Универсальная алгебраическая геометрия: между синтаксисом и семантикой

А. ГВАРАМИЯ
Абхазский государственный университет, Абхазия
e-mail: absu1@mail.ru

Б. ПЛОТКИН
Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль
e-mail: borisov@math.huji.ac.il

Е. ПЛОТКИН
Университет имени Бар-Илана, Израиль
e-mail: plotkin.evgeny@gmail.com

УДК 512.57+512.58+510.67

Ключевые слова: универсальная алгебраическая геометрия, алгебраическое множество, определимое множество, категория, синтаксис, семантика, квазигруппа, многообразие.

Аннотация

В этой статье мы даём общее представление об идеях, которые лежат в основе развития универсальной алгебраической геометрии и логической геометрии. Мы выделяем роль алгебраической логики как одного из основных инструментов всей теории. Проблема сходства геометрий алгебраических и определимых множеств для разных алгебр рассматривается как наглядный пример того, как алгебра, геометрия, теория моделей и алгебраическая логика работают вместе.

Abstract

A. Gvaramia, B. Plotkin, E. Plotkin, Universal algebraic geometry: syntax and semantics, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 2, pp. 75—88.

In this paper, we give a general insight into the ideas that make ground for the developing of universal algebraic geometry and logical geometry. We specify the role of algebraic logic as one of the major instruments of the whole theory. The problem of the sameness of geometries of algebraic and definable sets for different algebras is considered as ans illuminating example how algebra, geometry, model theory, and algebraic logic work together.

1. Неформальное введение Б. И. Плоткина

Вся история началась для меня в 80-х годах прошлого века. Некоторые обсуждения практического характера привели к проблеме построения алгебраической модели баз данных и баз знаний. Шаг за шагом исследование, связанное

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 2, с. 75—88.

с этой темой, породило книгу [9]. Позже, вероятно под влиянием идей и обсуждений с В. Ремесленниковым и И. Рипсом и их коллегами, я использовал эту книгу для разработки единого подхода к алгебраической геометрии и алгебраической логике.

Одной из причин перехода от баз знаний к универсальной геометрии и универсальной логике была для меня проблема Тарского, путь к решению к которой нашли В. Ремесленников и И. Рипс, а блестяще завершили решение независимо О. Харлампович с А. Мясниковым и Ц. Села. Проблема Тарского ставит вопрос о том, могут ли две свободные группы иметь разные теории первого порядка. Ответ оказался отрицательным. Из-за интереса к обобщению было введено понятие изотипности, позволяющее различать разные свободные группы. Оказалось, что изотипность свободных групп эквивалентна их изоморфизму. Было доказано, что изотипность алгебр эквивалентна их логической эквивалентности. Понятие изотипности потребовало дальнейшего анализа. Было важно изучить его в терминах тождеств, квазитождеств и бесконечных квазитождеств.

Позвольте мне сказать, что путь к универсальному подходу допускает как минимум две возможности. Прежде всего, можно перейти к «расширению» теории в сторону общих теоретико-модельных идей. С другой стороны, можно пожертвовать теоретико-модельной общностью исследования, получив вместо этого некую универсальную алгебраизацию классических геометрических идей. Оба подхода одинаково значимы.

Эта статья основывается на идеях второго подхода. Зафиксируем произвольное многообразие алгебр Θ и алгебру $H \in \Theta$. Свяжем с H два инварианта. Первым инвариантом является категория $\mathrm{AG}_\Theta(H)$ всех алгебраических множеств над данным H. Её объектами являются множества алгебраических множеств $\mathrm{AG}_\Theta(H)$, соответствующие заданному множеству X. Известно, что если алгебры H_1 и H_2 геометрически эквивалентны [10], то их геометрии совпадают, т. е. категории $\mathrm{AG}_\Theta(H_1)$ и $\mathrm{AG}_\Theta(H_2)$ изоморфны (см. [15] и приведенные там ссылки). Все алгебраические множества над A находятся во взаимно-однозначном соответствии с их X-координатными алгебрами. Каждая координатная алгебра принадлежит одному и тому же многообразию Θ. Таким образом, семантическое условие единообразия геометрий над H_1 и H_2 может быть поднято до синтаксического уровня изоморфизма категорий соответствующих координатных алгебр.

Вторым инвариантом H является категория $\mathrm{LG}_\Theta(H)$ всех определимых множеств над H. Её объектами являются решётки определимых множеств $\mathrm{LG}_\Theta^X(H)$, соответствующих заданному множеству X. Когда мы ищем совпадение геометрий определимых множеств, оказывается, что правильное условие является условием логической эквивалентности алгебр. Однако простейший перенос понятия координатной алгебры на определимые множества терпит неудачу. Настоящая работа посвящена изучению синтактико-семантических соответствий в универсальной алгебраической и логической геометриях.

Основные ссылки общего характера следующие: [3, 5—8].

2. О синтаксисе и семантике

Под *синтаксисом* мы будем понимать язык, предназначенный для описания некоторой предметной области. В синтаксисе мы задаём вопросы, высказываем гипотезы, формулируем результаты. В синтаксисе мы также строим цепочки формальных выводов.

Для наших целей мы используем языки первого порядка или их фрагменты. Каждый язык строится на базе некоторого конечного набора переменных, которые служат алфавитом, и ряда правил, которые позволяют строить слова исходя из данного алфавита. В общем случае в сигнатуру языка входят булевы операции, кванторы, константы, а также функциональные символы и предикатные символы. Последние входят в атомарные формулы и, собственно, определяют лицо конкретного языка. Атомарные формулы мы будем называть словами, а слова вместе с логическими операциями между ними — формулами.

Под *семантикой* мы понимаем мир моделей или, другими словами, предметную область нашего знания. Мир этот существует сам по себе и развивается по своим законам.

Многие математические (и не только математические) вопросы сводятся к описанию весьма общего соответствия

$$\begin{array}{ccc} \text{СИНТАКСИС} & \longrightarrow & \text{СИНТАКСИС} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{СЕМАНТИКА} & \longrightarrow & \text{СЕМАНТИКА} \end{array} .$$

Будем называть это соответствие *синтактико-семантическим квадратом*.

Цель универсальной алгебраической геометрии состоит в том, чтобы сделать переходы от синтаксиса к семантике как можно более алгебраическими и тесно связать возникающее при этом структуры алгебры, логики, геометрии и теории моделей.

3. Общий подход

В синтактико-семантическом квадрате верхний уровень отвечает синтаксису. Вершинам квадрата соответствуют синтаксические объекты, т. е. наборы формул языка первого порядка. Стрелки отвечают некоторым переходам от одного набора формул к другому. Этим переходом может быть логический вывод, или отображение наборов формул.

Нижний уровень — это уровень семантики. В вершинах должны стоять семантические объекты, например таблицы данных, наборы точек в аффинном или векторном пространствах, матрицы. Переходы между объектами реализуются специальными отображениями, учитывающими синтаксическую структуру верхнего этажа.

Следующие соответствия играют важную роль:

$$\text{СИНТАКСИС} \rightleftarrows \text{ЯЗЫК}, \quad \text{СЕМАНТИКА} \rightleftarrows \text{МОДЕЛЬ},$$
$$\text{СИНТАКСИС} \rightleftarrows \text{АЛГЕБРА}, \quad \text{СЕМАНТИКА} \rightleftarrows \text{ГЕОМЕТРИЯ}.$$

Основным условием в общем подходе универсальной алгебраической геометрии является наличие теоретико-множественного соответствия Галуа.

Соответствием Галуа называется всякая пара функций $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ и $\psi\colon \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ между частично-упорядоченными множествами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) если $a \leqslant a'$, то $\varphi(a) \geqslant \varphi(a')$,
2) если $b \leqslant b'$, то $\psi(b) \geqslant \psi(b')$,
3) $\psi\bigl(\varphi(a)\bigr) \geqslant a$,
4) $\varphi\bigl(\psi(b)\bigr) \geqslant b$.

Обозначим функции φ и ψ в соответствии Галуа одним символом $'$. Каждое соответствие Галуа приводит к Галуа-замкнутым объектам $a'' = a$. Каждый объект может быть замкнут до Галуа-замкнутого объекта. И, наконец, легко видеть, что при соответствии Галуа имеется взаимно-однозначное соответствие между замкнутыми объектами в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Сформулируем теперь основные условия, которые мы будем требовать при реализации синтактико-семантического перехода. Будем обозначать через $T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$ синтаксические объекты и через $A, B, C, \ldots$ семантические.

1. Множества объектов является частично-упорядоченным.
2. Между синтаксическими и семантическими объектами имеется соответствие Галуа.
3. Соответствие Галуа обладает функториальным свойством, в том смысле что диаграмма синтактико-семантического квадрата

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r] \arrow[d, "'"'] & T_2 \arrow[r] \arrow[d, "'"] & T_1 \arrow[d, "'"] \\ A_1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & A_1 \end{tikzcd}$$

коммутативна при подходящем выборе направления стрелок. Направление стрелок определяется в каждом конкретном случае по-разному.

4. Универсальная алгебраическая геометрия

4.1. Общий взгляд на универсальную алгебраическую геометрию

Прежде всего заметим, что предметной областью классической алгебраической геометрии являлись подмножества в n-мерном комплексном пространстве, задаваемые системами полиномиальных уравнений. Задача универсальной алгебраической геометрии состоит в том, чтобы уйти от этих классических объектов и распространить идеи классической алгебраической геометрии на произвольные многообразия алгебр. Под многообразием алгебр мы понимаем класс алгебраических структур, определяемых набором тождеств. Это могут быть полугруппы, моноиды, группы, алгебры Ли, базы данных, автоматы и т. д.

Фиксируя многообразие Θ, мы тем самым определяем предметную область, которая подлежит изучению. Фактически алгебры из Θ — это и есть семантика универсальной алгебраической геометрии. Многообразию Θ соответствует также особый синтаксис, который учитывает набор тождеств этого многообразия. Универсальная алгебраическая геометрия изучает синтаксические и семантические переходы, определяемые над заданным произвольным многообразием Θ. С этой точки зрения классическая алгебраическая геометрия есть геометрия для особого случая многообразия $\mathrm{Com}\text{-}K$ коммутативных ассоциативных алгебр с единицей над фиксированным полем.

Таким образом, одной из целей является изучение решений уравнений над заданной алгеброй H из заданного многообразия алгебр Θ. Такое изучение в случае уравнений над свободными группами привело к геометрии свободной группы и послужило основным инструментом для решения проблемы Тарского.

Однако в дальнейшем мы сосредоточим наше внимание на другой цели универсальной алгебраической геометрии, а именно на изучении *геометрических инвариантов алгебр* из Θ.

Отметим наконец, что мы различаем две части универсальной алгебраической геометрии. Первая из них — это *эквациональная геометрия*. Это значит, что алгебраические множества определяются системами уравнений в свободных алгебрах из Θ. Эквациональной геометрии посвящён этот раздел. Вторая часть — это *логическая геометрия*, ей будет посвящён следующий раздел.

4.2. Система понятий

В основе всех дальнейших рассуждений лежит многообразие алгебр Θ. Соответственно, все основные понятия классической алгебраической геометрии должны быть модернизированы для произвольного Θ.

С алгебраической точки зрения языком классической геометрии является полиномиальная алгебра $K[x_1, \ldots, x_n]$. Действительно, эта алгебра является свободной конечно порождённой алгеброй в многообразии коммутативных ассоциативных алгебр над полем K. Свободная алгебра является синтаксическим объектом любого многообразия. Поэтому роль $K[x_1, \ldots, x_n]$ в общем случае играет $W(X)$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — свободная в Θ алгебра со свободной системой образующих X. Уравнения пишутся в алгебре $W(X)$. При этом роль уравнений вида $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где f — полином, играют уравнения вида $w \equiv w'$, где $w, w' \in W(X)$.

Теперь надо определить место, где уравнения решаются. В классической алгебраической геометрии это были аффинные пространства над основным полем или каким-то его расширением. В общем случае в качестве аффинных

<table>
<tr><th>Классическая AG</th><th>Универсальная AG</th></tr>
<tr><td colspan="2">Многообразие</td></tr>
<tr><td>Com-K</td><td>Θ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свободная алгебра</td></tr>
<tr><td>$K[X]$, $|X| = n$</td><td>$W(X)$, $|X| = n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Элементы свободной алгебры</td></tr>
<tr><td>$f(x_1, \ldots, x_n) \in K[X]$</td><td>$w(x_1, \ldots, x_n) \in W(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнения</td></tr>
<tr><td>$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$</td><td>$w \equiv w'$</td></tr>
<tr><td>Основное поле</td><td>Алгебра в Θ</td></tr>
<tr><td>K</td><td>H</td></tr>
<tr><td colspan="2">Аффинное пространство</td></tr>
<tr><td>$K^n \cong \mathrm{Hom}(K[X], K)$</td><td>$H^n \cong \mathrm{Hom}(W(X), H)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Точки</td></tr>
<tr><td>$\mu = (a_1, \ldots, a_n)$
$\mu \in \mathrm{Hom}(K[X], K)$</td><td>$\mu = (a_1, \ldots, a_n)$
$\mu \in \mathrm{Hom}(W(X), H)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решения</td></tr>
<tr><td>$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$</td><td>$w(a_1, \ldots, a_n) = w'(a_1, \ldots, a_n)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">или</td></tr>
<tr><td>$\mu(f) = 0$</td><td>$\mu(w) = \mu(w')$</td></tr>
<tr><td>μ является решением $f \iff$
$\iff f \in \mathrm{Ker}(\mu)$</td><td>$\mu$ является решением $w_i \equiv w_j \iff$
$\iff (w_i, w_j) \in \mathrm{Ker}(\mu)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Соответствие Галуа</td></tr>
<tr><td>идеал T
$\Updownarrow$
алгебраическое множество A</td><td>конгруэнция T
$\Updownarrow$
алгебраическое множество A</td></tr>
<tr><td colspan="2">Галуа-замкнутые объекты</td></tr>
<tr><td>радикальный идеал $I(A)$
алгебраическое множество $V(A)$</td><td>замкнутая конгруэнция A'_H
алгебраическое множество T'_H</td></tr>
<tr><td colspan="2">Топология</td></tr>
<tr><td>топология Зариского</td><td>топология Зариского</td></tr>
<tr><td colspan="2">Координатная алгебра</td></tr>
<tr><td>координатное кольцо
$K[X]/I(A)$</td><td>координатная алгебра
$W(X)/A'_H$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Категория алгебраических множеств</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{AG}(K)$</td><td>$\mathrm{AG}_\Theta(H)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Морфизмы</td></tr>
<tr><td colspan="2">полиномиальные (регулярные) отображения</td></tr>
</table>

пространств берутся декартовы степени H^n, где H — некоторая алгебра из Θ. Важной особенностью является реализация этого пространства в виде системы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}\big(W(X), H\big)$. Возникающая при этом система понятий представлена в сравнительной таблице.

Дадим несколько комментариев к этой таблице. Так как точка μ аффинного пространства рассматривается как гомоморфизм из $\mathrm{Hom}\big(W(X), H\big)$, то у неё имеется ядро $\mathrm{Ker}(\mu)$. По определению ядра это в точности множество всех уравнений, для которых точка μ — решение. Так возникает соответствие Галуа между точками аффинного пространства и множествами уравнений, которое немедленно переносится на соответствие между подмножествами аффинного пространства и множествами уравнений.

К сожалению, у нас больше нет комфортабельной ситуации когда замкнутыми синтаксическими объектами являются радикальные идеалы. Однако их заменяют замкнутые конгруэнции. Описание замкнутых конгруэнций над конкретной алгеброй H и есть теорема Гильберта о нулях для данной $H \in \Theta$. При этом для произвольного многообразия верна теорема 1.

Теорема 1.

— *Категория H-замкнутых конгруэнций дуально изоморфна категории алгебраических множеств.*

— *Категория H-координатных алгебр дуально изоморфна категории алгебраических множеств.*

Эта теорема дуальности приводит к идее рассматривать эти категории как алгебро-геометрический (и синтактико-семантический, что будет ясно видно в следующем разделе) инвариант алгебр из многообразия Θ. Геометрический взгляд даёт следующее определение [11].

Определение 1. Алгебры H_1 и H_2 называются геометрически подобными, если соответствующие категории $\mathrm{AG}(H_1)$ и $\mathrm{AG}(H_2)$ алгебраических множеств изоморфны.

В силу соответствия Галуа алгебры геометрически подобны тогда и только тогда, когда изоморфны категории замкнутых конгруэнций и, соответственно, координатных алгебр. В частности, можно себе представить, что категории замкнутых конгруэнций тождественно изоморфны, т. е. просто совпадают как множества. Это приводит к ключевому понятию *геометрически эквивалентных алгебр*.

Определение 2 [11]. Алгебры H_1 и H_2 называются геометрически эквивалентными, если для любого набора уравнений T соответствующие H_1 и H_2 замкнутые конгруэнции совпадают.

Оказывается, что геометрическая эквивалентность допускает очень ясное синтактико-семантическое описание.

Теорема 2. *Две алгебры являются геометрически эквивалентными тогда и только тогда, когда у них совпадают инфинитарные квазитождества, или, что то же самое, они порождают одинаковые инфинитарные квазимногообразия.*

Отметим также, что классическая алгебраическая геометрия нётерова и по теореме Гильберта каждый радикальный идеал конечно порождён. Это неверно для произвольного многообразия алгебр, но верно для каких-то многообразий, в частности для групп.

В заключение этого краткого обзора основ универсальной алгебраической геометрии предложим ещё один взгляд на понятие геометрически подобных алгебр. Представим себе, что мы рассматриваем конкретную алгебру и хотим несколько деформировать её, сохраняя при этом геометрию получаемых алгебр неизменной. Вопрос состоит в том, сколько существует таких производных алгебр и как их все описать? Оказывается, что за такие деформации отвечает синтаксическая категория Θ^0 свободных в Θ алгебр. Если у этой категории не существует автоморфизмов, кроме внутренних, то никаких деформаций нет и вся свобода геометрии сводится к переименованию переменных. Если же имеются внешние автоморфизмы, то имеются и производные структуры на H, сохраняющие геометрию.

5. Логическая геометрия

5.1. Общий взгляд на логическую геометрию

Логическая геометрия появилась в статье Б. Плоткина «Алгебраическая геометрия в логике первого порядка» (2004). В ней универсальная алгебраическая геометрия распространяется до геометрии логики первого порядка в произвольном многообразии алгебр — логической геометрии. Это значит, что алгебраические множества определяются произвольными формулами первого порядка. В случае логической геометрии алгебраические множества называются определимыми (элементарными) множествами, а произвольные формулы первого порядка заменяют уравнения.

Другими словами, синтаксис и семантика логической геометрии совпадают с синтаксисом и семантикой логики первого порядка. Поэтому вся теория и все переходы тесно связаны с различными понятиями логики и теории моделей.

Отметим две особенности подхода к логической геометрии, играющие существенную роль во всей теории.

1. В качестве рабочего инструмента используется система понятий алгебраической логики. В принципе, всё можно перевести на обычный язык теории моделей. Однако применение алгебраической логики делает главные идеи более явными и согласованными. В частности, для алгебраизации синтаксиса применяется аппарат алгебр Халмоша. Алгебры Халмоша — это алгебры, которые соответствуют логике первого порядка таким же образом, как булевы алгебры соответствуют исчислению высказываний.
2. Многосортная теория. Есть много причин для рассмотрения именно многосортных синтаксических конструкций. Некоторые из них связаны с потенциальными приложениями алгебраической логики и логической геометрии в информатике, но некоторые имеют чисто алгебраический характер.

Наконец, основная особенность логической геометрии состоит в том, что она подразумевает наличие Галуа-перехода и, как следствие, реализацию синтактико-семантического квадрата для общего случая языка первого порядка. Это соответствие обобщает рассмотренные ранее алгебро-геометрические конструкции.

Как всегда, в основе всех дальнейших рассуждений лежит многообразие алгебр Θ. Соответственно, все основные понятия логической геометрии относятся к некоторому фиксированному Θ. Перечислим эти основные понятия логической геометрии.

— Θ, многообразие алгебр, к которому привязаны логика и геометрия.
— Θ^0, синтаксическая категория всех свободных алгебр $W(X)$. Алгебры $W(X)$ определяют синтаксис элементарных формул, это место, где живут уравнения $w = w'$. Морфизмы в Θ^0 — это гомоморфизмы свободных алгебр.
— $\Theta(H)$, семантическая категория аффинных пространств. Точки μ аффинных пространств — это гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(W(X), H)$.
— $\tilde{\Phi} = (\Phi(X),\ X \in \Gamma)$, синтаксическая многосортная алгебра формул. Представляет собой алгебру Халмоша, т. е. алгебраизацию языка первого порядка. Это алгебра с сигнатурой булевых операций, кванторов, с константами — атомарными формулами $M = (M_X,\ X \in \Gamma)$, где M_X — множество формул $w \equiv w'$, $w, w' \in W(X)$. Алгебры вида $\Phi(X)$ — это место, где живут формулы, где строятся логические выводы, где всё происходит по правилам заданного синтаксиса. Алгебру $\tilde{\Phi} = (\Phi(X),\ X \in \Gamma)$ можно трактовать как категорию Hal^0_Θ, категорию алгебр формул $\Phi(X)$, с морфизмами $s_*\colon \Phi(X) \to \Phi(Y)$.
— $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$, семантическая многосортная алгебра Халмоша вида $\mathrm{Hal}^X_\Theta(H)$. Алгебра $\mathrm{Hal}^X_\Theta(H)$ — это алгебра всех подмножеств пространства $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Операции алгебры Халмоша в ней реализованы как пересечение, объединение, дополнение и цилиндрические операции, соответствующие кванторам. Определяются также константы, соответствующие константам $M = (M_X,\ X \in \Gamma)$. Это место, где живут решения систем формул, т. е. наборы точек, удовлетворяющие формулам из $\Phi(X)$. $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ также трактуется как категория с особыми морфизмами $s_*\colon \Phi(X) \to \Phi(Y)$.
— Hal_Θ, многообразие многосортных алгебр Халмоша. Алгебры $\tilde{\Phi} = (\Phi(X), X \in \Gamma)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(H) = (\mathrm{Hal}^X_\Theta(H),\ X \in \Gamma)$ принадлежат этому многообразию.
— $\mathrm{Val}_H\colon \tilde{\Phi} \to \mathrm{Hal}_\Theta(H)$. Для каждого $X \in \Gamma$ строится гомоморфизм $\mathrm{Val}^X_H\colon \Phi(X) \to \mathrm{Hal}^X_\Theta(H)$. Гомоморфизм $\mathrm{Val}_X H$ вычисляет значения формул из $\Phi(X)$ в алгебрах $\mathrm{Hal}^X_\Theta(H)$.
— $\mathrm{LKer}(\mu)$ — логическое ядро точки μ, которое определяется благодаря наличию гомоморфизма $\mathrm{Val}^H_X = \mathrm{Val}_X(H)$. $\mathrm{LKer}(\mu)$ — это множество формул φ, таких что точка μ принадлежит множеству значений каждой $\varphi \in \mathrm{LKer}(\mu)$. В этом случае будем говорить, что точка μ *удовлетворяет* каждой $\varphi \in \mathrm{LKer}(\mu)$.

Универсальная AG	**Логическая геометрия**
Многообразие	
Θ	Θ
Синтаксическая алгебра	
$W(X)$, $\lvert X\rvert = n$	$\tilde{\Phi} = (\Phi(X),\ X \in \Gamma)$
Элементы синтаксической алгебры	
слова $w(x_1, \dots, x_n) \in W(X)$	формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Phi(X)$
Уравнения	
$w \equiv w'$	$\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Phi(X)$
Алгебра в Θ	Алгебра в Θ
H	H
Аффинное пространство	
$H^n \cong \mathrm{Hom}(W(X), H)$	$\mathrm{Hal}_X(H) = \mathrm{Bool}\big(\mathrm{Hom}(W(X), H)\big)$
Точки	
$\mu = (a_1, \dots, a_n)$	$\mu = (a_1, \dots, a_n)$
$\mu \in \mathrm{Hom}(W(X), H)$	$\mu \in \mathrm{Hom}(W(X), H)$
Решения	
μ является решением $w_i \equiv w_j \Leftrightarrow$	μ удовлетворяет формуле $\varphi \in \Phi(X) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (w_i \equiv w_j) \in \mathrm{Ker}(\mu)$	$\Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{LKer}(\mu)$
Соответствие Галуа	
конгруэнция T	фильтр T
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
алгебраическое множество A	определимое множество A
Галуа-замкнутые объекты	
замкнутая конгруэнция A'_H	замкнутый фильтр A^L_H
алгебраическое множество T'_H	определимое множество T^L_H
Топология	
топология Зариского	топология Зариского
Координатная алгебра	
координатная алгебра $W(X)/A'_H$	координатная алгебра $\Phi(X)/A^L_H$
Категория алгебраических/определимых множеств	
$\mathrm{AG}_\Theta(H)$	$\mathrm{LG}_\Theta(H)$
Морфизмы	
полиномиальные (регулярные) отображения	

Определение 3. Подмножество A в $\mathrm{Hom}_\Theta(W(X), H)$ называется определимым, если существует множество T в $\Phi(X)$, такое что A — множество точек μ, удовлетворяющих каждой формуле φ из T.

Теперь мы можем определить соответствие Галуа и завершить построение синтактико-семантического квадрата в логической геометрии.

— L-Галуа соответствие между наборами формул T в $\Phi(X)$ и наборами точек A в $\mathrm{Hom}_\Theta(W(X), H)$ в терминах LKer и Val_H^X.

Имеем

$$T_H^L = A = \{\mu \in \mathrm{Hom}(W(X), H) \mid T \subset \mathrm{LKer}(\mu)\} = \bigcap_{u \in T} \mathrm{Val}_H^X(u),$$

$$A_H^L = T = \bigcap_{\mu \in A} \mathrm{LKer}(\mu) = \{u \in \Phi(X) \mid A \subset \mathrm{Val}_H^X(u)\}.$$

Замкнутыми объектами в L-соответствии Галуа являются определимые множества и замкнутые фильтры. В результате возникает необходимый переход между синтаксисом и семантикой. Он же даёт соответствие между алгеброй и геометрией, между логикой и моделями. Он задаётся коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\Phi_\Theta(Y) \arrow[r, "s_*"] \arrow[d, "\mathrm{Val}_H^Y"'] & \Phi_\Theta(X) \arrow[d, "\mathrm{Val}_H^X"] \\
\mathrm{Hal}_\Theta^Y(H) \arrow[r, "s_*^H"] & \mathrm{Hal}_\Theta^X(H)
\end{tikzcd}.$$

5.2. Изотипность и логическая эквивалентность

Ключевым понятием теории моделей является понятие типа (в частности, типа точки). Тип точки — это множество всех формул, выполнимых в заданной точке. В геометрической терминологии это в точности её логическое ядро. Пересечение всех ядер даёт набор формул, которые выполняются в любой точке аффинного пространства над фиксированной алгеброй, т. е. её элементарную теорию.

Имея синтактико-семантическое соответствие Галуа и всю систему понятий, мы можем теперь рассуждать на уровне семантики, т. е. геометрически. Тогда соответствующие синтаксические понятия возникают автоматически, естественным образом. Отметим, что в этом кроется философский смысл любого Галуа-соответствия.

Напомним исходный вопрос универсальной алгебраической геометрии. Пусть даны две алгебры: H_1 и H_2. Когда алгебраические геометрии, связанные с этими алгебрами, совпадают? Более точно: когда категория алгебраических множеств над H_1 эквивалентна категории алгебраических множеств над H_2?

Этот вопрос чисто геометрический, он естественно возникает из-за желания понять геометрические характеристики алгебр: совпадают ли возможности решения систем уравнений для двух выбранных алгебр. Поднимая его на алгебраический (синтаксический) уровень, приходим к понятию геометрически эквивалентных алгебр и к ответу: две алгебры геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают одно инфинитарное квазимногообразие.

Зададим точно такой же вопрос как выше: когда геометрии определимых множеств над H_1 и H_2 совпадают? Иначе говоря, когда категория определимых множеств над H_1 изоморфна категории определимых множеств над H_2?

Так как имеется соответствие Галуа, то снова поднимаем этот вопрос на уровень синтаксиса. И немедленно приходим к понятию изотипных алгебр и вопросу изотипности. Дадим формальные определения.

Определение 4. Две алгебры H_1 и H_2 называются изотипными, если для любого X и для любой точки $\mu\colon W(X) \to H$ существует точка $\nu\colon W(X) \to H$, такая что типы μ и ν совпадают, и для любой точки $\nu\colon W(X) \to H$ существует точка $\mu\colon W(X) \to H$, такая что их типы совпадают.

Определение 5. Две алгебры H_1 и H_2 называются логически эквивалентными, если для любого X и для любого набора формул T в $\Phi(X)$ их H_1 и H_2 замыкания Галуа совпадают:

$$T^{LL}_{H_1} = T^{LL}_{H_2}.$$

Теорема 3 [16]. *Алгебры H_1 and H_2 логически эквивалентны тогда и только тогда, когда они изотипны.*

Определение 6. Две алгебры H_1 и H_2 называются логически подобными, если категории определимых множеств LG_{H_1} и LG_{H_2} изоморфны.

Изотипность влечёт логическое подобие, обратное же выполнено не всегда. Важно, что и геометрическая эквивалентность, и изотипность возникли одинаково геометрически. Понятие же элементарной эквивалентности стоит между ними практически посередине: изотипность влечёт элементарную эквивалентность, элементарная эквивалентность влечёт геометрическую эквивалентность (в случае нётеровости по уравнениям). Поскольку вся конструкция проходит для произвольных универсальных алгебр, то сразу возникают задачи для конкретных многообразий. Вот они-то и требуют решения.

Кроме того, на языке соответствия Галуа геометрическое звучание приобретают другие понятия теории моделей: однородность, насыщенность, категоричность, свойства Рыль-Нарджевского и так далее.

5.3. Будущая работа

Универсальная алгебраическая геометрия активно развивается. Недавно вышла в свет монография Э. Даннияровой, А. Мясникова, В. Ремесленникова [1], посвящённая той же теме, рассматриваемой под несколько другим углом зрения. Синтаксис и семантика глубоко изучаются в [2]. Из насущных открытых проблем отметим следующие:

— построение и описание координатных алгебр в случае логической геометрии,
— определение рациональных морфизмов алгебраических множеств,
— изучение проблемы размерности в случае логической геометрии.

В заключение следует сказать, что ещё одной важной задачей является исследование объектов универсальной логической геометрии для разных интересных конкретных многообразий алгебр и определение точного вида синтактико-семантических переходов для этих категорий. Среди таких многообразий укажем многообразие почти колец, связанное с тропической геометрией, многообразие алгебр Ли, многообразие квазигрупп.

Остановимся чуть подробнее на универсальной геометрии над квазигруппами. Этот вопрос особенно интересен тем, что квазигруппы имеют свои собственные хорошо известные геометрические приложения. Предлагаемая структура исследования состоит в следующем.

— Изотопные и изоморфные квазигруппы. Основы алгебраической и логической геометрии квазигрупп.
— Геометрическая эквивалентность квазигрупп.
— Автоморфизмы категории свободных квазигрупп.
— Доказать, что все автоморфизмы категории свободных квазигрупп внутренние.
— Доказать, что категории алгебраических множеств над двумя квазигруппами изоморфны тогда и только тогда, когда они геометрически эквивалентны.
— Геометрическая нётеровость для квазигрупп.
— Когда две квазигруппы порождают одно и то же квазимногообразие?
— Изотипность и логическое подобие для квазигрупп.
— Верно ли, что две конечно порождённые квазигруппы изотипны тогда и только тогда, когда они изотопны.
— Верно ли, что две квазигруппы логически подобны тогда и только тогда, когда они изотипны.

Литература

[1] Даниярова Э., Мясников А., Ремесленников В. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
[2] Aladova E. Syntax versus semantics in knowledge bases. I // Int. J. Algebra Comput. — 2018. — Vol. 28, no. 8. — P. 1385—1404.
[3] Chang C. C., Keisler H. J. Model Theory. — North-Holland, 1973.

[4] Gvaramia A. Halmos algebras and axiomatizable classes of quasigroups // Usp. Mat. Nauk. — 1985. — Vol. 40, no. 4. — P. 215—216.

[5] Halmos P. R. Algebraic Logic. — New York, 1969.

[6] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. — Berlin: Springer, 1971. — (Grad. Texts Math.; Vol. 5).

[7] Malcev A. I. Algebraic Systems. — Berlin: Springer, 1973,

[8] Marker D. Model Theory: An Introduction. — Berlin: Springer, 2002.

[9] Plotkin B. Universal Algebra, Algebraic Logic and Databases. — Kluwer Academic, 1994.

[10] Plotkin B. Seven Lectures on the Universal Algebraic Geometry: Preprint. — 2002. — arXiv:math/0204245[math.GM].

[11] Plotkin B. Algebras with the same algebraic geometry // Proc. Steklov Inst. Math. — 2003. — Vol. 242. — P. 176—207.

[12] Plotkin B. Algebraic geometry in first order logic // J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 137, no. 5. — P. 5049—5097.

[13] Plotkin B. I. Isotyped algebras // Proc. Steklov Inst. Math. — 2012. — Vol. 287. — P. 91—115.

[14] Plotkin B., Aladova E., Plotkin E. Algebraic logic and logically-geometric types in varieties of algebras // J. Algebra Its Appl. — 2013. — Vol. 12, no. 2. — 1250146.

[15] Plotkin B., Plotkin E. Multi-sorted logic and logical geometry: some problems // Demonstratio Math. — 2015. — Vol. 48, no. 4. — P. 577—618.

[16] Zhitomirski G. On types of points and algebras // Int. J. Algebra Comput. — 2018. — Vol. 28, no. 8. — P. 1717—1730.