Слабо разрешимый радикал и локально сильно алгебраические дифференцирования локально обобщённо специальных алгебр Ли*

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: artgolub@hotmail.com

УДК 512.554.36

Ключевые слова: слабо разрешимый радикал, локально обобщённо специальные алгебры Ли, локально сильно алгебраические дифференцирования.

Аннотация

В работе классическая теорема об образе разрешимого радикала конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики при действии её дифференцирования обобщается на локально обобщённо специальные алгебры Ли.

Abstract

A. Yu. Golubkov, The weakly solvable radical and locally strongly algebraic derivations of locally generalized special Lie algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 2, pp. 89—99.

In this paper, the classical theorem on the image of the solvable radical of a finite-dimensional Lie algebra over a field of characteristic zero under the action of its derivation is generalized to locally generalized special Lie algebras.

1. Введение

Образ наибольшего разрешимого идеала конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики при действии любого её дифференцирования входит в её наибольший нильпотентный идеал (см. [6, теорема 7, с. 97]). Работа посвящена обобщению этой теоремы на локально обобщённо специальные алгебры Ли и их локально сильно алгебраические дифференцирования с заменой наибольших нильпотентного и разрешимого идеалов на наибольший локально нильпотентный идеал и слабо разрешимый радикал соответственно.

Всюду далее F — произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, которое в ряде случаев является также алгеброй над полем нулевой

*Исследование выполнено за счёт гранта МЦФПМ в МГУ им. М. В. Ломоносова «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

характеристики. Под классом алгебр понимается класс алгебр над одним кольцом, содержащий нулевую алгебру и изоморфные копии всех своих алгебр. Для любых алгебры R над кольцом F и её подмножества A подалгебру, идеал и F-подмодуль R, порождённые элементами A, мы будем обозначать через $\langle A\rangle$, $(A)_R$ и FA. Алгебры умножений и дифференцирований алгебры R будут обозначаться через $M(R)$ и $\mathrm{Der}(R)$. Напомним, что алгебра $M(R)$ — подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(R)$ F-модуля R, порождённая операторами левого и правого умножения l_x и r_x на элементы $x\in R$, $l_x\colon y\mapsto xy$ и $r_x\colon y\mapsto yx$, $y\in R$, а алгебра $\mathrm{Der}(R)$ — подалгебра алгебры Ли $\mathrm{End}_F(R)^{(-)}$, которую составляют дифференцирования алгебры R. Алгебра Ли $\mathrm{End}_F(R)^{(-)}$ получена из алгебры $\mathrm{End}_F(R)$ путём замены её операции умножения на кольцевой коммутатор $[\ ,\ ]$, $[\phi,\psi]=\phi\psi-\psi\phi$, $\phi,\psi\in\mathrm{End}_F(R)$ (так же определяется алгебра Ли любой ассоциативной алгебры).

Первичный радикал и суммы всех нильпотентных и разрешимых идеалов алгебры R мы будем обозначать через $\mathrm{Rad}(R)$, $N(R)$ и $S(R)$. Мы также ограничимся описанием $\mathrm{Rad}(R)$ как наименьшего из идеалов алгебры R, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых идеалов с нулевыми квадратами (см. [9, предложение 4 и теорема 6, с. 192, 193]).

Операцию умножения любой алгебры Ли L мы будем обозначать через $[\ ,\ ]$, оператор левого умножения l_x на элемент $x\in L$ — через ad_x, *присоединённую ассоциативную алгебру* (алгебру умножений) L — через $\mathrm{Ad}(L)$, *присоединённую алгебру Ли* (алгебру Ли внутренних дифференцирований) L — через $\mathrm{ad}(L)$, $\mathrm{ad}(L)=\{\mathrm{ad}_x\mid x\in L\}$, наибольший локально нильпотентный идеал L — через $\mathrm{LN}(L)$, центр L по её идеалу I — через $C(L,I)$, $C(L,I)=\{x\in L\mid [x,L]\subseteq I\}$, и, в частности, её центр $C(L,\{0\})$ — через $C(L)$. В ряде источников идеал $\mathrm{LN}(L)$ называется также локально нильпотентным радикалом алгебры L. Мы полагаем правильным использование термина радикал по отношению к отображению, ставящему в соответствие алгебрам из замкнутого относительно взятия идеалов и гомоморфных образов класса их наибольшие локально нильпотентные идеалы, только в ситуации, когда оно является радикалом в смысле Куроша—Амицура. В алгебрах Ли одним из таких классов является, например, класс ниль-алгебр (слабо энгелевых алгебр) Ли (см. [3, 8, 13]). Алгебры над кольцом F, конечно порождённые как F-модули, мы будем называть конечными над F.

Свободные неассоциативную и ассоциативную алгебры над кольцом F со счётным множеством свободных порождающих $X=\{x_i\}_{i\geqslant 1}$ мы будем обозначать через $F\langle X\rangle$ и $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$. Элементы алгебры $F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, коэффициенты несократимых записей которых порождают кольцо F как идеал, и определяемые ими тождества ассоциативных алгебр над F называются *собственными*. Ассоциативная алгебра над кольцом F, на которой выполняется по меньшей мере одно собственное тождество, называется *PI-алгеброй*. Алгебра Ли над кольцом F называется *специальной*, если она вложима в алгебру Ли ассоциативной PI-алгебры над F, и *обобщённо специальной*, если её присоединённая ассоциативная алгебра является PI-алгеброй. Из специальности алгебры Ли следует её обобщённая специальность. Вместе с тем конечные алгебры Ли обобщённо специальны, но, вообще говоря, не являются специальными (см. [1, с. 252—254; 7, с. 326; 17, предложение 1.3.1, с. 14]).

Следуя [12], выделим в алгебре $F\langle X\rangle$ *систему многочленов разрешимости* $\{g_i\}_{i\geqslant 0}$, в которой $g_0(x_1)=x_1$ и

$$g_{i+1}(x_1,\ldots,x_{2^{i+1}})=g_i(x_1,\ldots,x_{2^i})g_i(x_{2^i+1},\ldots,x_{2^{i+1}})\quad (i\geqslant 0).$$

Алгебра R над кольцом F называется *слабо разрешимой*, если для каждого её конечного подмножества A можно подобрать такое $k=k(A)\geqslant 0$, что $g_k(a_1,\ldots,a_{2^k})=0$ для любых $a_i\in A$. Слабо разрешимые алгебры над кольцом F формируют радикальный подкласс $\mathfrak{W}$ класса всех алгебр над F, в который входят все локально разрешимые алгебры над F и алгебры над F, содержащие нормальные ряды подалгебр с факторами из $\mathfrak{W}$ (см. [4, теоремы 2.8, 3.8; 12]). Радикал в смысле Куроша—Амицура T на классе всех алгебр над кольцом F, ставящий в соответствие алгебрам над F их наибольшие слабо разрешимые идеалы, называется *слабо разрешимым радикалом*.

Радикал в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{M}$ называется *наследственным*, если класс $\mathcal{T}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}=\{R\in\mathfrak{M}\mid \mathcal{T}(R)=R\}$ замкнут относительно взятия идеалов, и *идеально наследственным*, если помимо класса $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$ замкнутым относительно взятия идеалов является класс $\mathcal{T}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}}=\bigl\{R\in\mathfrak{M}\mid \mathcal{T}(R)=\{0\}\bigr\}$. Идеальная наследственность радикала $\mathcal{T}$ равносильна выполнению для любых алгебры $R\in\mathfrak{M}$ и её идеала I равенства $\mathcal{T}(I)=I\cap\mathcal{T}(R)$. Для наследственного радикала $\mathcal{T}$ это означает только то, что $\mathcal{T}$-радикалы идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$ являются их идеалами.

Идеал I алгебры Ли L над кольцом F, инвариантный относительно действия всех её дифференцирований, называется *характеристическим*. Другими словами, это идеал L, который является идеалом её расщепляемого расширения $FD\leftthreetimes L$ при помощи абелевой алгебры Ли FD, порождённой любым её дифференцированием D. Напомним также, что алгебра Ли $FD\leftthreetimes L$ является прямой суммой F-модулей FD и L с операцией умножения

$$[(f_1D,x_1),(f_2D,x_2)]=(0,f_1D(x_2)-f_2D(x_1)+[x_1,x_2])\quad (f_i\in F,\ x_i\in L).$$

Вложение $\iota\colon x\mapsto(0,x)$, $x\in L$, позволяет отождествить алгебру Ли L с идеалом $\iota(L)$ алгебры Ли $FD\leftthreetimes L$, $FD\leftthreetimes L/\iota(L)\cong FD$.

Замечание 1.1. Пусть $\mathcal{T}$ — наследственный радикал на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр Ли $\mathfrak{M}$ над кольцом F. В случае если $\mathcal{T}$-радикалы алгебр из класса $\mathfrak{M}$ являются их характеристическими идеалами, радикал $\mathcal{T}$ является идеально наследственным. Эти условия равносильны, если класс $\mathfrak{M}$ содержит вместе с каждой алгеброй L все её расширения $FD\leftthreetimes L$, $D\in\mathrm{Der}(L)$.

Обстоятельное рассмотрение вопроса идеальной наследственности наследственных радикалов проведено в [11].

Приведём также одно полезное соображение из [12]. Пусть R — алгебра над алгеброй F над полем нулевой характеристики, I — идеал R и $r_1, \dots, r_k$ — элементы I, такие что $f(r_1, \dots, r_k) = 0$ для некоторого однородного элемента $f(x_1, \dots, x_k) \in F\langle X\rangle$, $k \geqslant 1$, $\deg f = n \geqslant 1$. Тогда $f\big(D(r_1), \dots, D(r_k)\big) \in I$ для каждого дифференцирования D алгебры R, поскольку по формуле Ньютона—Лейбница

$$0 = 1/n!\, D^n\big(f(r_1, \dots, r_n)\big) = f\big(D(r_1), \dots, D(r_n)\big) + \\ + g\big(r_1, D(r_1), \dots, D^n(r_1), \dots, r_k, D(r_k), \dots, D^n(r_k)\big),$$

где элемент $g\big(r_1, D(r_1), \dots, D^n(r_1), \dots, r_k, D(r_k), \dots, D^n(r_k)\big) \in I$ равен нулю при $n = 1$ и F-линейной комбинации произведений элементов $\{D^i(r_j)\}$, в каждое из которых входит как минимум один из элементов $\{r_j\}$, при $n > 1$. Поэтому в силу замкнутости классов разрешимых и слабо разрешимых алгебр относительно взятия расширений для любых разрешимого (слабо разрешимого) идеала I и дифференцирования D алгебры R идеал $I + D(I)$ является разрешимым (слабо разрешимым). Отсюда следует, что идеал $S(R)$ и слабо разрешимый радикал $T(R)$ алгебры R инвариантны относительно действия всех её дифференцирований. Используя трансфинитную индукцию, можно показать также, что это верно для наименьшего из идеалов алгебры R, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых разрешимых идеалов.

Прямыми следствиями этих наблюдений являются идеальная наследственность слабо разрешимого радикала T на классах алгебр Ли над полями нулевой характеристики и сделанное С. А. Пихтильковым замечание о характеристичности первичных радикалов таких алгебр. При этом условие на характеристику поля является существенным (см., например, [6, с. 88]).

Алгебры Ли, наибольшие локально нильпотентный идеалы которых не являются характеристическими, существуют над любым основным кольцом (см. [12]). Известны также примеры классов алгебр Ли над алгебрами над полями нулевой характеристики и свойств дифференцирований, таких что наибольшие локально нильпотентные идеалы алгебр из этих классов инвариантны относительно действия всех дифференцирований с соответствующими свойствами (см. [14]).

2. Основные результаты

Для любых алгебры R над кольцом F, её дифференцирования D и идеала I, $D(I) \subseteq I$, обозначим через $A(R, D)$ подалгебру алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(R)$ F-модуля R, порождённую D и элементами алгебры умножений $M(R)$ алгебры R, через $A(R, D)'$ — подалгебру $\mathrm{End}_F(R)$, полученную добавлением тождественного эндоморфизма Id_R к $A(R, D)$ (при необходимости), и через $A(I, R, D)$ — идеал $A(R, D)' = A(R, D) + F\,\mathrm{Id}_R$ (и $A(R, D)$), который порождают операторы левого и правого умножения на элементы I. При $D = 0$

положим также $A(I,R,0) = A(I,R)$. Используя индукцию по k и равенство $[D,t_x] = t_{D(x)}$, $x \in R$, $t_x \in \{l_x, r_x\}$, несложно показать, что

$$D^k A(I,R) \subseteq \sum_{i=0}^{k} A(I,R)D^i, \quad A(I,R)D^k \subseteq \sum_{i=0}^{k} D^i A(I,R) \quad (k \geqslant 0),$$
$$A(I,R,D) = \sum_{i\geqslant 0} D^i A(I,R) = \sum_{i\geqslant 0} A(I,R)D^i,$$
$$A(R,D)' = \sum_{i\geqslant 0} D^i M(R)' = \sum_{i\geqslant 0} M(R)'D^i.$$

Поскольку $\psi(R) \subseteq I^k$, $k \geqslant 1$, $\psi \in A(I,R)^k$, отсюда также следует замечание 2.1.

Замечание 2.1. Если идеал I алгебры R нильпотентен, то идеалы $A(I,R,D)$ и $A(I,R)$ алгебр $A(R,D)'$ и $M(R)'$ нильпотентны и имеют индексы нильпотентности не выше индекса нильпотентности I, где $D \in \mathrm{Der}(R)$, $D(I) \subseteq I$.

Следствие 2.2. *Для любой алгебры Ли L над кольцом F*

$$N\bigl(\mathrm{ad}(L)\bigr) \subseteq \mathrm{ad}(L) \cap \mathrm{Rad}\bigl(\mathrm{Ad}(L)\bigr)^{(-)} \subseteq \mathrm{Rad}\bigl(\mathrm{ad}(L)\bigr).$$

Как следствие, первичный радикал $\mathrm{Rad}(L)$ алгебры L является наименьшим из её идеалов I, таких что $\mathrm{ad}(L/I) \cap \mathrm{Rad}\bigl(\mathrm{Ad}(L/I)\bigr) = \{0\}$.

Доказательство. Указанные включения следуют из замечания 2.1 и поэлементного описания первичного радикала (см. [9, предложение 4, теорема 6, с. 192, 193]). Они гарантируют равносильность для идеала I алгебры Ли L условий $\mathrm{Rad}\bigl(\mathrm{ad}(L/I)\bigr) = \{0\}$ и $\mathrm{ad}(L/I) \cap \mathrm{Rad}\bigl(\mathrm{Ad}(L/I)\bigr) = \{0\}$. Первичный радикал $\mathrm{Rad}(L)$ алгебры L входит во все её идеалы с данным свойством и при этом сам является одним из таких идеалов, так как $\mathrm{Rad}\bigl(L/\mathrm{Rad}(L)\bigr) = \{0\}$ и $L/\mathrm{Rad}(L) \cong \mathrm{ad}\bigl(L/\mathrm{Rad}(L)\bigr)$. $\square$

В дальнейшем мы будем существенным образом использовать совпадение идеала $R(L)$ алгебры Ли L,

$$R(L) \in \bigl\{N(L),\, S(L),\, \mathrm{Rad}(L),\, \mathrm{LN}(L),\, C\bigl(L, \mathrm{LN}(L)\bigr), T(L)\bigr\},$$

с таким же её идеалом как кольца (см. [5, замечание 1.1]), а также то, что $\mathrm{ad}\bigl(R(L)\bigr) = R\bigl(\mathrm{ad}(L)\bigr)$ и $\mathrm{ad}^{-1}\bigl(R\bigl(\mathrm{ad}(L)\bigr)\bigr) = R(L)$, где ad — естественный эпиморфизм L на её присоединённую алгебру Ли $\mathrm{ad}(L)$, $\mathrm{ad}\colon x \mapsto \mathrm{ad}_x$, $x \in L$, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = C(L)$. В первую очередь это касается двух следствий из теоремы Бейдара—Пихтилькова о совпадении первичного, локально разрешимого и слабо разрешимого радикалов обобщённо специальных алгебр Ли (см. [2]) и теоремы 1.18 из [16].

Следствие 2.3. *Слабо разрешимый радикал $T(L)$ локально обобщённо специальной алгебры Ли L над кольцом F является её наибольшим локально разрешимым идеалом и, в случае если F является алгеброй над полем нулевой характеристики, равен её центру по наибольшему локально нильпотентному идеалу $\mathrm{LN}(L)$, $T(L) = C\bigl(L, \mathrm{LN}(L)\bigr)$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы Бейдара—Пихтилькова. Обоснование равенства $T(L) = C\big(L, \mathrm{LN}(L)\big)$ в случае алгебры Ли L над алгеброй F над полем нулевой характеристики сводится к проверке нильпотентности её подалгебры M, порождённой любым конечным набором элементов $\{[x_i, y_i]\}$, $x_i \in L$, $y_i \in T(L)$. Для этого достаточно выделить подалгебру K, которую порождают все элементы x_i и y_i, и вывести из теоремы 1.18 работы [16] и теоремы Бейдара—Пихтилькова, что

$$T\big(\mathrm{ad}(K)\big) = C\Big(\mathrm{ad}(K), \mathrm{Rad}\big(\mathrm{Ad}(K)\big)\Big) = C\Big(\mathrm{ad}(K), \mathrm{LN}\big(\mathrm{ad}(K)\big)\Big),$$
$$T(K) = C\big(K, \mathrm{LN}(K)\big)$$

и, как следствие, $M \subseteq [K, K \cap T(L)] \subseteq [K, T(K)] \subseteq \mathrm{LN}(K)$. □

Следствие 2.4. *Конечно порождённая обобщённо специальная алгебра Ли L над нётеровым кольцом F содержит наибольший разрешимый идеал $S(L) = T(L)$ и наибольший нильпотентный идеал $N(L)$, причём $S(L) = C\big(L, N(L)\big)$, если F — алгебра над полем нулевой характеристики.*

Доказательство. Поскольку согласно теореме Брауна первичный радикал $\mathrm{Rad}\big(\mathrm{Ad}(L)\big)$ ассоциативной алгебры $\mathrm{Ad}(L)$ нильпотентен, алгебра Ли $\mathrm{ad}(L)$ содержит наибольший нильпотентный идеал $N\big(\mathrm{ad}(L)\big) = \mathrm{ad}(L) \cap \mathrm{Rad}\big(\mathrm{Ad}(L)\big)^{(-)}$ (см. [10, 15] и следствие 2.2). Из доказательства теоремы Бейдара—Пихтилькова следует, что слабо разрешимый радикал $T\big(\mathrm{ad}(L)\big) = \mathrm{Rad}\big(\mathrm{ad}(L)\big)$ алгебры Ли $\mathrm{ad}(L)$ является разрешимым расширением её идеала $N\big(\mathrm{ad}(L)\big)$. Поэтому он разрешим и является наибольшим разрешимым идеалом алгебры Ли $\mathrm{ad}(L)$. Остаётся заметить, что прообразы $T(L) = S(L)$ и $N(L)$ в алгебре Ли L идеалов $T\big(\mathrm{ad}(L)\big) = S\big(\mathrm{ad}(L)\big)$ и $N\big(\mathrm{ad}(L)\big)$ при действии эпиморфизма $\mathrm{ad}\colon L \to \mathrm{ad}(L)$ являются её наибольшим разрешимым и наибольшим нильпотентным идеалами.

Кроме того, если F — нётерова алгебра над полем нулевой характеристики, то $S\big(\mathrm{ad}(L)\big) = C\big(\mathrm{ad}(L), N\big(\mathrm{ad}(L)\big)\big)$ и $S(L) = C\big(L, N(L)\big)$ (см. [16, теорема 1.18]). □

Отметим и то, что $T(L) = S(L)$ и $\mathrm{LN}(L) = N(L)$ для любой конечной алгебры Ли L, так как конечно порождённые идеалы конечных алгебр являются конечными алгебрами (см. [8, лемма 1]).

Замечание 2.5. Расширение $M = FD \leftthreetimes L$ алгебры Ли L над кольцом F обобщённо специально, если и только если ассоциативная алгебра $A(L, D)$ является PI-алгеброй.

Доказательство. Поскольку $\iota^{-1}\,\mathrm{ad}_{(fD,x)}\,\iota = fD + \mathrm{ad}_x$, $f \in F$, $x \in L$, где ι — вложение алгебры Ли L в алгебру Ли M, $\iota\colon x \mapsto (0, x)$, $x \in L$, алгебра $A(L, D)$ является образом алгебры $\mathrm{Ad}(M)$ при действии эпиморфизма $\alpha\colon \psi \mapsto \iota^{-1}\psi\iota$, $\psi \in \mathrm{Ad}(M)$. Вместе с тем для любого $g(x_1, \ldots, x_n) \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, $n \geqslant 1$,

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n)\psi_{n+1} = \iota\alpha\big(g(\psi_1, \ldots, \psi_n)\big)\iota^{-1}\psi_{n+1} \quad \big(\psi_i \in \mathrm{Ad}(M)\big),$$

так как $\psi(M) \subseteq \iota(L)$, $\psi \in \mathrm{Ad}(M)$. Следовательно, алгебра $A(L,D)$ удовлетворяет всем тождествам алгебры $\mathrm{Ad}(M)$ и каждому тождеству (собственному тождеству) $g=0$, $g(x_1,\ldots,x_n) \in F_{\mathrm{Ass}}\langle X\rangle$, алгебры $A(L,D)$ отвечает тождество (собственное тождество) $h=0$, $h(x_1,\ldots,x_{n+1}) = g(x_1,\ldots,x_n)x_{n+1}$, алгебры $\mathrm{Ad}(M)$. □

Замечание 2.6. Для любого дифференцирования D обобщённо специальной алгебры Ли L над алгеброй F над полем нулевой характеристики, такого что расширение $M = FD \leftthreetimes L$ обобщённо специально, образ $D\bigl(T(L)\bigr)$ слабо разрешимого радикала $T(L)$ алгебры L при действии D входит в её наибольший локально нильпотентный идеал $\mathrm{LN}(L)$, $D\bigl(T(L)\bigr) \subseteq \mathrm{LN}(L)$. Кроме того, $D\bigl(S(L)\bigr) \subseteq N(L)$, если дополнительно алгебра F нётерова и алгебра Ли L конечно порождена, а также для любых конечной алгебры Ли L и её дифференцирования D.

Доказательство. Ввиду идеальной наследственности слабо разрешимого радикала T на классе алгебр Ли над алгеброй F и следствия 2.3

$$T\bigl(\iota(L)\bigr) = \iota\bigl(T(L)\bigr) = \iota(L) \cap T(M) = \iota(L) \cap C\bigl(M, \mathrm{LN}(M)\bigr),$$

где ι — вложение алгебры Ли L в алгебру Ли M (см. выше). Поэтому

$$D\Bigl(T\bigl(\iota(L)\bigr)\Bigr) = \iota\Bigl(D\bigl(T(L)\bigr)\Bigr) \subseteq \iota(L) \cap \mathrm{LN}(M) \subseteq \iota\bigl(\mathrm{LN}(L)\bigr), \quad D\bigl(T(L)\bigr) \subseteq \mathrm{LN}(L).$$

Применение следствия 2.4, замечания 2.5 и обобщённой специальности конечных алгебр Ли (см. [17, предложение 1.3.1, с. 14]) завершает доказательство. □

Мы будем называть дифференцирование D алгебры R над кольцом F *локально сильно алгебраическим*, если

1) D является *алгебраическим* (*локально конечным*), т. е. для каждого элемента $x \in R$ найдётся многочлен

$$_xf(t) = t^{n_x} + {_xf_{n_x-1}}t^{n_x-1} + \ldots + {_xf_1}t \in F[t], \quad \deg{_xf} = n_x \geqslant 1,$$

такой что $_xf(D)x = 0$;

2) его ограничение $D|_A$ на любую инвариантную относительно его действия конечно порождённую подалгебру A алгебры R аннулируется некоторым многочленом

$$_Ag(t) = x^{m_A} + {_Ag_{m_A-1}}t^{m_A-1} + \ldots + {_Ag_1}t \in F[t], \quad \deg{_Ag} = m_A \geqslant 1,$$

$_Ag(D|_A) = 0$.

Кроме того, можно определить *локально сильно алгебраическое над идеалом* I кольца F дифференцирование, наложив дополнительное условие включения в I всех младших коэффициентов указанных здесь многочленов.

Теорема 2.7. *Образ* $D\bigl(T(L)\bigr)$ *слабо разрешимого радикала* $T(L)$ *локально обобщённо специальной алгебры Ли* L *над алгеброй* F *над полем нулевой* *характеристики при действии любого её локально сильно алгебраического дифференцирования D входит в её наибольший локально нильпотентный идеал* $\mathrm{LN}(L)$, $D\big(T(L)\big) \subseteq \mathrm{LN}(L)$.

Доказательство. Зафиксируем любое конечное подмножество A слабо разрешимого радикала $T(L)$, выберем многочлены

$$ {}_af(t) = t^{n_a} + {}_af_{n_a-1}t^{n_a-1} + \ldots + {}_af_1t \in F[t], \quad a \in A, \quad \deg {}_af = n_a \geqslant 1, $$

такие что ${}_af(D)(a) = 0$, и обозначим через I подалгебру, порождённую элементами конечного множества $B = \{D^i(a) \mid a \in A,\ i = 0, \ldots, n_a - 1\}$. Подалгебра I обобщённо специальна, инвариантна относительно действия дифференцирования D и входит в радикал $T(L)$, так как, напомним, он является характеристическим идеалом алгебры Ли L. Поэтому она разрешима и ограничение на неё $D|_I$ дифференцирования D аннулирует некоторый многочлен

$$ f(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \ldots + f_1t \in F[t], \quad \deg f = n \geqslant 1, $$

$f(D|_I) = 0$ (см. следствие 2.3). Выделим подалгебру H алгебры F, которую порождают коэффициенты многочленов f и ${}_af$, $a \in A$, и H-подалгебру J алгебры Ли I, порождённую элементами множества B. Все указанные выше свойства алгебры Ли I наследуются алгеброй Ли J, элементы которой порождают I как F-модуль, $I = FJ$. Поскольку по теореме Гильберта о базисе алгебра H нётерова, алгебра Ли J равна своему центру $C\big(J, N(J)\big)$ по наибольшему нильпотентному идеалу $N(J)$, а точнее совпадает с суммой $N(J)$ и H-подмодуля HB, порождённого элементами множества B (см. следствие 2.4), $J = C\big(J, N(J)\big) = N(J) + HB$.

Идеалу $N(J)$ алгебры Ли J отвечают нильпотентные идеалы $S = A(N(J), J, D|_J)$ и $T = A(N(J), J)$ ассоциативных алгебр $A(J, D|_J)'$ и $\mathrm{Ad}(J)'$, где $D|_J$ — ограничение на J дифференцирования D (см. замечание 2.1 и [14, следствие 3.2, с. 116]). Вследствие включения $[J, J] \subseteq N(J)$ фактор-алгебры $\mathrm{Ad}(J)'/T$ и

$$ \overline{\mathrm{Ad}(J)'} = (\mathrm{Ad}(J)' + S)/S \cong \mathrm{Ad}(J)'/(\mathrm{Ad}(J)' \cap S) \cong (\mathrm{Ad}(J)'/T)/\big((\mathrm{Ad}(J)' \cap S)/T\big) $$

коммутативны. Так как $f(D|_J) = 0$, алгебра $A(J, D|_J)'$ порождается как левый и правый модуль над своей подалгеброй $\mathrm{Ad}(J)'$ элементами $D|_J^i$, $i = 0, \ldots, n-1$, образы которых $\overline{D|_J^i} = D|_J^i + S$, $i = 0, \ldots, n-1$, в фактор-алгебре $\overline{A(J, D|_J)'} = A(J, D|_J)'/S$ порождают её как левый и правый модуль над её коммутативной подалгеброй $\overline{\mathrm{Ad}(J)'}$,

$$ \overline{A(J, D|_J)'} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{D|_J^i}\,\overline{\mathrm{Ad}(J)'} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\mathrm{Ad}(J)'}\,\overline{D|_J^i} $$

(см. наблюдения перед замечанием 2.1). Алгебру $\overline{A(J, D|_J)'}$ можно отождествить с её алгеброй левых умножений $L(\overline{A(J, D|_J)'})$ и рассматривать как H-подалгебру алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}(\overline{A(J, D|_J)'})_{\overline{\mathrm{Ad}(J)'}}$ правого модуля

$\overline{A(J, D|_J)'}$ над алгеброй $\overline{\mathrm{Ad}(J)'}$ и, значит, как гомоморфный образ некоторой подалгебры алгебры матриц $M_n(\overline{\mathrm{Ad}(J)'})$ (см. [17, предложение 1.3.1, с. 14]). Отсюда следует выполнение на ней всех тождеств PI-кольца $M_n(\overline{\mathrm{Ad}(J)'})$ и, в частности, стандартных тождеств $\mathrm{st}_k = 0$, $k \geqslant 2n$. Поэтому алгебра $A(J, D|_J)'$ удовлетворяет тождеству $\mathrm{st}_k^l = 0$ для всех $k \geqslant 2n$ и $l \geqslant m$, где m — индекс нильпотентности идеала S.

Применяя замечание 2.6, мы получаем, что образы $D(I)$ и $D(I)$ алгебр Ли J и I при действии дифференцирования D порождают их нильпотентные идеалы $\big(D(J)\big)_J$ и $\big(D(I)\big)_I = F\big(D(J)\big)_J$, поскольку $D(J) = D|_J(J) \subseteq N(J)$.

Образ $D\big(T(L)\big)$ радикала $T(L)$ при действии дифференцирования D порождает его локально нильпотентный идеал $\big(D\big(T(L)\big)\big)_{T(L)}$, так как каждая конечно порождённая подалгебра $\big(D\big(T(L)\big)\big)_{T(L)}$ входит в нильпотентный идеал $\big(D(I)\big)_I$ подходящей конечно порождённой инвариантной относительно действия D подалгебры I радикала $T(L)$. Остаётся вывести совпадение наибольших локально нильпотентных идеалов $\mathrm{LN}(L)$ и $\mathrm{LN}\big(T(L)\big)$ алгебры Ли L и её радикала $T(L)$ из следствия 2.3 и включений

$$\big[L, \mathrm{LN}\big(T(L)\big)\big] \subseteq \mathrm{LN}(L) \subseteq \mathrm{LN}\big(T(L)\big) \subseteq \mathrm{LN}(L) \subseteq T(L) = C\big(L, \mathrm{LN}(L)\big)$$

и получить в итоге, что $D\big(T(L)\big) \subseteq \mathrm{LN}(L) = \mathrm{LN}\big(T(L)\big)$. □

Применяя замечание 1.5 из [3], мы сразу получаем следствие 2.8.

Следствие 2.8. *Образ $D\big(T(L)\big)$ слабо разрешимого радикала $T(L)$ локально конечной алгебры Ли L над алгеброй F над полем нулевой характеристики при действии любого её алгебраического дифференцирования D входит в её наибольший локально нильпотентный идеал $\mathrm{LN}(L)$, $D\big(T(L)\big) \subseteq \mathrm{LN}(L)$.*

Следующий пример показывает существенность локальной сильной алгебраичности дифференцирования в теореме 2.7.

Рассмотрим подалгебру L алгебры Ли матриц $M_2(\mathbb{F}[t])^{(-)}$ над алгеброй многочленов $\mathbb{F}[t]$ над любым полем $\mathbb{F}$, состоящую из матриц с нулевой первой строкой,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & g \end{pmatrix} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{F}[t] \right\}.$$

Специальная алгебра Ли L разрешима и имеет ступень разрешимости 2, но не является локально нильпотентной (и ниль-алгеброй), поскольку для любых $0 \neq f, g \in \mathbb{F}[t]$ и $k \geqslant 1$

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \dots \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},\right.}_{k} \left.\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right] \dots\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g^k f & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Точнее, наибольший локально нильпотентный идеал $\mathrm{LN}(L)$ алгебры Ли L является её наибольшим нильпотентным идеалом,

$$\mathrm{LN}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; f \in \mathbb{F}[t] \right\}.$$

Каждому дифференцированию D алгебры $\mathbb{F}[t]$ соответствует $\mathbb{F}$-дифференцирование $\overline{D}$ алгебры Ли L, которое действует по правилу

$$\overline{D}\colon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & g \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D(f) & D(g) \end{pmatrix} \quad (f, g \in \mathbb{F}[t]).$$

При этом, если $D \neq 0$, $\overline{D}(L) \nsubseteq \mathrm{LN}(L)$. В частности, последнее верно для формального дифференцирования D_t алгебры $\mathbb{F}[t]$ по переменной t.

В случае если поле $\mathbb{F}$ имеет характеристику $p > 0$, $D_t^p = 0$ и $\overline{D_t}^p = 0$. Напротив, если характеристика поля равна нулю, $h(D_t) \neq 0$, $h(\overline{D_t}) \neq 0$ и, более того, $h(\overline{D_t}|_A) \neq 0$ для любого $0 \neq h \in \mathbb{F}[t]$, где $\overline{D_t}|_A$ — ограничение дифференцирования $\overline{D_t}$ на инвариантную относительно его действия конечно порождённую $\mathbb{F}$-подалгебру A алгебры Ли L,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & g \end{pmatrix} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{F}[t],\ \deg g \leqslant 1 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Таким образом, дифференцирование $\overline{D_t}$ специальной разрешимой алгебры Ли $L = T(L)$ над полем нулевой характеристики $\mathbb{F}$ не является локально сильно алгебраическим и $\overline{D_t}(L) \nsubseteq \mathrm{LN}(L)$. Это означает также, что алгебра Ли $\mathbb{F}\overline{D_t} \leftthreetimes L$ не может быть обобщённо специальной (см. замечание 2.6).

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 643—648.

[3] Голубков А. Ю. Локальная конечность алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 25—75.

[4] Голубков А. Ю. Конструкции специальных радикалов // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 57—133.

[5] Голубков А. Ю. Радикал Кострикина и подобные ему радикалы алгебр Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 2. — С. 157—180.

[6] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[7] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[8] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 41—73.

[9] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[10] Львов И. В. Теорема Брауна о радикале конечно порождённой PI-алгебры: Препринт № 63. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984.

[11] Никитин А. А. Наследственность радикалов колец // Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 3. — С. 303—315.

[12] Парфёнов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1971. — Т. 12, № 1. — С. 171—176.

[13] Плоткин Б. И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли // УМН. — 1958. — Т. 13, № 6 (84). — С. 133—138.

[14] Amayo R. K., Stewart I. N. Infinite Dimensional Lie Algebras. — Leyden: Noordhoof, 1974.

[15] Braun A. The radical in finitely generated PI-algebra // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 7, no. 2. — P. 385—386.

[16] Golubkov A. Yu. The prime radical of the special Lie algebras and the elementary Chevalley groups // Commun. Algebra. — 2004. — Vol. 32, no. 5. — P. 1649—1683.

[17] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — London: Academic Press, 1980. — (Pure and Appl. Math.; Vol. 84).