса доказаны в [10, 19, 20]. В настоящей работе мы вычислим точные асимптотики больших уклонений для распределений супремума евклидовых норм многомерных винеровского процесса и броуновского моста. Перейдём к точной формулировке полученных результатов. Ниже $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ — достаточно богатое основное вероятностное пространство, $\mathbf{E}$ — математическое ожидание, взятое по вероятностной мере $\mathbf{P}$.

Пусть $\mathbf{R}^n$ — обычное n-мерное евклидово пространство векторов

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathbf{w}(t) = \bigl(w_1(t), w_2(t), \ldots, w_n(t)\bigr)$, $t \geqslant 0$, n-мерный винеровский процесс, где $w_k(t)$, $w_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — независимые одномерные винеровские процессы, выходящие из нуля (см. [4, гл. 1, § 7, с. 48; 27, гл. 1, § 1]). Многомерным условным винеровским процессом на отрезке $[0, T]$, $T > 0$, или *многомерным броуновским мостом* называется следующий процесс:

$$\mathbf{w}_{0,T}(t) = [\mathbf{w}(t) \mid \mathbf{w}(T) = 0], \quad t \in [0, T]. \tag{1.1}$$

Ниже мы будем использовать координатную запись:

$$\mathbf{w}_{0,T}(t) = \bigl(w_{10,T}(t), w_{20,T}(t), \ldots, w_{n0,T}(t)\bigr), \quad t \in [0, T],$$

где $w_{k0,T}(t)$, $k = 1, \ldots, n$, — независимые одномерные броуновские мосты на отрезке $[0, T]$. При $T = 1$ для краткости будем обозначать

$$\mathbf{w}_0(t) := \mathbf{w}_{0,1}(t), \quad w_{k0}(t) := w_{k0,1}(t), \quad k = 1, \ldots, n, \quad t \in [0, 1].$$

Ниже $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию. Для векторного винеровского процесса $\mathbf{w}$ мы докажем следующий результат.

Теорема 1. *Для целого $n \geqslant 1$ и $T > 0$ при $u \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\mathbf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{w}(t)\| > u\Bigr\} \equiv \mathbf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,T]} \sum_{j=1}^{n} w_j^2(t) > u^2\Bigr\} = \\ = \exp\left\{-\frac{u^2}{2T}\right\} \frac{u^{n-2}}{T^{(n-2)/2}\, 2^{(n-4)/2}\, \Gamma(n/2)} \bigl(1 + o(1)\bigr). \tag{1.2}$$

Для многомерного броуновского моста $\mathbf{w}_{0,T}$, заданного в (1.1), соответствующий результат имеет следующий вид.

Теорема 2. *Для целого $n \geqslant 1$ и $T > 0$ при $u \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{w}_{0,T}(t)\| > u\Big\} \equiv \mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]} \sum_{j=1}^{n} w^2_{j0,T}(t) > u^2\Big\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{2u^2}{T}\right\} u^{n-1}\, \frac{2^{(n+1)/2}\sqrt{\pi}}{T^{(n-1)/2}\,\Gamma(n/2)}\big(1 + o(1)\big). \quad (1.3)$$

Теоремы 1 и 2 доказаны на основе метода двойных сумм, предназначенного для вычисления точных асимптотик распределения *супремума гауссовских процессов и полей* (см. [11,12,15—18,25,26]). Этот метод имеет универсальный характер и пригоден как для однородных, так и для неоднородных гауссовских полей. Отметим, что евклидова норма n-мерного векторного винеровского процесса $\mathbf{w}(t)$ совпадает по распределению с *бесселевским* процессом $\xi_\nu(t)$ порядка $\nu = n/2 - 1$,

$$\{[w_1^2(t) + \ldots + w_n^2(t)]^{1/2},\ t \geqslant 0\} =^{(d)} \{\xi_\nu(t),\ t \geqslant 0\}, \quad \nu = \frac{n}{2} - 1 \qquad (1.4)$$

(см. [2, с. 91]). Таким образом, используя равенство (1.4), теоремы 1 и 2 можно сформулировать в терминах бесселевских процессов (ср. [2, ч. 2, § 4—6]).

Применения в статистике.
Проверка гипотезы однородности для k одномерных выборок при помощи критериев типа Колмогорова—Смирнова

Пусть мы имеем k одномерных выборок

$$\big\{X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)}\big\},\ \big\{X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)}\big\}, \ldots,\ \big\{X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots, X_{n_k}^{(k)}\big\}, \qquad (1.5)$$

и пусть при этом j-я выборка $\big\{X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \ldots, X_{n_j}^{(j)}\big\}$ извлечена из распределения с неизвестной непрерывной функцией распределения F_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим проверку гипотезы однородности

$$H_1\colon F_1 = F_2 = \ldots = F_k \qquad (1.6)$$

о том, что все k выборок взяты из одного и того же неизвестного непрерывного распределения. В качестве класса альтернатив к H_1 возьмём всевозможные наборы $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$, для которых соотношение (1.6) не выполнено. Для $j = 1, \ldots, k$ введём эмпирическую функцию распределения, построенную по j-й выборке, следующим образом

$$S_{n_j}^{(j)}(x) = \frac{1}{n_j}\,\#\big\{i \in \{1, 2, \ldots, n_j\}\colon X_i^{(j)} < x\big\},$$

здесь $\#A$ означает число элементов конечного множества A. Составим вектор

$$N = (n_1, \ldots, n_k)$$

и определим эмпирическую функцию распределения, построенную по объединению k выборок, следующим образом:

$$S_N(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} n_j S_{n_j}^{(j)}(x)}{\sum\limits_{j=1}^{k} n_j}.$$

Аналог статистики Колмогорова—Смирнова для проверки гипотезы однородности H_1 можно записать в следующем виде:

$$T_N = \sup_{x\in\mathbf{R}} \sum_{j=1}^{k} n_j [S_{n_j}^{(j)}(x) - S_N(x)]^2.$$

Из результатов [9, гл. 3; 22] ($k = 2$) следует, что при выполнении гипотезы H_1 предельное распределение статистики T_N не зависит от вида общей неизвестной функции распределения. Поэтому при изучении предельного распределения статистики T_N мы можем и будем полагать, что все k выборок (1.5) извлечены из *равномерного распределения на отрезке* $[0, 1]$. Пусть $w_{10}(t), w_{20}(t), \ldots, w_{k-1,0}(t)$ — семейство независимых броуновских мостов на отрезке $[0, 1]$.

Утверждение 1. *Для любого $u > 0$ выполнено соотношение*

$$\lim_{n_j\to\infty,\ j=1,\ldots,k} \mathbf{P}\{T_N > u\} = \mathbf{P}\biggl\{\sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=1}^{k-1} w_{j0}^2(t) > u\biggr\}. \tag{1.7}$$

Утверждение предложения 1 можно получить, используя метод, изложенный в [22, § 2].

Таким образом, теорема 2 позволяет приближённо вычислять вероятность из правой части формулы (1.7) при больших значениях u. Это даёт возможность приближённо вычислить критические точки статистики T_N и построить критерий для проверки гипотезы однородности H_1, основанный на указанной статистике. При $k = 2$ логарифмическая асимптотика умеренных уклонений статистики T_N (эффективность по Бахадуру) найдена в [21] и приведена в [9, теорема 3.1.1]. Эта логарифмическая асимптотика согласуется с формулой (1.3).

2. Основные утверждения метода двойных сумм

Следуя [11], изложим основные результаты, на которых базируется асимптотический метод двойных сумм для гауссовских полей с параметрическим множеством в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$.

Теорема 3 (неравенство Д. Слепяна). *Пусть T — произвольное параметрическое множество, $X(t)$, $Y(t)$, $t \in T$, — действительные сепарабельные гауссовские процессы с нулевым средним и ограниченной дисперсией. Пусть для* *ковариационных функций* $R_X(t,s)$ *и* $R_Y(t,s)$ *этих процессов выполнены соотношения*

$$R_X(t,t) \equiv R_Y(t,t), \quad t \in T, \quad R_X(t,s) \leqslant R_Y(t,s), \quad t,s \in T.$$

Тогда для любого $x \in \mathbf{R}$ *имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in T} X(t) > x\Big\} \geqslant \mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in T} Y(t) > x\Big\}.$$

Доказательство теоремы 3, а также изложение связанных с ней результатов можно найти в [7, § 14, теорема 3, с. 149]. Всюду ниже $\mathbf{D}Z$ обозначает *дисперсию* случайной величины Z: $\mathbf{D}Z = \mathbf{E}\,Z^2 - (\mathbf{E}\,Z)^2 \geqslant 0$.

Лемма 1 (В. И. Питербарг). *Пусть* $X(t)$ *— гауссовское сепарабельное поле, заданное на компактном многообразии* $S \subset \mathbf{R}^n$ *размерности* $1 \leqslant \dim S \leqslant n$. *Предположим, что для некоторых положительных чисел* m *и* σ^2 *имеют место неравенства*

$$\sup\{|\,\mathbf{E}\,X(t)|\colon t\in S\} \leqslant m < \infty, \quad \sup\{\mathbf{D}X(t)\colon t \in S\} \leqslant \sigma^2 < \infty$$

и функции $\mathbf{E}\,X(t)$, $\mathbf{D}X(t)$ *непрерывны. Пусть для некоторых* $L > 0$, $\gamma_1 > 0, \ldots, \gamma_n > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{D}\big(X(t) - X(s)\big) \leqslant L\sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|^{\gamma_i}, \quad t = (t_1,\ldots,t_n) \in S, \quad s = (s_1,\ldots,s_n) \in S.$$

Тогда найдутся константы $C > 0$ *и* $k = k(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\dim S)$, *такие что для всех* $u > 0$ *имеет место оценка*

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in S} X(t) > u\Big\} \leqslant Cu^k \exp\left\{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Доказательство леммы 1 проводится на основе энтропийных оценок аналогично доказательству леммы 6.5 из [11, § 6]. При выводе асимптотических оценок, связанных с распределением супремума гауссовских процессов и полей общей природы, часто бывает полезным следующий результат.

Теорема 4 (Г. Дж. Ландау, М. Б. Маркус, Л. А. Шепп [23, 24]). *Пусть* $X(t)$ *— гауссовская сепарабельная случайная функция, заданная на параметрическом множестве* S, *которая является почти наверное ограниченной, т. е.*

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in S} |X(t)| < \infty\Big\} = 1.$$

Предположим, что $\mathbf{E}\,X(t) = 0$, *и обозначим* $\sigma_X^2 = \sup\limits_{t\in S} \mathbf{E}\,X^2(t)$. *Тогда для любого* $\theta > 0$ *найдётся постоянная* $c_0 = c_0(\theta) > 0$, *такая что для всех* $u > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in S} X(t) > u\Big\} \leqslant c_0\, \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma_X^2 + \theta}\right\}.$$

Пусть заданы вектор $a \in \mathbf{R}^n$ и векторы $S = (S_1, \dots, S_n)$, $T = (T_1, \dots, T_n)$, такие что $S_i < T_i$, $i = 1, \dots, n$. Ниже мы будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{gathered} K(S,T) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \colon S_i \leqslant x_i \leqslant T_i,\ i = 1, \dots, n\}, \\ K(T) := K(0,T), \quad K^a(T) = K(T) + a = \{x + a \colon x \in K(T)\}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Пусть задан вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с положительными координатами $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Введём обозначение

$$|t|_\alpha := \sum_{i=1}^n |t_i|^{\alpha_i}, \quad \text{где} \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n. \tag{2.2}$$

Для числа $u > 0$ и вектора $b = (b_1, \dots, b_n)$, $b_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$, определим отображения $g_u \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и $h_b \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$g_u t := (u^{-2/\alpha_1} t_1, \dots, u^{-2/\alpha_n} t_n), \tag{2.3}$$

$$h_b t := (b_1^{1/\alpha_1} t_1, \dots, b_n^{1/\alpha_n} t_n), \quad t = (t_1, \dots, t_n). \tag{2.4}$$

Легко видеть, что справедливо равенство $|g_u t|_\alpha = u^{-2} |t|_\alpha$. Для отображения $G \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и множества $A \subset \mathbf{R}^n$ ниже будем полагать $G(A) := \{Gt \colon t \in A\}$.

Пусть $\chi(t) \equiv \chi_\alpha(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$, обозначает гауссовское поле Леви—Шёнберга (многопараметрическое дробное броуновское движение) с п. н. непрерывными траекториями, для которого среднее значение и ковариационная функция имеют вид

$$\mathbf{E}\, \chi(t) = -|t|_\alpha, \quad \operatorname{Cov}\bigl(\chi(t), \chi(s)\bigr) = |t|_\alpha + |s|_\alpha - |t - s|_\alpha. \tag{2.5}$$

Учитывая формулы (2.1), (2.4), (2.5), для векторов $T = (T_1, \dots, T_n)$, $T_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$, $S = (S_1, \dots, S_n)$, $S_i \leqslant 0$, $i = 1, \dots, n$, и невырожденной матрицы C определим величины

$$H_\alpha^b(S, T; C) := \mathbf{E} \exp\Bigl\{ \sup_{t \in K(S,T)} (\chi(Ct) - |h_b t|_\alpha) \Bigr\}. \tag{2.6}$$

Лемма 2 (В. И. Питербарг [11]). *Пусть $X(t)$ — гауссовское однородное поле на $\mathbf{R}^n$ с непрерывными траекториями, нулевым средним, ковариационная функция которого удовлетворяет для некоторых $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, и диагональной матрицы C соотношению*

$$r(t) = 1 - |Ct|_\alpha \bigl(1 + o(1)\bigr), \quad t \to 0. \tag{2.7}$$

Тогда для любых $b_1 \geqslant 0, \dots, b_n \geqslant 0$, $T_1 \geqslant 0, \dots, T_n \geqslant 0$, $S_1 \leqslant 0, \dots, S_n \leqslant 0$, $T_j - S_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, имеет место соотношение

$$\lim_{u \to \infty} \mathbf{P} \biggl\{ \sup_{g_u(K(S,T))} \frac{X(t)}{1 + |h_b t|_\alpha} > u \biggr\} \exp\left\{ \frac{u^2}{2} \right\} u \sqrt{2\pi} = H_\alpha^b(S, T; C).$$

В случае когда $C = I$, лемма 2 доказана в [11, § 6, лемма 6.1]. Утверждение леммы в приведённой формулировке вытекает из утверждения леммы для случая $C = I$ вследствие соотношения $C g_u = g_u C$, справедливого для диагональной матрицы C. При размерности $n = 1$ для краткости обозначим

$$H_\alpha^b(S,T) = H_\alpha^b(S,T;1), \quad H_\alpha(S,T) = H_\alpha^0(S,T), \quad H_\alpha(T) = H_\alpha^0(0,T), \qquad (2.8)$$

где $b \geqslant 0$, $S \leqslant 0 \leqslant T$. Для целого числа $0 \leqslant k \leqslant n$, векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $b = (0, \ldots, 0, b_{k+1}, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, $b_{k+1} > 0, \ldots, b_n > 0$, и диагональной матрицы $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ с числами $c_1 > 0, \ldots, c_n > 0$ на главной диагонали выполнено следующее *факторизационное тождество*, в котором многомерные константы типа Пикандса записаны в виде произведения одномерных констант:

$$H_\alpha^b(S,T;C) = \prod_{j=1}^{k} H_{\alpha_j}(c_j S_j, c_j T_j) \prod_{j=k+1}^{n} H_{\alpha_j}^{b_j / c_j^{\alpha_j}}(c_j S_j, c_j T_j), \qquad (2.9)$$

здесь $S = (S_1, \ldots, S_n)$, $T = (T_1, \ldots, T_n)$, одномерные константы типа Пикандса определены в формуле (2.8). Тождество (2.9) следует непосредственно из определения (2.6). В [11, гл. 2, с. 75, 79] доказано существование трёх положительных пределов в случае размерности $n = 1$:

$$0 < H_\alpha := \lim_{T\to\infty} \frac{H_\alpha(T)}{T} < \infty, \qquad (2.10)$$

$$0 < H_\alpha^{b,1} := \lim_{T\to\infty} H_\alpha^b(-T,T) < \infty, \quad 0 < H_\alpha^{b,2} \equiv \tilde{H}_\alpha^b := \lim_{T\to\infty} H_\alpha^b(0,T) < \infty. \qquad (2.11)$$

В силу соотношения (2.10) существует число $T_0 = T_0(\alpha) > 0$, такое что для всех $T > T_0$ выполнено неравенство

$$H_\alpha(T) \leqslant 2 H_\alpha T. \qquad (2.12)$$

Отметим также, что из [1, лемма 5] вытекает непрерывность величины $H_\alpha(T)$ по переменной $T > 0$.

Определение 1. Будем говорить, что ковариационная функция $r(t,s)$, $t, s \in \in S \subset \mathbf{R}^n$, некоторого гауссовского поля удовлетворяет *условию локальной однородности*, если

(C1) существуют положительные числа ε_r, D_1, D_2 и вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, такие что для всех $t, s \in S$, $\|t - s\| < \varepsilon_r$, имеет место неравенство

$$1 - D_1 |t - s|_\alpha \geqslant r(t,s) \geqslant 1 - D_2 |t - s|_\alpha.$$

Введённое условие локальной однородности (стационарности) незначительно обобщает *условие локальной стационарности* (ЛС) из [11, § 6, с. 70]. Любое гауссовское *однородное* поле с единичной дисперсией и ковариационной функцией $r(t)$, для которой выполнено соотношение (2.7) с некоторой диагональной матрицей C, удовлетворяет условию локальной однородности; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Для оценивания двойных сумм, возникающих при доказательстве теорем 1 и 2, нам понадобятся следующие два утверждения.

Лемма 3. *Пусть ковариационная функция $r(t,s)$ гауссовского поля $X(t)$, $t\in S\subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{E}\,X(t)=0$, удовлетворяет условию локальной однородности* (C1). *Пусть $A\subset S$, $B\subset S$ — два непустых непересекающихся замкнутых ограниченных множества, таких что для некоторых векторов $\bar T=(T,\dots,T)\in\mathbf{R}^n$, $t_0\in\mathbf{R}^n$, $s_0\in\mathbf{R}^n$ имеют место включения*

$$A\subset K^{t_0}(\bar T)\subset S,\quad B\subset K^{s_0}(\bar T)\subset S.$$

Обозначим через $u_0>0$ число, для которого выполнено неравенство

$$\sup_{t\in g_{u_0}A,\ s\in g_{u_0}B}\|t-s\|\leqslant \varepsilon_r.$$

Тогда для любых фиксированных $a>0$, $b>0$ найдутся постоянные $T_0 = T_0(\alpha)>0$ и $C=C(a,b,\alpha,D_1,D_2)>0$, такие что для всех $u>\max(a,b,u_0)$ и всех $T>T_0$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}\Bigl\{\sup_{t\in g_uA}X(t)>au,\ \sup_{s\in g_uB}X(t)>bu\Bigr\}\leqslant \\ \leqslant C\,T^{2n}\Psi\left(\frac{a+b}{2}u\right)\exp\left\{-\frac{(a+b)^2}{16}D_1\,\rho_\alpha(A,B)\right\},$$

где

$$\Psi(u)=\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\},\quad u>0,$$
$$\rho_\alpha(A,B)=\inf_{t\in A,\ s\in B}|t-s|_\alpha. \tag{2.13}$$

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 6.6 из [11, § 6] с использованием формулы (2.12).

Лемма 4. *Пусть ковариационная функция $r(t,s)$ гауссовского поля $X(t)$, $t\in S\subset\mathbf{R}^n$, $\mathbf{E}\,X(t)=0$, удовлетворяет условию локальной однородности* (C1). *Положим*

$$T=(T_1,\dots,T_n)\in\mathbf{R}^n,\quad T_i>1,\quad i=1,\dots,n,$$
$$t_0=(\hat T_1,\dots,\hat T_n)\in\mathbf{R}^n,$$

где каждое $\hat T_i$ может принимать одно из следующих трёх значений: 0, T_i, $-T_i$, $i=1,\dots,n$. Для фиксированного натурального числа k, $1\leqslant k\leqslant n$, обозначим

$$\tilde T=(T_1,\dots,T_{k-1},T_0,T_{k+1},\dots,T_n),\quad \tilde K=t_0+K(\tilde T),$$

где $T_0\in(1,\min\{T_1,\dots,T_n\})$. Тогда для любой непрерывной положительной функции $f(t)$, любых чисел $a>0$, $b>0$ найдётся постоянная $C = C(a,b,\alpha,D_1,D_2)>0$, такая что для всех достаточно больших $u>0$ и достаточно больших $T>0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\biggl\{\sup_{t\in g_uK(T)}\frac{X(t)}{f(t)}>au,\ \sup_{t\in g_uK^{t_0}(T)}\frac{X(t)}{f(t)}>bu\biggr\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\biggl\{\sup_{t\in g_u\tilde{K}}\frac{X(t)}{f(t)}>bu\biggr\}+C\prod_{i=1}^{n}T_i^2\Psi\left(\frac{a+b}{2}u\right)\exp\left\{-\frac{(a+b)^2}{16}D_1f_0^2T_0^{\alpha_0}\right\},$$

где

$$\alpha_0=\min\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\},\quad f_0=\min\{f(t)\colon t\in g_uK(T)\cup g_uK^{t_0}(T)\}.$$

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству следствия 6.1 из [11, § 6] с учётом формулы (2.12).

Используя метод доказательства указанного следствия, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть гауссовское однородное поле $X(t)$ удовлетворяет условиям леммы 4, обозначения которой сохранены. Тогда для любых чисел $a>0$, $b>0$ найдётся постоянная $C=C(a,b,\alpha,D_1,D_2)>0$, такая что для всех достаточно больших $u>0$ и достаточно больших $T>0$ имеет место оценка*

$$\mathbf{P}\Bigl\{\sup_{t\in g_uK(T)}X(t)>au,\ \sup_{t\in g_uK^{t_0}(T)}X(t)>bu\Bigr\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\biggl\{\sup_{t\in g_u\tilde{K}}X(t)>\frac{a+b}{2}u\biggr\}+C\prod_{i=1}^{n}T_i^2\Psi\left(\frac{a+b}{2}u\right)\exp\left\{-\frac{(a+b)^2}{16}D_1T_0^{\alpha_0}\right\},$$

где $\alpha_0=\min\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$.

В заключение этого раздела укажем известные численные значения одномерных констант типа Пикандса (см. [6, п. 12.1, с. 259; 11, § 9, с. 91; 18, лемма 3.2; 26, лемма 4]):

$$\begin{gathered}H_1=1,\quad H_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad H_1^{1,2}\equiv H_1^1=2,\\ H_1^{b,2}\equiv\tilde{H}_1^b=\frac{b+1}{b},\quad H_2^{b,1}\equiv H_2^b=\sqrt{\frac{b+1}{b}}.\end{gathered}\tag{2.14}$$

В трёх последних равенствах в (2.14) мы привели также более краткие обозначения для указанных констант, которые встречаются в литературе.

3. Доказательство теоремы 1

Это доказательство проводится методом двойных сумм аналогично доказательству теоремы 1 из [26], где был рассмотрен случай дифференцируемого в среднем квадратическом векторного гауссовского процесса. Докажем сначала соотношение (1.2) при $T=1$. Напомним, что одномерный винеровский процесс $w_k(t)$, $t\geqslant0$, представляет собой гауссовский процесс с нулевым средним, $\mathbf{E}\,w_k(t)=0$, и ковариационной функцией вида

$$\mathbf{E}\,w_k(t)w_k(s)=\min(t,s),\quad t,s\geqslant0,\quad k=1,\dots,n.\tag{3.1}$$

3.1. Переход от векторного винеровского процесса $\mathrm{w}(t)$ к гауссовскому неоднородному полю на цилиндре

Пусть

$$V \equiv V(n) = \Big\{ v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n \colon \sum_{k=1}^{n} v_k^2 = 1 \Big\} - \tag{3.2}$$

единичная сфера в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Из соображений двойственности для левой части формулы (1.2) при $T = 1$ справедливо следующее равенство для любого $u > 0$:

$$\mathbf{P}\Big\{ \sup_{t \in [0,1]} \|\mathbf{w}(t)\| > u \Big\} = \mathbf{P}\Big\{ \sup_{(t,v) \in [0,1] \times V} Z(t,v) > u \Big\}, \tag{3.3}$$

где

$$Z(t,v) := \sum_{k=1}^{n} v_k w_k(t) - \tag{3.4}$$

гауссовское п. н. непрерывное поле, заданное на компактном множестве

$$[0,1] \times V = \{(t,v) \colon t \in [0,1],\ v \in V\}. \tag{3.5}$$

Множество (3.5), представляющее собой цилиндрическую поверхность в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве $(t,v) \in \mathbf{R}^{n+1}$, мы будем кратко называть цилиндром. Ось этого цилиндра совпадает с осью t. Заметим, что гауссовское поле $Z(t,v)$, вообще говоря, не определено внутри множества (3.5). Определим *скалярное произведение* в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ обычным образом:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \equiv \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Как известно, скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$ *инвариантно относительно собственных вращений* (см. [8, гл. 4, § 3, с. 209, 219]), а именно для любой ортогональной матрицы $C \in \mathrm{SO}(n)$, $\det C = 1$, выполнено соотношение

$$\langle Cx, Cy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Лемма 5.

(i) *Гауссовское поле $Z(t,v)$ имеет нулевое среднее. Дисперсия поля $Z(t,v)$ равна*

$$\mathbf{D}Z(t,v) \equiv \sigma^2(t,v) \equiv \sigma^2(t) = t, \quad (t,v) \in [0,1] \times V, \tag{3.6}$$

и достигает на $[0,1] \times V$ своего максимума на многообразии $T_0 = \{1\} \times V$, при этом

$$\max_{(t,v) \in [0,1] \times V} \sigma^2(t,v) = 1. \tag{3.7}$$

Справедливо разложение

$$\sigma(t,v) = 1 - \frac{1}{2}(1-t)\big(1 + o(1)\big) \ \textit{при}\ (t,v) \in [0,1] \times V,\ (t,v) \to (1,v). \tag{3.8}$$

(ii) *Ковариационная функция поля $Z(t,v)$ имеет вид*

$$R[(t,v),(s,y)] \equiv \mathbf{E}\, Z(t,v)Z(s,y) = \\ = \min(t,s)\sum_{k=1}^{n} v_k y_k \equiv \min(t,s)\Big(1-\frac{1}{2}\|v-y\|^2\Big), \quad (3.9)$$

где $(t,v),(s,y) \in [0,1]\times V$, $v=(v_1,\dots,v_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$. *Справедливо разложение*

$$\frac{\min(t,s)}{\sqrt{ts}} = 1-\frac{1}{2}|t-s|\big(1+o(1)\big) \quad \textit{as} \quad t,s\to 1, \quad |t-s|\to 0.$$

(iii) *Для всех* $(t,v),(s,y)\in[0,1]\times V$ *выполнено неравенство*

$$\mathbf{E}[Z(t,v)-Z(s,y)]^2 \leqslant |t-s| + \sum_{i=1}^{n}|v_i-y_i|^2. \quad (3.10)$$

Доказательство. Формулы (3.6), (3.9) вытекают непосредственно из соотношений (3.1), (3.2), (3.4) и независимости координатных процессов $w_k(t)$, $k=1,\dots,n$. Разложение (3.8) легко выводится из формул (3.6), (3.7). Второе утверждение пункта (ii) следует из соотношений (3.6), (3.9), третье утверждение пункта (ii) вытекает из тождества

$$\min(t,s) = \frac{1}{2}(t+s-|t-s|), \quad t,s\in[0,1].$$

Докажем неравенство (3.10). Используя формулы (3.1), (3.2), (3.4), (3.9), получаем для $(t,v),(s,y)\in[0,1]\times V$ соотношения

$$\mathbf{E}[Z(t,v)-Z(s,y)]^2 = \mathbf{E}\,Z^2(t,v)+\mathbf{E}\,Z^2(s,y)-2\,\mathbf{E}\,Z(t,v)Z(s,y) = \\ = [t+s-2\min(t,s)] + 2\min(t,s)[1-\langle v,y\rangle] \leqslant |t-s| + \sum_{i=1}^{n}|v_i-y_i|^2.$$

Неравенство (3.10), а вместе с ним и лемма 5, доказаны. □

Замечание 1. Из формулы (3.9) вытекает, что ковариационная функция поля $Z(t,v)$ инвариантна относительно вращений цилиндра $[0,1]\times V$ вокруг оси t, т. е. для любой ортогональной матрицы $C\in \mathrm{SO}(n)$, $\det C=1$, выполнено соотношение

$$R[(t,Cv),(s,Cy)] = R[(t,v),(s,y)], \quad (t,v),\ (s,y)\in[0,1]\times V.$$

Пусть непрерывная функция $\delta=\delta(u)$, $u>0$, такова, что при $u\to\infty$ имеют место соотношения

$$\delta(u)\downarrow 0, \quad u\delta(u)\to 0, \quad \frac{u^2\delta(u)}{\ln u}\to\infty. \quad (3.11)$$

Определим множество

$$T_\delta = [1-\delta(u),1]\times V \equiv \{(t,v)\in[0,1]\times V : 1-\delta(u)\leqslant t\leqslant 1\}. \quad (3.12)$$

Лемма 6 (о локализации). *Для любой функции* $\delta(u)$, *удовлетворяющей соотношениям* (3.11), *справедливо равенство*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in[0,1]\times V} Z(t,v) > u\Big\}}{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}} = 1.$$

Доказательство. Для любого $u > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in[0,1]\times V} Z(t,v) > u\Big\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\} + \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in([0,1]\times V)\setminus T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}. \quad (3.13)$$

Для $u > 0$ определим компактное многообразие в $\mathbf{R}^{n+1}$

$$K = K_u = \{(t,v) \in [0,1]\times V \colon 0 \leqslant t \leqslant 1-\delta(u)\},$$

которое является замыканием в $\mathbf{R}^{n+1}$ множества $([0,1]\times V)\setminus T_\delta$. Согласно неравенству (3.10) гауссовское поле $Z(t,v)$, $(t,v)\in K$, удовлетворяет условиям леммы 1 с $L=1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \ldots = \gamma_{n+1} = 2$. Для достаточно больших u в силу формулы (3.6) выполнено неравенство

$$\sup\{\mathbf{D}Z(t,v) \colon (t,v)\in K\} \leqslant 1-\delta(u). \quad (3.14)$$

Используя лемму 1 и формулы (3.11), (3.14), убеждаемся, что для достаточно больших u, некоторых постоянных $C_1 > 0$, $k_1 = k_1(n)$ справедливы следующие оценки сверху:

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in([0,1]\times V)\setminus T_\delta} Z(t,v) > u\Big\} \leqslant \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in K} Z(t,v) > u\Big\} \leqslant \\ \leqslant C_1 u^{k_1} \exp\left\{-\frac{u^2}{2(1-\delta(u))}\right\} = o\left(u^{-1}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right). \quad (3.15)$$

С другой стороны, для произвольной точки $v_0 \in V$ имеет место оценка снизу

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\} \geqslant \mathbf{P}\{Z(1,v_0) > u\} = \frac{\exp\{-u^2/2\}}{\sqrt{2\pi}\,u}\big(1+o(1)\big), \quad u\to\infty, \quad (3.16)$$

так как согласно (3.6) $Z(1,v_0)$ является гауссовской случайной величиной со средним 0 и дисперсией 1. Разделив почленно равенство (3.13) на $\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}$ и применяя оценки (3.15), (3.16), мы получаем утверждение леммы. Лемма 6 доказана. □

Для малого фиксированного $\varepsilon_0 > 0$ положим

$$T_{\varepsilon_0} = \{(t,v)\in[0,1]\times V \colon 1-\varepsilon_0 \leqslant t \leqslant 1\} \quad (3.17)$$

и для $c > 0$ определим гауссовское случайное поле

$$Z_c(t,v) = Z(t,v)\,\frac{\sigma_c(t)}{\sqrt{t}}, \quad (t,v) \in T_{\varepsilon_0}, \quad \text{где} \quad \sigma_c(t) = \frac{1}{1+(c/2)(1-t)}. \tag{3.18}$$

Лемма 7. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства*

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}} \leqslant 1 \leqslant \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1-\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}}. \tag{3.19}$$

Доказательство леммы проводится аналогично выводу неравенства (8.2) в [16]. Таким образом, для нахождения интересующей нас асимптотики нужно получить асимптотически точные оценки для вероятности

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_\delta} Z_c(t,v) > u\Big\} \tag{3.20}$$

для значений c, сколь угодно близких к единице.

3.2. Разбиение сферы V и окрестности T_δ на множества малого диаметра и переход к n-параметрическому гауссовскому полю $Y_c(t,\tilde{v})$

На протяжении всего этого раздела будем полагать, что фиксировано произвольное малое число $\varepsilon > 0$.

Будем рассматривать сферу V как топологическое пространство с топологией, индуцированной из $\mathbf{R}^n$ (см. [5, гл. 1, с. 77]). При помощи кубической решётки разобьём сферу V на замкнутые множества с кусочно-гладкой границей и непустой внутренностью (в топологии сферы) $V_j = V_j(\varepsilon_1)$, $j = 1,\dots,N$, малого диаметра $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$, и пусть при этом множества V_i, V_j, $i \neq j$, могут пересекаться только по своим границам, выбор числа ε_1 будет описан ниже (см., в частности, замечание 2 и формулу (3.130)). Таким образом,

$$V = \bigcup_{j=1}^{N} V_j, \quad \text{причём} \quad V_i \cap V_j = \partial V_i \cap \partial V_j, \quad i \neq j; \tag{3.21}$$

здесь $N = N(\varepsilon)$ и ∂S обозначает границу множества S в соответствующей относительной топологии. Положим

$$T_{\delta j} = [1-\delta(u), 1] \times V_j, \quad j = 1,\dots,N. \tag{3.22}$$

Согласно формулам (3.12), (3.21) выполнено равенство

$$T_\delta = \bigcup_{j=1}^{N} T_{\delta j}, \quad \text{причём} \quad T_{\delta i} \cap T_{\delta j} = \partial T_{\delta i} \cap \partial T_{\delta j}, \quad i \neq j. \tag{3.23}$$

Применяя метод статьи [26], выведем асимптотически точные оценки для вероятностей

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_c(t,v) > u\Big\}, \quad j = 1,\ldots,N, \tag{3.24}$$

при $c = 1 \pm \varepsilon$, а затем, используя связь полученных оценок с вероятностью (3.20), найдём точную асимптотику вероятности $\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}$. Нужные нам асимптотические оценки вероятностей (3.24) выводятся одинаковым способом и записаны ниже в лемме 16. Выведем оценки вероятности $\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta 1}} Z_c(t,v) > u\Big\}$.

В силу формулы (3.18) и замечания 1 ковариационная функция гауссовского центрированного поля $Z_c(t,v)$ инвариантна относительно вращений цилиндра $[0,1]\times V$ вокруг оси t, следовательно, распределение поля $Z_c(t,v)$ также инвариантно относительно указанных вращений. Отсюда вытекает, что без ограничения общности мы можем полагать, что

$$\underbrace{(1,0,\ldots,0)}_{n} \text{ является внутренней точкой множества } V_1 \text{ в топологии сферы.} \tag{3.25}$$

Согласно формуле (3.2) и условию (3.25) для достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ точка $v = (v_1,\ldots,v_n)$ из множества $V_1 = V_1(\varepsilon_1)$ представима в виде

$$v = (v_1,\tilde v) = \Big(\sqrt{1-\|\tilde v\|^2},\tilde v\Big), \tag{3.26}$$

где

$$\tilde v = (v_2,\ldots,v_n), \quad \|\tilde v\|^2 = v_2^2 + \ldots + v_n^2. \tag{3.27}$$

Отсюда по формулам (3.11), (3.22) вытекает, что для достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно больших $u > 0$ n-мерное многообразие $T_{\delta 1}$ представимо в виде

$$T_{\delta 1} = \Big\{\Big(t,\sqrt{1-\|\tilde v\|^2},\tilde v\Big) : t\in[1-\delta,1],\ \tilde v\in\tilde V_1\Big\}, \tag{3.28}$$

где

$$\tilde V_1 \equiv \tilde V_1(\varepsilon_1) := \Big\{\tilde v\colon \Big(\sqrt{1-\|\tilde v\|^2},\tilde v\Big)\in V_1\Big\}. \tag{3.29}$$

Таким образом, множество $T_{\delta 1}$ описывается n параметрами $(t,\tilde v)$.

Из вышеизложенного следует, что для достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно больших $u > 0$ $(n+1)$-параметрическое гауссовское поле $Z_c(t,v)$, $(t,v)\in T_{\delta 1}$, представимо в виде n-параметрического неоднородного гауссовского поля

$$Y_c(t,\tilde v) := Z_c\Big(t,\sqrt{1-\|\tilde v\|^2},\tilde v\Big), \tag{3.30}$$

заданного на множестве

$$\tilde T_{\delta 1} := [1-\delta(u),1]\times\tilde V_1(\varepsilon_1). \tag{3.31}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta 1}} Z_c(t,v) > u\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} Y_c(t,\tilde v) > u\Big\}. \tag{3.32}$$

3.3. Описание характеристик неоднородного гауссовского поля $Y_c(t, \tilde{v})$ и переход к однородному гауссовскому полю $\xi_q(t, \tilde{v})$

Ниже мы будем часто использовать обозначения (3.27).

Лемма 8.

(i) *Гауссовское n-параметрическое поле $Y_c(t,\tilde{v})$, $(t,\tilde{v}) \in \tilde{T}_{\delta 1}$, имеет среднее нуль, дисперсию и корреляционную функцию следующего вида*:

$$\mathbf{D}Y_c(t,\tilde{v}) \equiv \mathbf{E}\,Y_c^2(t,\tilde{v}) = \sigma_c^2(t) = \frac{1}{[1+(c/2)(1-t)]^2}, \tag{3.33}$$

$$r_Y[(t,\tilde{v}),(s,\tilde{y})] \equiv \frac{\mathbf{E}\,Y_c(t,\tilde{v})\ \mathbf{E}\,Y_c(s,\tilde{y})}{\sqrt{\mathbf{D}Y_c(t,\tilde{v})\,\mathbf{D}Y_c(s,\tilde{y})}} =$$

$$= \frac{\min(t,s)}{\sqrt{ts}}\left[1-\frac{1}{2}\Big(\sqrt{1-\|\tilde{v}\|^2}-\sqrt{1-\|\tilde{y}\|^2}\Big)^2-\frac{1}{2}\|\tilde{v}-\tilde{y}\|^2\right], \tag{3.34}$$

где $(t,\tilde{v}),(s,\tilde{y}) \in \tilde{T}_{\delta 1}$, $\tilde{y} = (y_2,\ldots,y_n)$.

(ii) *Для фиксированного произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, такое что для всех достаточно больших $u > 0$ и всех $(t,\tilde{v}),(s,\tilde{y}) \in \tilde{T}_{\delta 1}$ выполнены неравенства*

$$1-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)(|t-s|+\|\tilde{v}-\tilde{y}\|^2) \leqslant r_Y[(t,\tilde{v}),(s,\tilde{y})] \leqslant$$
$$\leqslant 1-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)(|t-s|+\|\tilde{v}-\tilde{y}\|^2). \tag{3.35}$$

Таким образом, ковариационная функция $r_Y[(t,\tilde{v}),(s,\tilde{y})]$ поля $Y_c(t,\tilde{v})/\sigma_c(t)$, $(t,\tilde{v}) \in \tilde{T}_{\delta 1}$, удовлетворяет условию локальной однородности с параметрами

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 2. \tag{3.36}$$

Доказательство. Соотношения (3.33), (3.34) пункта (i) леммы непосредственно вытекают из леммы 5 и формул (3.18), (3.26), (3.30). Докажем утверждение (ii) леммы, используя подход работы [26, с. 330]. Применяя неравенство Коши—Буняковского, после несложных вычислений убеждаемся, что для всех $\tilde{v},\tilde{y} \in \tilde{V}_1(\varepsilon_1)$ справедливы соотношения

$$\big(\sqrt{1-\|\tilde{v}\|^2}-\sqrt{1-\|\tilde{y}\|^2}\,\big)^2 = \frac{(\|\tilde{v}\|^2-\|\tilde{y}\|^2)^2}{\big(\sqrt{1-\|\tilde{v}\|^2}+\sqrt{1-\|\tilde{y}\|^2}\,\big)^2} =$$
$$= \frac{\langle \tilde{v}-\tilde{y},\tilde{v}+\tilde{y}\rangle^2}{\big(\sqrt{1-\|\tilde{v}\|^2}+\sqrt{1-\|\tilde{y}\|^2}\,\big)^2} \leqslant \|\tilde{v}-\tilde{y}\|^2\psi(\tilde{v},\tilde{y}), \tag{3.37}$$

где

$$\psi(\tilde{v},\tilde{y}) := \frac{\|\tilde{v}+\tilde{y}\|^2}{\big(\sqrt{1-\|\tilde{v}\|^2}+\sqrt{1-\|\tilde{y}\|^2}\,\big)^2}. \tag{3.38}$$

По определению (3.29) максимальное значение непрерывной функции (3.38) на компакте $\tilde V_1(\varepsilon_1)\times\tilde V_1(\varepsilon_1)$ может быть сделано произвольно малым в результате выбора достаточно малого диаметра ε_1 компактного множества V_1. Используя этот факт и формулы (3.34), (3.37), с учётом разложения

$$\frac{\min(t,s)}{\sqrt{ts}}=1-\frac{1}{2}|t-s|\big(1+o(1)\big)\quad\text{при}\quad t,s\to 1,\quad |t-s|\to 0,$$

мы получаем утверждение (ii) леммы. Лемма 8 доказана. □

Замечание 2. Далее полагаем, что число $\varepsilon_1>0$ выбрано таким, что для всех достаточно больших $u>0$ и всех $(t,\tilde v),(s,\tilde y)\in\tilde T_{\delta 1}$ выполнено неравенство (3.35).

Для числа $q>0$ обозначим через $\xi_q(t,\tilde v)$, $(t,\tilde v)\in\mathbf{R}^n$, однородное гауссовское поле с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией

$$R^q_\xi[(t,\tilde v),(s,\tilde y)]\equiv\mathbf{E}\,\xi_q(t,\tilde v)\,\xi_q(s,\tilde y)=\exp\{-q(|t-s|+\|\tilde v-\tilde y\|^2)\}. \tag{3.39}$$

Рассматривая поле $\xi_q(t,\tilde v)$ на множестве $(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}$ и используя стандартное разложение экспоненты в ряд, несложно убедиться, что в силу неравенства (3.35) для всех достаточно больших $u>0$ и всех $(t,\tilde v),(s,\tilde y)\in\tilde T_{\delta 1}$ справедливы соотношения

$$R^{q+}_\xi[(t,\tilde v),(s,\tilde y)]\leqslant r_Y[(t,\tilde v),(s,\tilde y)]\leqslant R^{q-}_\xi[(t,\tilde v),(s,\tilde y)], \tag{3.40}$$

$$R^{q+}_\xi[(t,\tilde v),(t,\tilde v)]=R^{q-}_\xi[(t,\tilde v),(t,\tilde v)]=r_Y[(t,\tilde v),(t,\tilde v)]=1, \tag{3.41}$$

где

$$q_+=\frac{1}{2}+2\varepsilon,\quad q_-=\frac{1}{2}-2\varepsilon. \tag{3.42}$$

Применяя, с учётом (3.33), (3.40), (3.41), теорему 3 Д. Слепяна, заключаем, что для достаточно больших $u>0$ выполнены неравенства

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}}\xi_{q_-}(t,\tilde v)\,\sigma_c(t)>u\Big\}\leqslant\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}}Y_c(t,\tilde v)>u\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}}\xi_{q_+}(t,\tilde v)\,\sigma_c(t)>u\Big\}. \tag{3.43}$$

3.4. Разбиение множества $\tilde T_{\delta 1}$ на малые параллелепипеды и применение неравенства Бонферрони

Точные асимптотики первой и последней вероятностей из формулы (3.43) вычисляются аналогично, далее для краткости записи вместо $q_\pm$ будем писать просто q. В соответствии с формулой (3.36) для параметров $\lambda>0$, $u>0$ определим величины

$$\Delta_1=\frac{\lambda}{u^2},\quad\Delta_2=\frac{\lambda}{u},\quad\Delta=(\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_2)\in\mathbf{R}^n. \tag{3.44}$$

По формуле (3.11) справедливо соотношение

$$\frac{\delta(u)}{\Delta_1} \to \infty \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{3.45}$$

Ниже $u > 0$ и $\lambda > 0$ — большие параметры. Пусть $\mathbf{Z}^n$ — множество точек с целочисленными координатами в $\mathbf{R}^n$. Для векторов $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbf{Z}^n$ и Δ введём операцию

$$l \cdot \Delta := (l_1\Delta_1, l_2\Delta_2, \ldots, l_n\Delta_2) \in \mathbf{R}^n. \tag{3.46}$$

Разобьём множество $\tilde{T}_{\delta 1}$ семейством измельчающихся с ростом u параллелепипедов

$$\begin{gathered} K_l(\Delta) := K_0(\Delta) + l \cdot \Delta \equiv \{(t, \tilde{v}) \in \mathbf{R}^n : \\ 1 + (l_1 - 1)\Delta_1 \leqslant t \leqslant 1 + l_1\Delta_1,\ l_j\Delta_2 \leqslant v_j \leqslant (l_j + 1)\Delta_2,\ j = 2, \ldots, n\}, \end{gathered} \tag{3.47}$$

где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbf{Z}^n$,

$$K_0(\Delta) := \{(t, \tilde{v}) \in \mathbf{R}^n : 1 - \Delta_1 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant v_j \leqslant \Delta_2,\ j = 2, \ldots, n\}.$$

Применяя неравенство Бонферрони, получаем следующее соотношение для достаточно больших $u > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathcal{L}^+} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{(t,\tilde{v}) \in K_l(\Delta)} \xi_q(t, \tilde{v})\sigma_c(t) > u \Big\} \geqslant \mathbf{P}\Big\{ \sup_{(t,\tilde{v}) \in \tilde{T}_{\delta 1}} \xi_q(t, \tilde{v})\sigma_c(t) > u \Big\} \geqslant \\ \geqslant \sum_{l \in \mathcal{L}^-} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{(t,\tilde{v}) \in K_l(\Delta)} \xi_q(t, \tilde{v})\,\sigma_c(t) > u \Big\} - \\ - \sum_{l,m \in \mathcal{L}^+,\ l \neq m} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{(t,\tilde{v}) \in K_l(\Delta)} \xi_q(t, \tilde{v})\sigma_c(t) > u,\ \sup_{(t,\tilde{v}) \in K_m(\Delta)} \xi_q(t, \tilde{v})\sigma_c(t) > u \Big\}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

где $\mathcal{L}^+$ ($\mathcal{L}^-$) — множество тех $l \in \mathbf{Z}^n$, для которых параллелепипеды $K_l(\Delta)$ имеют с $\tilde{T}_{\delta 1}$ непустое пересечение (соответственно содержатся в $\tilde{T}_{\delta 1}$).

Параллелепипеды $K_l(\Delta)$, для которых $l_1 = 0$, назовём *главными* параллелепипедами, параллелепипеды $K_l(\Delta)$, для которых $l_1 \neq 0$, назовём *неглавными* параллелепипедами. Положим

$$\mathcal{L}_0 = \{l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathcal{L}^+ : l_1 = 0\}. \tag{3.49}$$

Лемма 9.

(i) *Гауссовские однородные центрированные поля*

$$[\xi_q(t, \tilde{v}), (t, \tilde{v}) \in \mathbf{R}^n], \quad [\xi_q(1 - t, \tilde{v}), (t, \tilde{v}) \in \mathbf{R}^n]$$

имеют одинаковое распределение.

(ii) *Для $l \in \mathcal{L}_0$ при $u \to \infty$ выполнено соотношение*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{(t,\tilde{v}) \in K_l(\Delta)} \xi_q(t, \tilde{v})\sigma_c(t) > u \Big\} = \\ = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,u} H_1^{c/(2q)}(q\lambda)[H_2(\sqrt{q}\,\lambda)]^{n-1}\big(1 + o(1)\big). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из формулы для ковариационной функции (3.39). Докажем второе утверждение. Учитывая формулы (3.18), (3.46), (3.47), однородность поля $\xi_q(t,\tilde{v})$ и утверждение (i) леммы, получаем следующие соотношения для $l \in \mathcal{L}_0$ и достаточно больших $u > 0$:

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde{v})\sigma_c(t) > u\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in K_l(\Delta)} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+(c/2)(1-t)} > u\Big\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in[0,\Delta_1]\times[0,\Delta_2]^{n-1}} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+(c/2)t} > u\Big\}. \qquad (3.51)$$

Согласно (3.39), (3.44) к последней вероятности в (3.51) применима лемма 2 с параметрами

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 2, \quad b_1 = \frac{c}{2}, \quad b_2 = \ldots = b_n = 0, \qquad (3.52)$$

$$S_1 = \ldots = S_n = 0, \quad T_1 = \ldots = T_n = \lambda, \quad C = \mathrm{diag}(q, \sqrt{q}, \ldots, \sqrt{q}). \qquad (3.53)$$

Применяя лемму 2 к указанной вероятности и учитывая формулы (2.8), (2.9), (3.52), (3.53), получаем соотношение (3.50). Лемма 9 доказана. □

3.5. Асимптотические оценки одномерных сумм из формулы (3.48)

3.5.1. Асимптотики сумм по главным параллелепипедам

Обозначим через $M_+ = M_+(u)$ число главных параллелепипедов, которые участвуют в первой сумме из формулы (3.48) по множеству индексов $\mathcal{L}^+$, и через $M_- = M_-(u)$ — число главных параллелепипедов, которые участвуют во второй сумме по множеству $\mathcal{L}^-$ из той же формулы. Несложно видеть, что согласно формулам (3.31), (3.44), (3.47) числа $M_+(u)$, $M_-(u)$ имеют одинаковую асимптотику при $u \to \infty$ следующего вида:

$$M_\pm(u) = \mathrm{mes}_{n-1}(\tilde{V}_1)\,\frac{u^{n-1}}{\lambda^{n-1}}\big(1+o(1)\big). \qquad (3.54)$$

Лемма 10. *Для фиксированных $\lambda > 0$ при $u \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\sum_{l\in\mathcal{L}_0} \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde{v})\sigma_c(t) > u\Big\} = G(u,\lambda)\big(1+o(1)\big), \qquad (3.55)$$

$$\sum_{l\in\mathcal{L}^-\cap\mathcal{L}_0} \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde{v})\sigma_c(t) > u\Big\} = G(u,\lambda)\big(1+o(1)\big), \qquad (3.56)$$

где

$$G(u,\lambda) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\frac{u^{n-2}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde{V}_1)}{\lambda^{n-1}}\,H_1^{c/(2q)}(q\lambda)\,[H_2(\sqrt{q}\,\lambda)]^{n-1}. \qquad (3.57)$$

Доказательство. Соотношения (3.55)—(3.57) непосредственно вытекают из формул (3.49), (3.50), (3.54), поскольку выражение в правой части формулы (3.50) не зависит от индекса $l \in \mathcal{L}_0$. Лемма 10 доказана. □

3.5.2. Асимптотические оценки сумм по неглавным параллелепипедам

Лемма 11. *Найдутся постоянные* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$, *такие что для достаточно больших* $u > 0$ *и достаточно больших* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{l\in\mathcal{L}^+\setminus\mathcal{L}_0} \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde v)\sigma_c(t) > u\Big\} \leqslant \\ \leqslant C_1 \operatorname{mes}_{n-1}(\tilde V_1)\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} u^{n-2}\exp\{-C_2\lambda\}. \quad (3.58)$$

Доказательство. Оценим сверху отдельно каждое слагаемое суммы из левой части формулы (3.58). Несложно видеть, что если $l = (l_1,\ldots,l_n) \in \mathcal{L}^+\setminus\mathcal{L}_0$, то согласно формулам (3.31), (3.47), (3.50) выполнено неравенство

$$l_1 \leqslant -1. \quad (3.59)$$

Учитывая формулы (3.18), (3.47), однородность поля $\xi_q(t,\tilde v)$ и утверждение (i) леммы 9, получаем следующие равенства для $l \in \mathcal{L}^+\setminus\mathcal{L}_0$ и достаточно больших $u > 0$:

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde v)\sigma_c(t) > u\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in K_l(\Delta)} \frac{\xi_q(t,\tilde v)}{1+(c/2)|1-t|} > u\Big\} = \\ = \mathbf{P}\Big\{\sup_{-l_1\Delta_1\leqslant t\leqslant(1-l_1)\Delta_1,\ \tilde v\in[0,\Delta_2]^{n-1}} \frac{\xi_q(t,\tilde v)}{1+(c/2)|t|} > u\Big\}. \quad (3.60)$$

Если $-l_1\Delta_1 \leqslant t \leqslant (1-l_1)\Delta_1$, то в силу неравенства (3.59) справедлива оценка $|t| \geqslant |l_1|\Delta_1$. Используя эту оценку, формулу (3.44) и однородность поля $\xi_q(t,\tilde v)$, получаем следующие соотношения для достаточно больших $u > 0$:

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{-l_1\Delta_1\leqslant t\leqslant(1-l_1)\Delta_1,\ \tilde v\in[0,\Delta_2]^{n-1}} \frac{\xi_q(t,\tilde v)}{1+(c/2)|t|} > u\Big\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\Big\{\sup_{-l_1\Delta_1\leqslant t\leqslant(1-l_1)\Delta_1,\ \tilde v\in[0,\Delta_2]^{n-1}} \xi_q(t,\tilde v) > u\theta_{l_1}\Big\} = \\ = \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in[0,\Delta_1]\times[0,\Delta_2]^{n-1}} \xi_q(t,\tilde v) > u\theta_{l_1}\Big\}, \quad (3.61)$$

где

$$\theta_{l_1} = 1 + \frac{c}{2}|l_1|\Delta_1 = 1 + \frac{c}{2}|l_1|\frac{\lambda}{u^2}. \quad (3.62)$$

Согласно (3.39), (3.44) к последней вероятности в (3.61) применима лемма 2 с большим параметром $\tilde u = u\theta_{l_1}$ и параметрами

$$\alpha_1 = 1,\ \ \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 2,\ \ b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0, \quad (3.63)$$

$$S_1 = \ldots = S_n = 0,\ \ T_1 = \lambda\theta_{l_1}^2,\ \ T_2 = \ldots = T_n = \lambda\theta_{l_1},\ \ C = \operatorname{diag}(q,\sqrt{q},\ldots,\sqrt{q}). \quad (3.64)$$

Применяя лемму 2 к указанной вероятности и учитывая формулы (2.8), (2.9), (3.63), (3.64), получаем следующее соотношение при $u \to \infty$:

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in[0,\Delta_1]\times[0,\Delta_2]^{n-1}} \xi_q(t,\tilde v) > u\theta_{l_1}\Big\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{u^2\theta_{l_1}^2}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,u\,\theta_{l_1}}\,H_1(q\lambda\theta_{l_1}^2)\,[H_2(\sqrt{q}\,\lambda\,\theta_{l_1})]^{n-1}\big(1+o(1)\big). \quad (3.65)$$

Согласно формулам (2.12), (2.14) для достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$H_1(q\lambda\theta_{l_1}^2)\,[H_2(\sqrt{q}\,\lambda\theta_{l_1})]^{n-1} \leqslant \frac{q^{(n+1)/2}}{\pi^{(n-1)/2}}2^n\lambda^n\theta_{l_1}^{n+1}. \quad (3.66)$$

Отметим, что последняя вероятность в (3.60), а также все последующие формулы вплоть до формулы (3.66) не зависят от индексов $l_2,\dots,l_n$. Используя этот факт и учитывая определение числа $M_+(u)$ и соотношения (3.54), (3.60)—(3.62), (3.65), (3.66), убеждаемся, что найдутся постоянные $C_i > 0$, такие что для всех достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливы неравенства

$$\sum_{l\in\mathcal{L}^+\setminus\mathcal{L}_0}\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in K_l(\Delta)}\xi_q(t,\tilde v)\sigma_c(t) > u\Big\} \leqslant C_3\frac{M_+(u)}{u}\lambda^n\sum_{l_1=1}^{\infty}\theta_{l_1}^n\exp\left\{-\frac{u^2\theta_{l_1}^2}{2}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_4\,\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_1)\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}u^{n-2}\sum_{l_1=1}^{\infty}\exp\{-C_5 l_1\lambda\}. \quad (3.67)$$

Отсюда, очевидно, вытекает утверждение леммы. Лемма 11 доказана. □

3.6. Асимптотические оценки двойной суммы из формулы (3.48)

Оценим сверху двойную сумму из формулы (3.48), которую для краткости мы обозначим $\Sigma^c(u)$:

$$\Sigma^c(u) := \sum_{l,m\in\mathcal{L}^+,l\neq m}\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in K_l(\Delta)}\xi_q(t,\tilde v)\sigma_c(t) > u,\ \sup_{(t,\tilde v)\in K_m(\Delta)}\xi_q(t,\tilde v)\sigma_c(t) > u\Big\}. \quad (3.68)$$

Несложно видеть, что если $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathcal{L}^+$, согласно формулам (3.31), (3.44), (3.46) выполнены неравенства

$$-\operatorname{Ent}\left(\frac{\delta(u)}{\lambda u^{-2}}\right) - 1 \leqslant l_1 \leqslant 0, \quad (3.69)$$

где $\operatorname{Ent}(x)$ обозначает целую часть положительного числа x. Отметим, что в силу (3.45), число из левой части неравенства (3.69) стремится к $-\infty$ при $u \to \infty$.

Для $l \in \mathcal{L}^+$ определим множество

$$\Pi_l \equiv \Pi_l(\Delta) := \{(t, \tilde{v})\colon \\ -l_1\Delta_1 \leqslant t \leqslant (1-l_1)\Delta_1,\ l_j\Delta_2 \leqslant v_j \leqslant (l_j+1)\Delta_2,\ j=2,\dots,n\}. \quad (3.70)$$

Учитывая формулы (3.18), (3.47), (3.70) и утверждение (i) леммы 9, получаем следующие равенства для $l=(l_1,\dots,l_n), m=(m_1,\dots,m_n) \in \mathcal{L}^+$ и достаточно больших $u>0$

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde{v})\sigma_c(t) > u,\ \sup_{(t,\tilde{v})\in K_m(\Delta)} \xi_q(t,\tilde{v})\sigma_c(t) > u\Big\} = \\ = \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in \Pi_l(\Delta)} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+(c/2)|t|} > u,\ \sup_{(t,\tilde{v})\in \Pi_m(\Delta)} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+(c/2)|t|} > u\Big\}. \quad (3.71)$$

Если $-l_1\Delta_1 \leqslant t \leqslant (1-l_1)\Delta_1$, то в силу неравенства (3.69) справедлива оценка $|t| \geqslant |l_1|\Delta_1$; аналогично если $-m_1\Delta_1 \leqslant t \leqslant (1-m_1)\Delta_1$, то справедлива оценка $|t| \geqslant |m_1|\Delta_1$. Используя эти оценки и формулы (3.44), (3.62), получаем следующее неравенство для достаточно больших $u>0$:

$$\tilde{p}_{l,m}(u) := \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in \Pi_l(\Delta)} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+\frac{c}{2}|t|} > u,\ \sup_{(t,\tilde{v})\in \Pi_m(\Delta)} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+\frac{c}{2}|t|} > u\Big\} \leqslant p_{l,m}(u), \quad (3.72)$$

где

$$p_{l,m}(u) := \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde{v})\in \Pi_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde{v}) > u\theta_{l_1},\ \sup_{(t,\tilde{v})\in \Pi_m(\Delta)} \xi_q(t,\tilde{v}) > u\theta_{m_1}\Big\}. \quad (3.73)$$

Для борелевских множеств $A, B \subset \mathbf{R}^n$ определим евклидово расстояние между ними:

$$\rho(A,B) = \inf_{x\in A,\ y\in B} \|x-y\|. \quad (3.74)$$

Множество суммирования в двойной сумме Σ^c разобьём на две части:

$$\mathcal{L}_1^+ := \{(l,m)\colon l,m\in\mathcal{L}^+,\ l\neq m,\ \rho(\Pi_l,\Pi_m)>0\}, \quad (3.75)$$

$$\mathcal{L}_2^+ := \{(l,m)\colon l,m\in\mathcal{L}^+,\ l\neq m,\ \rho(\Pi_l,\Pi_m)=0\}. \quad (3.76)$$

Согласно формулам (3.68), (3.71)—(3.73) справедливо неравенство

$$0 \leqslant \Sigma^c \leqslant \Sigma_1^c + \Sigma_2^c, \quad (3.77)$$

где

$$\Sigma_i^c := \sum_{(l,m)\in\mathcal{L}_i^+} \tilde{p}_{l,m}(u), \quad i=1,2. \quad (3.78)$$

В двойной сумме Σ_1^c суммирование производится по *несоседним* параллелепипедам Π_l, Π_m, т. е. в случае когда множества Π_l, Π_m не имеют общих вершин; в двойной сумме Σ_2^c суммирование производится по *соседним* параллелепипедам Π_l, Π_m, которые имеют хотя бы одну общую вершину.

3.6.1. Асимптотические оценки двойной суммы Σ_1^c по несоседним параллелепипедам

Лемма 12.

(i) *Пусть* $(l,m) \in \mathcal{L}_1^+$. *Тогда найдутся постоянные* $\tilde{C}_i > 0$, $i = 1,2,3$, *такие что для достаточно больших* $u > 0$ *и достаточно больших* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$p_{l,m}(u) \leqslant \tilde{C}_1 \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{\lambda^{2n}}{u} \times \\ \times \exp\biggl\{-\tilde{C}_2\lambda(|l_1| + |m_1|) - \tilde{C}_3\lambda^2 \sum_{j=2}^{n}(|l_j - m_j| - 1)^2\biggr\}. \quad (3.79)$$

(ii) *Найдутся постоянные* $\tilde{C}_i > 0$, $i = 4,5$, *такие что для достаточно больших* $u > 0$ *и достаточно больших* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\Sigma_1^c \leqslant \tilde{C}_4 \operatorname{mes}_{n-1}(\tilde{V}_1) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} u^{n-2} \exp\{-\tilde{C}_5\lambda\}. \quad (3.80)$$

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Учитывая определение 1 и формулу (3.39), убеждаемся, что однородное гауссовское поле $\xi_q(t,\tilde{v})$, $(t,\tilde{v}) \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию локальной однородности (C1) с параметрами

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 2, \quad D_1 = \frac{q}{2}, \quad D_2 = 2q. \quad (3.81)$$

Зафиксируем произвольную пару $(l,m) \in \mathcal{L}_1^+$. Учитывая (3.75), (3.78), к вероятности (3.73) применим лемму 3, положив в ней

$$a = \theta_{l_1}, \quad b = \theta_{m_1}, \quad T = \lambda, \\ A = [0,\lambda]^n + \lambda(-l_1, l_2, \ldots, l_n), \quad B = [0,\lambda]^n + \lambda(-m_1, m_2, \ldots, m_n). \quad (3.82)$$

Легко видеть, что согласно формулам (2.3), (3.44), (3.70), (3.81), (3.82) справедливы равенства

$$\Pi_l(\Delta) = g_u A, \quad \Pi_m(\Delta) = g_u B. \quad (3.83)$$

Если параллелепипеды Π_l, Π_m являются несоседними, то кубы A и B также являются несоседними, кроме того, среди индексов $\{1,2,\ldots,n\}$ найдётся хотя бы один индекс $\nu = \nu(l,m)$, такой что выполнено неравенство

$$|l_\nu - m_\nu| \geqslant 2. \quad (3.84)$$

Пусть

$$x = h + \lambda(-l_1, l_2, \ldots, l_n) \in A, \quad y = z + \lambda(-m_1, m_2, \ldots, m_n) \in B, \quad (3.85)$$

где

$$h = (h_1, \ldots, h_n) \in [0,\lambda]^n, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in [0,\lambda]^n. \quad (3.86)$$

Используя определение величины $|t|_\alpha$ в формуле (2.2), а также соотношения (3.81), (3.85), (3.86), получаем равенство

$$|x-y|_\alpha = |h_1 - z_1 + \lambda(m_1 - l_1)| + \sum_{j=2}^{n} |h_j - z_j + \lambda(l_j - m_j)|^2. \tag{3.87}$$

Пусть F — это множество пар $(l,m) \in \mathcal{L}_1^+$, для которых выполнено хотя бы одно из неравенств

$$|l_2 - m_2| \geqslant 2, \ldots, \quad |l_n - m_n| \geqslant 2. \tag{3.88}$$

Согласно формулам (3.86)—(3.88) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |x-y|_\alpha &\geqslant I_F(l,m) \sum_{j=2}^{n} |h_j - z_j + \lambda(l_j - m_j)|^2 \geqslant \\ &\geqslant I_F(l,m)\lambda^2 \max_{2\leqslant j\leqslant n} (|l_j - m_j| - 1)^2 \geqslant I_F(l,m) \frac{\lambda^2}{n-1} \sum_{j=2}^{n} (|l_j - m_j| - 1)^2, \end{aligned} \tag{3.89}$$

здесь и ниже $I_F(x)$ — индикаторная функция множества F, т. е. $I_F(x) = 1$, если $x \in F$, $I_F(x) = 0$, если $x \notin F$. По формуле (2.13) из соотношения (3.89) вытекает, что для величин (3.81), (3.82) справедливо неравенство

$$\rho_\alpha(A,B) \geqslant I_F(l,m) \frac{\lambda^2}{n-1} \sum_{j=2}^{n} (|l_j - m_j| - 1)^2. \tag{3.90}$$

Используя лемму 3 и формулы (3.62), (3.81)—(3.83), (3.90), убеждаемся, что найдутся постоянные $\tilde{C}_i > 0$, $i = 6, 7$, такие что для достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} p_{l,m}(u) \leqslant \tilde{C}_6 \lambda^{2n} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{\exp\{-(c/4)\lambda(|l_1| + |m_1|)\}}{u(1 + (c/4)(|l_1| + |m_1|)\lambda u^{-2})} \times \\ \times \exp\left\{-\tilde{C}_7 I_F(l,m) \lambda^2 \sum_{j=2}^{n} (|l_j - m_j| - 1)^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Отсюда, очевидно, вытекает утверждение (i) леммы. Докажем второе утверждение леммы, используя подход, применённый в аналогичной ситуации в [26, с. 324]. Будем записывать индексы l, m в виде

$$l = (l_1, \tilde{l}), \quad m = (m_1, \tilde{m}), \quad \text{где } \tilde{l} = (l_2, \ldots, l_n), \quad \tilde{m} = (m_2, \ldots, m_n). \tag{3.92}$$

Тогда согласно (3.72), (3.78), (3.92) имеют место следующие соотношения:

$$\Sigma_1^c = \sum_{l_1, m_1} \sum_{\tilde{k}} \sum_{\tilde{l}, \tilde{m}:\, \tilde{l} - \tilde{m} = \tilde{k}} \tilde{p}_{l,m}(u) I_{\mathcal{L}_1^+}(l,m) \leqslant \sum_{l_1, m_1} \sum_{\tilde{k}} \sum_{\tilde{l}, \tilde{m}:\, \tilde{l} - \tilde{m} = \tilde{k}} p_{l,m}(u) I_{\mathcal{L}_1^+}(l,m). \tag{3.93}$$

При фиксированных l_1, m_1, $\tilde{k} = (k_2, \ldots, k_n)$ последняя сумма $\sum\limits_{\tilde{l}, \tilde{m}:\, \tilde{l} - \tilde{m} = \tilde{k}}$ в (3.93) содержит число слагаемых, которое не превышает числа главных параллелепипедов $M_+(u)$. Учитывая этот факт и формулы (3.54), (3.69), (3.79), (3.84), (3.93), заключаем, что для постоянных $\tilde{C}_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\Sigma_1^c \leqslant 2\tilde{C}_1 \operatorname{mes}_{n-1}(\tilde{V}_1) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} u^{n-2}\lambda^{n+1} \sum_{l_1, m_1} \exp\{-\tilde{C}_2\lambda(|l_1| + |m_1|)\} \times$$
$$\times \sum_{\tilde{k}} \exp\left\{-\tilde{C}_3\lambda^2 \sum_{j=2}^{n}(|k_j| - 1)^2\right\} I_{\{|l_1|+|m_1|+\sum_{j=2}^{n}(|k_j|-1)^2>0\}}(l_1, m_1, \tilde{k}). \quad (3.94)$$

Из неравенства (3.94), очевидно, вытекает утверждение (ii) леммы. Лемма 12 доказана. □

3.6.2. Асимптотические оценки двойной суммы Σ_2^c по соседним параллелепипедам

Множество суммирования $\mathcal{L}_2^+$, заданное в (3.76), разобьём на две части:

$$\mathcal{L}_3^+ := \{(l, m) \in \mathcal{L}_2^+ : l_1 = m_1 = 0\}, \quad (3.95)$$
$$\mathcal{L}_4^+ := \{(l, m) \in \mathcal{L}_2^+ : |l_1| + |m_1| > 0\}. \quad (3.96)$$

Таким образом, справедливы равенства

$$\mathcal{L}_2^+ = \mathcal{L}_3^+ \cup \mathcal{L}_4^+, \quad (3.97)$$
$$\Sigma_2^c = \Sigma_3^c + \Sigma_4^c, \quad (3.98)$$

где

$$\Sigma_j^c := \sum_{(l,m)\in\mathcal{L}_j^+} \tilde{p}_{l,m}(u), \quad j = 3, 4. \quad (3.99)$$

Отметим, что согласно (3.49) в двойной сумме Σ_3^c суммирование производится по *соседним главным* параллелепипедам Π_l, Π_m, в то время как в двойной сумме Σ_4^c суммирование производится по соседним параллелепипедам Π_l, Π_m, хотя бы один из которых является *неглавным* параллелепипедом. Асимптотическая оценка двойной суммы Σ_3^c даётся в следующей лемме.

Лемма 13.

(i) *Пусть $(l, m) \in \mathcal{L}_3^+$. Тогда найдётся постоянная $\hat{C}_1 > 0$, такая что для достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\tilde{p}_{l,m}(u) \leqslant \hat{C}_1 \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{\lambda^{n-3/2}}{u}. \quad (3.100)$$

(ii) *Найдётся постоянная $\hat{C}_2 > 0$, такая что для достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\Sigma_3^c \leqslant \hat{C}_2 \operatorname{mes}_{n-1}(\tilde{V}_1) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{u^{n-2}}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.101)$$

Доказательство. Доказательство леммы проводится аналогично выводу соответствующего неравенства в [26, с. 324]. Докажем первое утверждение леммы при помощи леммы 4. Как уже было указано, однородное гауссовское поле $\xi_q(t,\tilde{v})$, $(t,\tilde{v}) \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию локальной однородности (C1) с параметрами (3.81). Зафиксируем произвольную пару $(l,m) \in \mathcal{L}_3^+$, где

$$l = (0, l_2, \ldots, l_n), \quad m = (0, m_2, \ldots, m_n). \tag{3.102}$$

Для соседних главных параллелепипедов Π_l, Π_m, каждая из разностей $m_j - l_j$, $j = 2, \ldots, n$, может принимать одно из следующих трёх значений: 0, 1, -1, причём хотя бы одна из указанных разностей принимает значение 1 или -1 (так как $l \neq m$). Без ограничения общности предположим, что

$$m_2 - l_2 = 1. \tag{3.103}$$

Используя однородность поля $\xi_q(t,\tilde{v})$ по аргументу $\tilde{v}$ и формулы (3.44), (3.70), (3.72), получаем следующее равенство для $u > 0$:

$$\tilde{p}_{l,m}(u) = \mathbf{P}\left\{\sup_{(t,\tilde{v})\in g_u\tilde{A}} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+(c/2)|t|} > u, \sup_{(t,\tilde{v})\in g_u\tilde{B}} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+(c/2)|t|} > u\right\}, \tag{3.104}$$

где в соответствии с (2.3), (3.81), (3.102), (3.103)

$$\tilde{A} = [0,\lambda]^n, \quad \tilde{B} = [0,\lambda]^n + \mathbf{t}_0, \tag{3.105}$$

$$\mathbf{t}_0 = \lambda(0, 1, m_3 - l_3, \ldots, m_n - l_n). \tag{3.106}$$

Из вышеизложенного следует, что к вероятности в правой части формулы (3.104) можно применить лемму 4, в которой мы положим $k = 2$,

$$a = b = 1, \quad f(\mathbf{t}) = 1 + \frac{c}{2}|t| \geqslant 1, \quad T_1 = \ldots = T_n = \lambda, \quad T_0 = \sqrt{\lambda}, \tag{3.107}$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\lambda, \sqrt{\lambda}, \lambda, \ldots, \lambda), \quad \tilde{K} = [0,\lambda] \times [0,\sqrt{\lambda}] \times [0,\lambda]^{n-2} + \mathbf{t}_0. \tag{3.108}$$

Применяя лемму 4 с учётом формул (3.81), (3.105)—(3.108), убеждаемся, что найдётся постоянная $\hat{C}_3 > 0$, такая что для достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\tilde{p}_{l,m}(u) \leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{(t,\tilde{v})\in g_u\tilde{K}} \frac{\xi_q(t,\tilde{v})}{1+(c/2)|t|} > u\right\} + \hat{C}_3 \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{\lambda^{2n}}{u} \exp\left\{-\frac{q}{8}\sqrt{\lambda}\right\}. \tag{3.109}$$

Вероятность в правой части формулы (3.109) оценим сверху методом, использованным при выводе соотношения (3.50), учитывая при этом формулы (2.10), (2.11), (2.14). В результате убеждаемся, что найдётся постоянная $\hat{C}_4 > 0$, такая что для достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливы неравенства

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{(t,\tilde v)\in g_u\tilde K}\frac{\xi_q(t,\tilde v)}{1+(c/2)|t|}>u\right\}\leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,u}\,H_1^{c/(2q)}(q\lambda)\,H_2(\sqrt{q\,\lambda})\,[H_2(\sqrt{q}\,\lambda)]^{n-2}\leqslant$$
$$\leqslant \hat C_4\,\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\frac{\lambda^{n-3/2}}{u}. \tag{3.110}$$

Из соотношений (3.109), (3.110) вытекает первое утверждение леммы при условии (3.103). Аналогично рассматриваются остальные возможные случаи, когда $|m_\nu - l_\nu| = 1$ для некоторого индекса $3 \leqslant \nu \leqslant n$. Поскольку правая часть неравенства (3.100) не зависит от значений индексов $(l,m)\in\mathcal{L}_3^+$, то легко видеть, что первое утверждение леммы доказано полностью.

Докажем второе утверждение леммы. Для фиксированного $l\in\mathcal{L}^+$ существует конечное число $c_0(n)$ параллелепипедов Π_m, $m\neq l$, имеющих общую вершину с Π_l. Отсюда следует, что число различных пар соседних главных параллелепипедов из суммы Σ_3^c не превосходит величины $c_0(n)M_+(u)$. Из этого факта и формул (3.54), (3.95), (3.99), (3.100) вытекает утверждение (ii) леммы. Лемма 13 доказана. □

Приведём теперь асимптотическую оценку двойной суммы Σ_4^c (см. (3.99)).

Лемма 14. *Найдутся постоянные $\bar C_1>0$ и $\bar C_2>0$, такие что для достаточно больших $u>0$ и достаточно больших $\lambda>0$ справедливо неравенство*

$$\Sigma_4^c\leqslant \bar C_1\,\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_1)\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}u^{n-2}\exp\{-\bar C_2\lambda\}. \tag{3.111}$$

Доказательство. Однородное гауссовское поле $\xi_q(t,\tilde v)$, $(t,\tilde v)\in\mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию локальной однородности (C1) с параметрами (3.81). Зафиксируем произвольную пару $(l,m)\in\mathcal{L}_4^+$, где согласно (3.96)

$$l=(l_1,l_2,\dots,l_n),\quad m=(m_1,m_2,\dots,m_n),\quad |l_1|+|m_1|>0. \tag{3.112}$$

Для рассматриваемых соседних параллелепипедов Π_l, Π_m каждая из разностей m_j-l_j, $j=1,\dots,n$, может принимать одно из следующих трёх значений: 0, 1, -1, причём хотя бы одна из указанных разностей принимает значение 1 или -1 (так как $l\neq m$) и при этом $|l_1|+|m_1|>0$. Без ограничения общности предположим, что

$$l_1-m_1=1. \tag{3.113}$$

Используя однородность поля $\xi_q(t,\tilde v)$ и формулы (3.44), (3.70), (3.73), получаем следующее равенство для $u>0$:

$$p_{l,m}(u)=\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in g_u\tilde A}\xi_q(t,\tilde v)>u\theta_{l_1},\ \sup_{(t,\tilde v)\in g_u\tilde B}\xi_q(t,\tilde v)>u\theta_{m_1}\Big\}, \tag{3.114}$$

где в соответствии с (2.3), (3.81), (3.112), (3.113)

$$\tilde{A} = [0, \lambda]^n, \quad \tilde{B} = [0, \lambda]^n + \mathbf{t}_0, \tag{3.115}$$

$$\mathbf{t}_0 = \lambda(1, m_2 - l_2, m_3 - l_3, \ldots, m_n - l_n). \tag{3.116}$$

Из вышеизложенного следует, что к вероятности в правой части формулы (3.114) можно применить предложение 2, где мы положим $k = 1$,

$$a = \theta_{l_1}, \quad b = \theta_{m_1}, \quad T_1 = \ldots = T_n = \lambda, \quad T_0 = \sqrt{\lambda}, \tag{3.117}$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\sqrt{\lambda}, \lambda, \ldots, \lambda), \quad \tilde{K} = [0, \sqrt{\lambda}] \times [0, \lambda]^{n-1} + \mathbf{t}_0. \tag{3.118}$$

Применяя предложение 2 с учётом формул (3.81), (3.115)—(3.118), убеждаемся, что найдётся постоянная $\bar{C}_3 > 0$, такая что для достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливо неравенство (ср. с (3.91))

$$p_{l,m}(u) \leqslant \mathbf{P}\left\{ \sup_{(t,\tilde{v}) \in g_u \tilde{K}} \xi_q(t, \tilde{v}) > \frac{\theta_{l_1} + \theta_{m_1}}{2} u \right\} + \\ + \bar{C}_3 \, \lambda^{2n} \exp\left\{ -\frac{u^2}{2} \right\} \frac{\exp\{-(c/4)\lambda(|l_1| + |m_1|)\}}{u(1 + (c/4)(|l_1| + |m_1|)\lambda u^{-2})}. \tag{3.119}$$

Первое слагаемое выражения, стоящего справа в (3.119), мы оценим сверху, используя лемму 2 и формулы (2.8), (2.9), (2.12), (2.14), аналогично тому, как это было сделано при выводе формул (3.65), (3.66). Второе слагаемое выражения, стоящего справа в (3.119), зависит только от l_1, m_1 и не зависит от подвекторов

$$\tilde{l} = (l_2, \ldots, l_n), \quad \tilde{m} = (m_2, \ldots, m_n). \tag{3.120}$$

Учитывая (3.120), представим сумму Σ_4^c в следующем виде (ср. с (3.93)):

$$\Sigma_4^c = \sum_{l_1, m_1} \sum_{\tilde{l}, \tilde{m}} p_{l,m}(u) I_{\mathcal{L}_4^+}(l, m). \tag{3.121}$$

Как уже было указано, для фиксированного $l \in \mathcal{L}^+$ существует конечное число $c_0(n)$ параллелепипедов Π_m, $m \neq l$, имеющих общую вершину с Π_l. Отсюда следует, что при фиксированных l_1, m_1 число слагаемых в последней сумме в (3.121) не превышает величины $c_0(n) M_+(u)$. Учитывая этот факт, формулы (3.54), (3.119) и оценку типа (3.67), относящуюся к суммированию вероятностей, стоящих справа в (3.119), убеждаемся, что найдутся постоянные $\bar{C}_1 > 0$ и $\bar{C}_2 > 0$, такие что для достаточно больших $u > 0$ и достаточно больших $\lambda > 0$ справедливо неравенство (3.111), поскольку у нас $|l_1| + |m_1| > 0$. Лемма 14 доказана. □

3.7. Асимптотика вероятности $\mathrm{P}\Big\{\sup\limits_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\}$ из формулы (3.49)

Лемма 15. *При $u\to\infty$ выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\} = \\ = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\frac{u^{n-2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_1)\frac{(c+2q)q^{(n-1)/2}}{c\pi^{(n-1)/2}}\big(1+o(1)\big). \quad (3.122)$$

Доказательство. Соотношение (3.122) докажем при помощи двух оценок для верхнего и нижнего пределов. Сначала выведем нужную нам оценку для верхнего предела. Согласно формулам (3.48), (3.49) для достаточно больших $u>0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\} \leqslant \sum_{l\in\mathcal{L}^0}\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\} + \\ + \sum_{l\in\mathcal{L}^+\setminus\mathcal{L}_0}\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\}. \quad (3.123)$$

Учитывая формулы (3.55), (3.58), (3.123), заключаем, что найдётся постоянная $C_0>0$, такая что для достаточно больших $\lambda>0$ выполнено неравенство

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \leqslant \\ \leqslant \frac{\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_1)}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{H_2(\sqrt{q}\,\lambda)}{\lambda}\right]^{n-1} H_1^{c/(2q)}(q\lambda) + \exp\{-C_0\lambda\}. \quad (3.124)$$

Беря предел при $\lambda\to\infty$ от обеих частей неравенства (3.124) и используя формулы (2.10), (2.11), (2.14), получаем соотношения

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \\ \leqslant \frac{\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_1)}{\sqrt{2\pi}}(\sqrt{q}H_2)^{n-1}\tilde H_1^{c/(2q)} = \frac{\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_1)}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(c+2q)q^{(n-1)/2}}{c\pi^{(n-1)/2}}. \quad (3.125)$$

Мы вывели нужную нам оценку для верхнего предела. Выведем теперь оценку для нижнего предела. Согласно формулам (3.48), (3.49), (3.77), (3.97), (3.98), для достаточно больших $u>0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\} \geqslant \\ \geqslant \sum_{l\in\mathcal{L}^-\cap\mathcal{L}_0}\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in K_l(\Delta)} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\} - \Sigma_1^c - \Sigma_3^c - \Sigma_4^c. \quad (3.126)$$

Учитывая формулы (3.56), (3.80), (3.101), (3.111), (3.126), заключаем, что найдутся постоянные $C_i > 0$, $i = 1, 2$, такие что для достаточно больших $\lambda > 0$ выполнено неравенство

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_1)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{H_2(\sqrt{q}\,\lambda)}{\lambda}\right]^{n-1} H_1^{c/(2q)}(q\lambda) - \exp\{-C_1\lambda\} - \frac{C_2}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.127)$$

Взяв предел при $\lambda \to \infty$ от обеих частей неравенства (3.127) и используя формулы (2.10), (2.11), (2.14), получаем следующее соотношение, дополняющее (3.125):

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta 1}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \geqslant \frac{\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_1)}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{(c+2q)q^{(n-1)/2}}{c\pi^{(n-1)/2}}. \quad (3.128)$$

Из формул (3.125), (3.128), очевидно, вытекает соотношение (3.122). Лемма 15 доказана. □

3.8. Асимптотические оценки вероятностей $\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1\pm\varepsilon}(t,v) > u\Big\}$ из формулы (3.24), $j = 1, \ldots, N$

Для фиксированного числа j, $1 \leqslant j \leqslant N$, для достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ по аналогии с формулами (3.28), (3.29), (3.31) введём малые множества $\tilde V_j$ и положим для достаточно больших $u > 0$

$$\tilde T_{\delta j} := [1-\delta(u), 1] \times \tilde V_j(\varepsilon_1). \quad (3.129)$$

Для произвольного малого числа $\varepsilon > 0$ можно выбрать диаметр разбиения $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$ настолько малым, что наряду с уже указанными выше условиями (см., в частности, замечание 2), выполнялось бы также условие

$$1-\varepsilon \leqslant \frac{\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_j)}{\mathrm{mes}_{n-1}(V_j)} \leqslant 1+\varepsilon \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, N. \quad (3.130)$$

Аналогично формуле (3.122) с учётом (3.129) доказывается, что для $j = 1, \ldots, N$ выполнено следующее соотношение при $u \to \infty$:

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,\tilde v)\in\tilde T_{\delta j}} \xi_q(t,\tilde v)\,\sigma_c(t) > u\Big\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{u^{n-2}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{mes}_{n-1}(\tilde V_j) \frac{(c+2q)q^{(n-1)/2}}{c\pi^{(n-1)/2}} \big(1+o(1)\big). \quad (3.131)$$

Лемма 16. *Для фиксированного числа j, $1 \leqslant j \leqslant N$, и произвольного фиксированного малого $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения*

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1-\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \leqslant \frac{\operatorname{mes}_{n-1}(V_j)}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}(2+3\varepsilon)(1+4\varepsilon)^{(n-1)/2}, \tag{3.132}$$

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \geqslant \frac{\operatorname{mes}_{n-1}(V_j)}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(2-3\varepsilon)(1-4\varepsilon)^{(n-1)/2}. \tag{3.133}$$

Доказательство. Докажем соотношение (3.132) для фиксированного j, $1 \leqslant j \leqslant N$. Используя очевидные аналоги формул (3.30), (3.32), (3.42), (3.43), а также формулу (3.131) с $q = q_+ = 1/2 + 2\varepsilon$, $c = 1 - \varepsilon$, можно показать, что для произвольного фиксированного малого $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1-\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} &\leqslant \\ \leqslant \limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,\tilde v)\in \tilde T_{\delta j}} \xi_{q_+}(t,\tilde v)\,\sigma_{1-\varepsilon}(t) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} &= \\ = \frac{\operatorname{mes}_{n-1}(\tilde V_j)}{\sqrt{2}\,\pi^{n/2}} \frac{2+3\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{2}+2\varepsilon\right)^{(n-1)/2}&.\end{aligned} \tag{3.134}$$

Из формул (3.130) и (3.134) вытекает соотношение (3.132).

Докажем соотношение (3.133). Используя очевидные аналоги формул (3.30), (3.32), (3.42), (3.43), а также формулу (3.131) с $q = q_- = 1/2-2\varepsilon$, $c = 1+\varepsilon$, можно показать, что для произвольного фиксированного малого $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \geqslant \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,\tilde v)\in \tilde T_{\delta j}} \xi_{q_-}(t,\tilde v)\,\sigma_{1+\varepsilon}(t) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} &= \\ = \frac{\operatorname{mes}_{n-1}(\tilde V_j)}{\sqrt{2}\,\pi^{n/2}} \frac{2-3\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)^{(n-1)/2}&.\end{aligned} \tag{3.135}$$

Из формул (3.130) и (3.135) вытекает соотношение (3.133). Лемма 16 доказана. □

3.9. Асимптотически точная верхняя оценка вероятности $\mathrm{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}$

Напомним, что площадь поверхности единичной сферы $V \equiv V(n)$, заданной в (3.2), выражается формулой

$$\mathrm{mes}_{n-1}\big(V(n)\big) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{3.136}$$

Лемма 17. *Имеет место соотношение*

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \leqslant \frac{1}{2^{(n-4)/2}\,\Gamma(n/2)}. \tag{3.137}$$

Доказательство. Используя второе неравенство в (3.19) и определение верхнего и нижнего пределов (см. [13, п. 3.16, с. 66]), убеждаемся, что для любого малого $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \liminf_{u\to\infty} &\frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1-\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}} \leqslant \\ &\leqslant \limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1-\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \left[\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.138}$$

Учитывая формулы (3.23), (3.132), (3.136) и одно известное свойство верхнего предела (см. [13, гл. 3, упр. 5, с. 89]), получаем следующие соотношения для произвольного фиксированного малого $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1-\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} &\leqslant \sum_{j=1}^{N} \limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1-\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{2+3\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+4\varepsilon)^{(n-1)/2} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{mes}_{n-1}(V_j) = \\ &= \frac{2(2+3\varepsilon)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+4\varepsilon)^{(n-1)/2}, \end{aligned} \tag{3.139}$$

поскольку в силу (3.21)

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{mes}_{n-1}(V_j) = \mathrm{mes}_{n-1}(V).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ из формул (3.138), (3.139) вытекает соотношение (3.137). Лемма 17 доказана. □

3.10. Асимптотически точная нижняя оценка вероятности $\mathrm{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}$

В этом разделе мы докажем следующее утверждение, дополняющее лемму 17.

Лемма 18. *Имеет место соотношение*

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}u^{n-2}} \geqslant \frac{1}{2^{(n-4)/2}\,\Gamma(n/2)}. \tag{3.140}$$

Для доказательства леммы 18 нам понадобятся некоторые утверждения. Применяя с учётом (3.23) неравенство Бонферрони, получаем следующее неравенство для произвольного фиксированного малого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $u > 0$

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\} \geqslant \sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\} - \Sigma_\varepsilon(u), \tag{3.141}$$

где

$$\Sigma_\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta i}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u,\ \sup_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}. \tag{3.142}$$

Выведем асимптотические оценки для одномерной и двойной сумм в (3.141).

Лемма 19. *Для произвольного фиксированного малого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение*

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\,u^{n-2}} \geqslant \frac{2(2-3\varepsilon)}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(1-4\varepsilon)^{(n-1)/2}. \tag{3.143}$$

Доказательство. Учитывая формулы (3.133), (3.136) и одно известное свойство нижнего предела, получаем для произвольного фиксированного малого $\varepsilon > 0$ соотношения

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\,u^{n-2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{N} \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\,u^{n-2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2-3\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}}\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,(1-4\varepsilon)^{(n-1)/2}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{mes}_{n-1}(V_j) =$$
$$= \frac{2(2-3\varepsilon)}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,(1-4\varepsilon)^{(n-1)/2},$$

поскольку в силу (3.21)

$$\sum_{j=1}^{N}\mathrm{mes}_{n-1}(V_j) = \mathrm{mes}_{n-1}(V).$$

Получили соотношение (3.143). Лемма 19 доказана. □

Лемма 20. *Найдётся постоянная $c_1 = c_1(n) > 0$, такая что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение*

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{\Sigma_\varepsilon(u)}{\exp\{-u^2/2\}\,u^{n-2}} \leqslant c_1\,\varepsilon. \tag{3.144}$$

Доказательство. Представим двойную сумму (3.142) в виде

$$\Sigma_\varepsilon(u) = \Sigma_{\varepsilon,1}(u) + \Sigma_{\varepsilon,2}(u), \tag{3.145}$$

где суммирование в сумме $\Sigma_{\varepsilon,1}(u)$ ведётся по всем парам несоседних множеств $T_{\delta i}$, $T_{\delta j}$, а суммирование в сумме $\Sigma_{\varepsilon,2}(u)$ ведётся по всем парам соседних множеств $T_{\delta i}$, $T_{\delta j}$. Докажем соотношение (3.144), рассматривая отдельно суммы $\Sigma_{\varepsilon,1}(u)$ и $\Sigma_{\varepsilon,2}(u)$.

1. Пусть пара индексов (i,j), $i,j = 1,\ldots,N$, $i \neq j$, такова, что множества

$$T_{\delta i} = [1-\delta(u),1]\times V_i, \quad T_{\delta j} = [1-\delta(u),1]\times V_j$$

являются *несоседними*, т. е.

$$\rho(T_{\delta i},T_{\delta j}) > 0, \quad \rho(V_i,V_j) > 0; \tag{3.146}$$

здесь и ниже расстояние в евклидовых пространствах различной размерности мы обозначаем одной и той же буквой ρ (см. (3.74)). Докажем, что при условии (3.146) для произвольного малого числа $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta i}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u,\ \sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\,u^{n-2}} = 0. \tag{3.147}$$

Выведем асимптотическую оценку сверху для вероятности из формулы (3.147), используя теорему 4. Выберем достаточно большое $u_0 > 0$, такое что $\delta_0 := \delta(u_0) \ll 1$ (см. (3.11)), и положим

$$T_{\delta_0 i} = [1-\delta_0,1]\times V_i, \quad T_{\delta_0 j} = [1-\delta_0,1]\times V_j. \tag{3.148}$$

Для всех достаточно больших $u > u_0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta i}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u, \sup_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\Big\{\sup_{[(t,v),(s,y)]\in T_{\delta_0 i}\times T_{\delta_0 j}} [Z_{1+\varepsilon}(t,v) + Z_{1+\varepsilon}(s,y)] > 2u\Big\}. \quad (3.149)$$

Применим теорему 4 к гауссовскому полю

$$W_\varepsilon[(t,v),(s,y)] := Z_{1+\varepsilon}(t,v) + Z_{1+\varepsilon}(s,y), \quad (3.150)$$

заданному на компактном множестве $T_{\delta_0 i} \times T_{\delta_0 j}$ и имеющему нулевое среднее. По неравенству (3.146) найдётся малое число $0 < \kappa_0 = \kappa_0(\varepsilon) < 1$, такое что

$$\rho(V_i, V_j) > \kappa_0. \quad (3.151)$$

Используя формулы (3.6), (3.9), (3.18), (3.150), получаем следующие соотношения для $[(t,v),(s,y)] \in T_{\delta_0 i}\times T_{\delta_0 j}$:

$$\mathbf{D}W_\varepsilon[(t,v),(s,y)] = \frac{1}{\big[1+\big((1+\varepsilon)/2\big)(1-t)\big]^2} + \frac{1}{\big[1+\big((1+\varepsilon)/2\big)(1-s)\big]^2} + \\ + \frac{2\min(t,s)\langle v,y\rangle}{\sqrt{ts}\big[1+\big((1+\varepsilon)/2\big)(1-t)\big]\big[1+\big((1+\varepsilon)/2\big)(1-s)\big]} \leqslant \\ \leqslant 2 + \frac{2\min(t,s)\langle v,y\rangle}{\sqrt{ts}\big[1+\big((1+\varepsilon)/2\big)(1-t)\big]\big[1+\big((1+\varepsilon)/2\big)(1-s)\big]}. \quad (3.152)$$

Из (3.152) следует, что

$$\mathbf{D}W_\varepsilon[(t,v),(s,y)] \leqslant 2, \quad \text{если} \quad \langle v,y\rangle \leqslant 0. \quad (3.153)$$

Если $\langle v,y\rangle > 0$, то согласно (3.148), (3.151) справедливы оценки

$$0 < \langle v,y\rangle = 1 - \frac{1}{2}\,\|v-y\|^2 \leqslant 1 - \frac{1}{2}\,\kappa_0^2. \quad (3.154)$$

Так как коэффициент корреляции не превосходит единицы, то при $t,s \in [1-\delta_0, 1]$ выполнено неравенство

$$\frac{\min(t,s)}{\sqrt{ts}} \leqslant 1,$$

следовательно, согласно формулам (3.152), (3.154) справедливо неравенство

$$\mathbf{D}W_\varepsilon[(t,v),(s,y)] \leqslant 4 - \kappa_0^2, \quad \text{если} \quad \langle v,y\rangle > 0. \quad (3.155)$$

Поскольку $0 < \kappa_0 < 1$, то из формул (3.153), (3.155) вытекает следующее неравенство для всех $[(t,v),(s,y)] \in T_{\delta_0 i}\times T_{\delta_0 j}$:

$$\mathbf{D}W_\varepsilon[(t,v),(s,y)] \leqslant 4 - \kappa_0^2. \quad (3.156)$$

Выберем число $0 < \theta < 2\kappa_0^2$. Применяя теорему 4 с этим выбранным θ к гауссовскому полю $W_\varepsilon[(t,v),(s,y)]$, получаем с учётом (3.150), (3.156) неравенство для $u > u_0$

$$0 \leqslant \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{[(t,v),(s,y)]\in T_{\delta_0 i}\times T_{\delta_0 j}} [Z_{1+\varepsilon}(t,v) + Z_{1+\varepsilon}(s,y)] > 2u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}} \leqslant$$
$$\leqslant c_0\, \frac{\exp\{-4u^2/(2(4-\kappa_0^2)+\theta)\}}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}}. \quad (3.157)$$

Вследствие выбора числа $\theta < 2\kappa_0^2$ последнее выражение в формуле (3.157) стремится к нулю при $u \to \infty$. Согласно (3.149) отсюда вытекает справедливость соотношения (3.147) для несоседних множеств $T_{\delta i}$, $T_{\delta j}$. Из формулы (3.147) следует, что для произвольного малого числа $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Sigma_{\varepsilon,1}(u)}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}} = 0. \quad (3.158)$$

2. Рассмотрим теперь второй случай. Пусть пара индексов (i,j), $i,j = 1,\ldots,N$, $i \neq j$, такова, что множества $T_{\delta i} = [1-\delta(u),1]\times V_i$, $T_{\delta j} = [1-\delta(u),1]\times V_j$ являются *соседними*, т. е.

$$\rho(T_{\delta i}, T_{\delta j}) = 0, \quad \rho(V_i, V_j) = 0. \quad (3.159)$$

Для всех $u > 0$ и всех малых $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta i}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u,\ \sup_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta i}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\} + \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\} -$$
$$- \mathbf{P}\Big\{\sup_{(t,v)\in T_{\delta i}\cup T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}. \quad (3.160)$$

Для соседних множеств V_i, V_j малого диаметра ε_1 множество $V_i \cup V_j$ имеет малый диаметр, не превышающий числа $2\varepsilon_1$. Отсюда вытекает, что для множества

$$T_{\delta i} \cup T_{\delta j} = [1-\delta(u),1]\times V_i \cup V_j$$

можно вывести оценки, аналогичные уже полученным оценкам для множества $T_{\delta j}$. В частности, можно показать, что при условии (3.159), для фиксированной пары индексов (i,j), $i \neq j$, и произвольного малого $\varepsilon > 0$ справедлив аналог формулы (3.133), а именно выполнено соотношение

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta i}\cup T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}} \geqslant$$
$$\geqslant 2\, \frac{\mathrm{mes}_{n-1}(V_i) + \mathrm{mes}_{n-1}(V_j)}{(2\,\pi)^{n/2}}\, \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\, (1-3\varepsilon/2)\,(1-4\varepsilon)^{(n-1)/2}. \quad (3.161)$$

Используя формулы (3.132) (дважды), (3.160), (3.161), убеждаемся, что при условии (3.159) для фиксированной пары индексов (i,j), $i \neq j$, и произвольного малого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta i}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u,\ \sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\,u^{n-2}} \leqslant \\ \leqslant 2\,\frac{\mathrm{mes}_{n-1}(V_i) + \mathrm{mes}_{n-1}(V_j)}{(2\,\pi)^{n/2}}\,[\mu_1(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon)], \quad (3.162)$$

где

$$\mu_1(\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,(1+3\varepsilon/2)(1+4\varepsilon)^{(n-1)/2}, \quad \mu_2(\varepsilon) = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,(1-3\varepsilon/2)(1-4\varepsilon)^{(n-1)/2}. \quad (3.163)$$

Применяя разложение бинома Ньютона для последних сомножителей в (3.163), несложно показать, что для достаточно малых $\varepsilon \ll 1$ выполнены неравенства

$$0 < \mu_1(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon) \leqslant (4n+4)\,\varepsilon. \quad (3.164)$$

Из формул (3.162), (3.164) следует, что найдётся постоянная $c_2 = c_2(n) > 0$, такая что при условии (3.159) для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta i}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u,\ \sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\,u^{n-2}} \leqslant \\ \leqslant c_2\,\varepsilon\,\Big[\mathrm{mes}_{n-1}(V_i) + \mathrm{mes}_{n-1}(V_j)\Big]. \quad (3.165)$$

Для фиксированного множества $T_{\delta i}$ существует конечное число $c_3(n)$ (не зависящее от $\varepsilon > 0$) множеств $T_{\delta j}$, $j \neq i$, имеющих общие точки с $T_{\delta i}$. Учитывая этот факт, формулу (3.165) и равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{mes}_{n-1}(V_i) = \mathrm{mes}_{n-1}(V),$$

заключаем, что найдётся постоянная $c_4(n) > 0$, такая что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\Sigma_{\varepsilon,2}(u)}{\exp\{-u^2/2\}\,u^{n-2}} \leqslant c_4\,\varepsilon\ \mathrm{mes}_{n-1}(V). \quad (3.166)$$

Из формул (3.145), (3.158) и (3.166) вытекает соотношение (3.144). Лемма 20 доказана. □

Доказательство леммы 18 проводится по схеме доказательства леммы 17. Используя первое неравенство в (3.19) и определение верхнего и нижнего пределов, убеждаемся, что для любого малого $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения

$$1 \geqslant \limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}} \geqslant$$
$$\geqslant \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}} \left[\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}}\right]^{-1}. \tag{3.167}$$

Учитывая формулы (3.141), (3.143), (3.144) и известные свойства нижнего предела, получаем следующие соотношения для произвольного фиксированного малого $\varepsilon > 0$:

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}} \geqslant \liminf_{u\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_{\delta j}} Z_{1+\varepsilon}(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}} -$$
$$- \limsup_{u\to\infty} \frac{\Sigma_\varepsilon(u)}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}} \geqslant \frac{2(2-3\varepsilon)}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\, \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\, (1-4\varepsilon)^{(n-1)/2} - c_1\,\varepsilon. \tag{3.168}$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ из формул (3.167), (3.168) вытекает соотношение (3.140). Лемма 18 доказана. □

3.11. Доказательство соотношения (1.2) теоремы 1

В силу лемм 17, 18 справедливо соотношение

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{(t,v)\in T_\delta} Z(t,v) > u\Big\}}{\exp\{-u^2/2\}\, u^{n-2}} = \frac{1}{2^{(n-4)/2}\,\Gamma(n/2)}. \tag{3.169}$$

Из формул (3.3), (3.169) и леммы 6 вытекают следующие соотношения при $u \to \infty$:

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,1]} \|\mathbf{w}(t)\| > u\Big\} \equiv \mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=1}^{n} w_j^2(t) > u^2\Big\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{u^{n-2}}{2^{(n-4)/2}\,\Gamma(n/2)}\big(1+o(1)\big). \tag{3.170}$$

Таким образом, формула (1.2) доказана при $T = 1$. По известному свойству автомодельности винеровского процесса (см. [2, гл. 4, п. 2, с. 71]) для любых $T > 0$, $u > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{w}(t)\| > u\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,1]} \|\mathbf{w}(t)\| > \frac{u}{\sqrt{T}}\Big\}. \tag{3.171}$$

Из формул (3.170), (3.171) вытекает соотношение (1.2) для любого $T > 0$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится методом двойной суммы по схеме доказательства теоремы 1. Это доказательство довольно длинное, и по этой причине оно здесь не приводится.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

[1] Беляев Ю. К., Питербарг В. И. Асимптотика среднего числа А-точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень // Выбросы случайных полей / Под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972. — С. 62—89.

[2] Бородин А.Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. — СПб.: Лань, 2000.

[3] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. — М.: Наука, 1979.

[4] Икэда Н., Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986.

[5] Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981.

[6] Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. — М.: Мир, 1989.

[7] Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. — Киев: ТВиМС, 1995.

[8] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

[9] Никитин Я. Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. — М.: Наука; Физматлит, 1995.

[10] Новиков А. А. О малых уклонениях гауссовских процессов // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29, № 2. — С. 291—301.

[11] Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

[12] Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // УМН. — 1995. — Т. 50, № 6. — С. 57—150.

[13] Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1976.

[14] Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1966.

[15] Фаталов В. Р. Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей // Изв. АН Армении. Матем. — 1992. — Т. 27, № 6. — С. 59—81.

[16] Фаталов В. Р. Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей. Применения // Изв. АН Армении. Матем. — 1993. — Т. 28, № 5. — С. 32—55.

[17] Фаталов В. Р. Метод двойной суммы для гауссовских полей с параметрическим множеством в пространстве l^p // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 4. — С. 1117—1141.

[18] Фаталов В. Р. Большие уклонения для гауссовских процессов в гёльдеровской норме // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 67, № 5. — С. 207—224.

[19] Фаталов В. Р. Времена пребывания и точные асимптотики малых уклонений бесселевских процессов для L^p-функционалов, $p > 0$ // Изв. РАН. Сер. матем. — 2007. — Т. 71, № 4. — С. 73—105.

[20] Фаталов В. Р. Эргодические средние при большом значении T и точные асимптотики малых уклонений для многомерного винеровского процесса // Изв. РАН. Сер. матем. — 2013. — Т. 77, № 6. — С. 169—206.

[21] Abrahamson I. G. Exact Bahadur efficiencies for the Kolmogorov–Smirnov and Kuiper one- and two-sample statistics // Ann. Math. Statist. — 1967. — Vol. 38, no. 5. — P. 1475—1490.

[22] Kiefer J. K-sample analogues of the Kolmogorov–Smirnov and Cramér–v. Mises tests // Ann. Math. Statist. — 1959. — Vol. 30, no. 2. — P. 420—447.

[23] Landau H. J., Shepp L. A. On the supremum of a Gaussian process // Sankhy_a: The Indian J. Stat., Ser. A. Sankhyà. — 1971. — Vol. A32, no. 4. — P. 369—378.

[24] Marcus M. B., Shepp L. A. Continuity of Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 151 — P. 377—392.

[25] Piterbarg V. I. High deviations for multidimensional stationary Gaussian processes with independent coordinates // Stability Problems for Stochastic Models: Proc. of the Fifteenth Perm Seminar, Perm, Russia, June 2—6, 1992 / V. M. Zolotarev, V. M. Kruglov, V. Yu. Korolev, eds. — Utrecht: VSP, 1994. — P. 197—230.

[26] Piterbarg V. I. High excursions for nonstationary generalized chi-square processes // Stoch. Proc. Appl. — 1994. — Vol. 53, no. 2. — P. 307—337.

[27] Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. — Berlin: Springer, 1999.

[28] Simon B. Functional Integration and Quantum Physics. — New York: Academic Press, 1979.