Об алгебро-геометрической и универсальной теориях абелевых групп*

Э. Ю. ДАНИЯРОВА
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: evelina.omsk@list.ru

А. А. МИЩЕНКО
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: alexei.mishenko@gmail.com

В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: vnremesl@gmail.com

А. В. ТРЕЙЕР
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: alexander.treyer@gmail.com

УДК 512.541+510.67

Ключевые слова: абелева группа, система уравнений, алгебраическое множество, радикал, координатная группа, неприводимая координатная группа, нётеровость по уравнениям, аппроксимируемость, дискриминируемость, квазимногообразие, главный универсальный класс, универсальная эквивалентность, квазиэквациональная эквивалентность, геометрическая эквивалентность, универсальная геометрическая эквивалентность, каноническая группа, Dis-предел.

Аннотация

Статья носит обзорный характер, аккумулируя результаты по алгебраической геометрии над абелевыми группами и близкие к ним теоретико-модельные результаты, связанные с описанием главных универсальных классов и квазимногообразий.

Abstract

E. Yu. Daniyarova, A. A. Mishchenko, V. N. Remeslennikov, A. V. Treier, On algebraic-geometric and universal theories of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 2, pp. 101—145.

This paper is of an overview nature, accumulating results on algebraic geometry over Abelian groups and close to them model-theoretic results related to the description of principal universal classes and quasi-varieties.

*Результаты раздела 2 получены при поддержке РНФ, проект 18-71-10028. Результаты раздела 3 получены при поддержке РНФ, проект 19-11-00209.

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 2, с. 101—145.

Введение

Коммутативная алгебра — колыбель современных алгебро-геометрических исследований. Важной её частью является теория абелевых групп или, более объёмно, теория модулей над коммутативными кольцами. В этой связи проблемам классификации объектов коммутативной алгебры всегда уделялось особое внимание [6, 7, 18].

Одной из центральных тем здесь является проблема изоморфизма для объектов той или иной категории в коммутативной алгебре. Наш обзор посвящён абелевым группам, поэтому далее речь пойдёт только об этой категории. К сожалению, даже для подкатегории абелевых групп конечного ранга без кручения сложность проблемы изоморфизма весьма высока. Ею занимались в 1930-х годах Л. С. Понтрягин, А. Г. Курош, А. И. Мальцев, но удовлетворительного решения найдено не было. Позже на рубеже 1960-х годов после отказа от идеи классификации абелевых групп конечного ранга без кручения с точностью до изоморфизма исследования сместились в сторону классификации таких групп с точностью до квазиизоморфизма [16, 21], успешно завершённые в 1992 году А. А. Фоминым [13].

Другим направлением исследования в классе абелевых групп стало ослабление проблемы изоморфизма до задачи классификации абелевых групп с точностью до элементарной эквивалентности. Она была решена в 1955 году в работе В. Шмелёвой [29], где для каждой абелевой группы строятся инварианты (позже названные инвариантами Шмелёвой) и доказывается теорема о том, что критерием элементарной эквивалентности абелевых групп A и B является попарное равенство всех типов инвариантов Шмелёвой для A и B.

Новые проблемы при изучении категории абелевых групп, а именно алгебро-геометрические проблемы, проблемы конструктивности [5] и другие, вынуждают ещё более ослабить задачу классификации абелевых групп, переходя к универсальной эквивалентности и даже к квазиэквациональной эквивалентности. Результаты, которые при этом получаются, отражены в данном обзоре, во втором его разделе. А в первом разделе обзора собраны предварительные теоретико-модельные и алгебро-геометрические сведения, а также необходимая информация о категории абелевых групп, приведены используемые в работе обозначения.

Поясним, что понимается под алгебро-геометрической теорией абелевых групп и какие проблемы внутри неё выделяют. В [4] для любого языка $\mathtt{L}$ (состоящего из константных символов, символов операций и предикатных символов) и любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка $\mathtt{L}$ определяются базовые алгебро-геометрические понятия, а именно понятия уравнения, системы уравнений, алгебраического множества как множества всех решений системы уравнений, радикала, координатной алгебры, топологии Зариского, неприводимых множеств и др. Как и в классической алгебраической геометрии над полем, основной задачей в алгебраической геометрии над $\mathcal{A}$ является задача классификации алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ с точностью до изоморфизма. Данная задача эквивалентна задаче классификации координатных алгебр алгебраических множеств. Отдельной важной подзадачей здесь является проблема классификации координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств. Другой тип задач связан с описанием алгебраических систем из особых классов, а именно из класса нётеровых по уравнениям алгебраических систем, из класса эквациональных областей, эквациональных кообластей и др. Ещё один важный тип проблем определяется в связи с потребностью классифицировать алгебраические системы языка L по степени их алгебро-геометрического родства. Здесь, во-первых, необходимо изучить геометрически эквивалентные алгебраические системы. Во-вторых, поскольку геометрическая эквивалентность не всегда в полной мере отражает алгебро-геометрическую близость, далее ставится задача исследования универсально геометрически эквивалентных алгебраических систем. Для случая абелевых групп решения всех перечисленных задач приведены в третьем разделе данного обзора. В частности, для абелевых групп геометрическая эквивалентность совпадает с квазиэквациональной, а универсальная геометрическая — с универсальной, поэтому результаты второго раздела обзора здесь оказываются кстати.

Имеется несколько статей по тематике обозначенных выше проблем для категории абелевых групп, в том числе совсем свежих. Целью обзора является размещение материала этих статей под одной крышей. В то же время в обзор включены некоторые ранее не публиковавшиеся результаты.

В качестве продолжения алгебро-геометрической тематики в классе абелевых групп естественно возникает ряд теоретико-модельных проблем в этом классе, в том числе задачи описания классов экзистенционально замкнутых групп и ультраоднородных групп внутри универсальных классов абелевых групп. На данный момент работы в этом направлении продолжаются [8], поэтому представленный обзор можно считать первой частью более масштабного проекта по описанию алгебро-геометрической и универсальной теорий абелевых групп.

1. Предварительные сведения

Во всей работе будем использовать следующие обозначения:

— $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел с нулём;
— $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
— $\mathbb{Z}^+$ — множество всех целых положительных чисел;
— $\mathcal{P}$ — множество всех простых чисел;
— $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ — расширенная линейно упорядоченная аддитивная полугруппа, в которой сложение в $\mathbb{N}$ дополнено равенствами $n+\infty=\infty+n=\infty$, $n\in\mathbb{N}$, $\infty+\infty=\infty$; соответственно, будем считать, что $\infty-\infty=\infty$ и $\infty-n=\infty$, $n\in\mathbb{N}$;
— $\mathbb{F}_p$ — поле из p элементов, $p\in\mathcal{P}$.

Предварительные сведения об абелевых группах мы излагаем, опираясь на книги Л. Фукса [11, 12], теоретико-модельные и алгебро-геометрические сведения — со ссылкой на монографию Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова [4] по универсальной алгебраической геометрии (т. е. по алгебраической геометрии над произвольными алгебраическими системами) и книгу В. А. Горбунова [2] по алгебраической теории квазимногообразий.

1.1. Предварительные сведения об абелевых группах

Абелевы группы — это группы, удовлетворяющие тождеству $a + b = b + a$ для любых своих элементов a, b. Для любого натурального числа $m > 1$ циклическую абелеву группу порядка m будем обозначать стандартно через $C(m)$, а бесконечную циклическую — через $\mathbb{Z}$. Для простого числа p через $C(p^\infty)$ обозначается квазициклическая p-группа:

$$C(p^\infty) = \langle g_1, g_2, g_3, \ldots \mid pg_1 = 0,\ pg_2 = g_1,\ pg_3 = g_2, \ldots\rangle.$$

Пусть A — абелева группа. Циклическую подгруппу группы A, порождённую элементом $a \in A$, будем обозначать через $C(a)$. Если все элементы группы A имеют конечный порядок, то A называется периодической группой; если все её элементы имеют бесконечный порядок, то A называется группой без кручения. Через $e(A)$ будем обозначать период группы A, который равен наименьшему общему кратному порядков всех её элементов, если такое число существует, либо ∞ в противном случае; порядок нулевой группы по определению равен 1. Если $e(A) < \infty$, то группа A называется ограниченной. Подмножество $T(A)$ всех элементов группы A конечного порядка является максимальной периодической подгруппой в A и называется её периодической частью, а фактор-группа $A/T(A)$ является группой без кручения. Максимальная подгруппа в $T(A)$, состоящая из элементов, порядки которых являются степенями простого числа p, обозначается через $T_p(A)$ и называется примарной p-компонентой группы A или силовской p-подгруппой группы A. Будем использовать обозначение $e_p(A)$ для $e\big(T_p(A)\big)$.

Для любого числа $m \in \mathbb{N}$ определяются следующие подгруппы в A:

$$mA = \{ma \mid a \in A\}, \quad A[m] = \{a \in A \mid ma = 0\},$$

вторую называют m-слоем группы A. Если $e_p(A) = p^k$, то $A[p^k] = A[p^{k+n}]$ для любого $n \in \mathbb{Z}^+$. Если $e_p(A) = 1$, то $A[p^k] = 0$ для любого $k \in \mathbb{Z}^+$.

Посредством $\oplus$ будем стандартно обозначать прямые суммы абелевых групп (конечные или бесконечные), но для прямых сумм копий группы A будем использовать и показательную запись A^m. Через A^∞ будем обозначать прямую степень группы A мощности $|\mathbb{N}|$. В то же время $A^0 = 0$ для любой группы A.

Любая конечно порождённая абелева группа A изоморфна некоторой конечной прямой сумме циклических групп вида

$$\mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} C^{m_1^p}(p) \oplus \ldots \oplus C^{m_{k_p}^p}(p^{k_p}), \quad k, m_i^j \in \mathbb{N}, \quad k_p \in \mathbb{Z}^+.$$

Здесь $T_p(A) = C^{m_1^p}(p) \oplus \ldots \oplus C^{m_{k_p}^p}(p^{k_p})$, $p \in \mathcal{P}$, и не более чем конечное число примарных компонент отлично от нуля [11, теоремы 15.2, 15.5]. В частности, периодическая подгруппа $T(A)$ конечно порождённой абелевой группы A является конечной группой. Конечная циклическая группа $C(m)$ изоморфна прямой сумме $C(p_1^{k_1}) \oplus \ldots \oplus C(p_s^{k_s})$, где $m = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ — разложение числа m на простые множители.

Говорят, что подгруппа A абелевой группы B выделяется в B в качестве прямого слагаемого, если $B \cong A \oplus C$ для некоторой подгруппы C группы B. Подгруппа A абелевой группы B называется сервантной, если для любых $a \in A$ и $n \in \mathbb{Z}^+$ из разрешимости уравнения $nx = a$ в B следует его разрешимость в A, другими словами, $nA = nB \cap A$. Тривиальные сервантные подгруппы в B — это нулевая подгруппа 0 и вся группа B. Для любой абелевой группы B её периодическая часть $T(B)$ есть сервантная подгруппа. Если подгруппа A абелевой группы B выделяется в качестве прямого слагаемого в B, то A — сервантная подгруппа в B. При некоторых ограничениях верно и обратное утверждение: если A — сервантная подгруппы абелевой группы B и фактор-группа B/A конечно порождённая, то A выделяется в B в качестве прямого слагаемого [11, следствие 28.3].

1.2. Предварительные теоретико-модельные сведения

Через $\mathtt{L}$ будем обозначать стандартный язык абелевых групп, $\mathtt{L} = \{+, -, 0\}$. При фиксированной абелевой группе A через $\mathtt{L}_A$ будем обозначать расширенный язык, в котором к $\mathtt{L}$ добавляются новые константные символы, соответствующие элементам группы A.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное множество переменных. Атомарные формулы языка $\mathtt{L}$ от переменных X имеют вид

$$m_1x_1 + \ldots + m_nx_n = 0, \quad m_i \in \mathbb{Z},$$

а атомарные формулы языка $\mathtt{L}_A$ имеют вид

$$m_1x_1 + \ldots + m_nx_n = a, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \;\; a \in A.$$

Далее в этом разделе будем излагать информацию на языке $\mathtt{L}$, но всё сказанное можно повторить и применительно к языку $\mathtt{L}_A$. Мы следуем монографии [4], в которой повествование ведётся в предположении полной произвольности базового языка.

Напомним, что предложением языка $\mathtt{L}$ называется любая замкнутая формула языка $\mathtt{L}$, т. е. формула без свободных переменных. Если θ — предложение и A — группа, то запись $A \models \theta$ означает истинность предложения θ в группе A, а $A \not\models \theta$ — его ложность.

Универсальным предложением ($\forall$-предложением) языка $\mathtt{L}$ называется предложение вида

$$\forall\, x_1 \;\ldots\; \forall\, x_n \left(\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{m_i} \varphi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n) \right),$$

где $\varphi_{i,j}$ — атомарные формулы языка L или их отрицания. Здесь универсальное предложение записано в пренексной нормальной форме с матрицей, приведённой к нормальной дизъюнктивной форме. Отрицание универсального предложения называется экзистенциальным предложением ($\exists$-предложением). Квазитождеством языка L называется универсальное предложение вида

$$\forall x_1 \ \ldots \ \forall x_n \ \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n) \right),$$

где φ, φ_i — атомарные формулы языка L. Тождеством языка L называется любое универсальное предложение вида

$$\forall x_1 \ \ldots \ \forall x_n \ \big(\varphi(x_1, \ldots, x_n)\big),$$

где φ — атомарная формула языка L. Любое тождество эквивалентно некоторому квазитождеству.

Пусть $\mathbf{K}$ — некоторый класс абелевых групп. Все классы в этой работе предполагаются, во-первых, абстрактными, т. е. содержащими все изоморфные копии всех своих групп. Во-вторых, отношение изоморфизма $\cong$ групп является отношением эквивалентности, поэтому, по сути дела, всякий раз по умолчанию вместо абстрактного класса мы будем рассматривать класс *типов изоморфизмов* $\mathbf{K}/\cong$, не делая при этом специальных оговорок. Класс абелевых групп $\mathbf{K}$ называется нетривиальным, если $\mathbf{K} \neq \{0\}$.

Элементарной (универсальной, экзистенциальной, квазиэквациональной) теорией класса $\mathbf{K}$ называется множество $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$ ($\mathrm{Th}_\forall(\mathbf{K})$, $\mathrm{Th}_\exists(\mathbf{K})$, $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathbf{K})$ соответственно) всех предложений (универсальных предложений, экзистенциальных предложений, квазитождеств соответственно) языка L, истинных на всех группах из $\mathbf{K}$. Если класс $\mathbf{K}$ состоит из одной группы A, то будем использовать записи $\mathrm{Th}(A)$, $\mathrm{Th}_\forall(A)$, $\mathrm{Th}_\exists(A)$, $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(A)$.

Для любого множества предложений T языка L через $\mathrm{Mod}(T)$ будем обозначать множество всех абелевых групп (точнее L-алгебр), на которых истинны все предложения из T. Говорят, что класс $\mathrm{Mod}(T)$ порождается предложениями T или T является множеством аксиом для класса $\mathrm{Mod}(T)$. Также класс $\mathbf{K}$ называется аксиоматизируемым, если $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторого множества предложений T. Если T состоит из универсальных предложений, то $\mathrm{Mod}(T)$ называется универсальным классом; если T состоит из квазитождеств, то $\mathrm{Mod}(T)$ называется квазимногообразием; если T состоит из тождеств, то $\mathrm{Mod}(T)$ называется многообразием.

Класс всех абелевых групп $\mathbf{A}$ является многообразием языка L, его аксиомы — это групповые тождества и дополнительное тождество коммутативности. Класс абелевых групп без кручения $\mathbf{Q}_0$ — это квазимногообразие, аксиоматизируемое внутри $\mathbf{A}$ квазитождествами

$$\forall x \ (mx = 0 \longrightarrow x = 0), \quad m \in \mathbb{Z}^+.$$

В $\mathbf{Q}_0$ входит и нулевая группа. Обозначим через $\mathbf{Q}_p$ класс всех абелевых групп A, таких что $T(A) = T_p(A)$, $p \in \mathcal{P}$. Этот класс также является квазимногообразием, аксиоматизируемым внутри $\mathbf{A}$ квазитождествами

$$\{\rho_q \mid q \in \mathcal{P},\ q \neq p\}, \quad \text{где} \quad \rho_q = \forall\, x\ (qx = 0 \longrightarrow x = 0).$$

Для данного класса абелевых групп $\mathbf{K}$ через $\mathbf{Ucl}(\mathbf{K})$ ($\mathbf{Qvar}(\mathbf{K})$, $\mathbf{Var}(\mathbf{K})$) будем обозначать наименьший универсальный класс (квазимногообразие, многообразие соответственно), содержащий $\mathbf{K}$. Говорят также, что универсальной класс $\mathbf{Ucl}(\mathbf{K})$ (квазимногообразие $\mathbf{Qvar}(\mathbf{K})$, многообразие $\mathbf{Var}(\mathbf{K})$) порождается классом $\mathbf{K}$. Имеют место следующие равенства и включения:

$$\mathbf{Ucl}(\mathbf{K}) = \mathrm{Mod}\big(\mathrm{Th}_\forall(\mathbf{K})\big), \quad \mathbf{Qvar}(\mathbf{K}) = \mathrm{Mod}\big(\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathbf{K})\big),$$
$$\mathbf{Ucl}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Qvar}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Var}(\mathbf{K}).$$

Класс $\mathbf{K}$ называется наследственным, если для любой группы $A \in \mathbf{K}$ и любой её подгруппы $B \leqslant A$ имеет место включение $B \in \mathbf{K}$. Любой универсальный класс (в частности, любое квазимногообразие или многообразие) наследственен. Через $\mathbf{K}_\omega$ мы обозначаем все конечно порождённые группы из $\mathbf{K}$. Любой универсальный класс (в частности, любое квазимногообразие) порождается своими конечно порождёнными группами. Для любого наследственного класса $\mathbf{K}$ справедливы равенства $\mathbf{Ucl}(\mathbf{K}) = \mathbf{Ucl}(\mathbf{K}_\omega)$ и $\mathbf{Qvar}(\mathbf{K}) = \mathbf{Qvar}(\mathbf{K}_\omega)$. Если $\mathbf{K}$ — универсальный класс, то группа A принадлежит $\mathbf{K}$ тогда и только тогда, когда все конечно порождённые подгруппы группы A принадлежат $\mathbf{K}$. Если $\mathbf{K}^1$ и $\mathbf{K}^2$ — два универсальных класса, то

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 \Longleftrightarrow \mathbf{K}^1_\omega = \mathbf{K}^2_\omega.$$

Если $\mathbf{K} = \{A\}$, то будем писать просто $\mathbf{Ucl}(A)$ и $\mathbf{Qvar}(A)$. Так, абелева группа B принадлежит $\mathbf{Ucl}(A)$ в том и только том случае, если на B истинны все универсальные предложения, истинные на A, и $B \in \mathbf{Qvar}(A)$ в том и только том случае, если все квазитождества, истинные на A, истинны и на B.

Квазимногообразие $\mathbf{Qvar}(A)$ и универсальный класс $\mathbf{Ucl}(A)$, порождённые данной группой A, играют большую роль в алгебраической геометрии над A. Такие универсальные классы и квазимногообразия мы называем *главными*. В классе групп в языке $\mathtt{L}$ любое квазимногообразие $\mathbf{K}$ является главным, так как, например, может быть порождено прямым произведением всех своих групп. Для квазимногообразий в других категориях и/или других языках это не всегда так. Для работы с главными универсальными классами нам пригодится следующий критерий.

Теорема 1.1 [4, теорема 1.6.19]. *Для любого универсального класса* $\mathbf{K}$ *абелевых групп следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathbf{K}$ — *главный универсальный класс*;
2) *любые две конечно порождённые группы из* $\mathbf{K}$ *можно вложить в некоторую группу из* $\mathbf{K}$.

Свойство, сформулированное во втором пункте теоремы 1.1, мы называем *свойством совместной ω-вложимости*.

Всякое квазимногообразие замкнуто относительно любых прямых произведений. Для универсальных классов это не так. Покажем это на примерах, которые одновременно демонстрируют существование неглавных универсальных классов.

Пример 1.2. Пусть $\mathbf{K}$ — универсальный класс, порождённый двумя группами: $\mathbf{K} = \mathbf{Ucl}(\{C(p^2), C^2(p)\})$ для некоторого простого числа p. Множество конечно порождённых групп класса $\mathbf{K}$ есть $\{C(p), C^2(p), C(p^2)\}$. Очевидно, что в $\mathbf{K}$ не выполняется свойство совместной ω-вложимости, а значит, универсальный класс $\mathbf{K}$ не является главным.

Пример 1.3. Пусть p и q — различные простые числа и $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_p \cup \mathbf{Q}_q$. Класс $\mathbf{K}$ является универсальным классом, так как он аксиоматизируется множеством универсальных формул $\Phi = \{\varphi_m \mid m \in \mathbb{Z}^+\}$, где

$$\varphi_m = \begin{cases} \forall x\ (mx = 0 \to x = 0) & \text{при } (p, m) = (q, m) = 1, \\ \forall x\ \big(mx = 0 \to (p^\alpha x = 0 \vee q^\beta x = 0)\big) & \text{при } m = p^\alpha q^\beta m_0, \\ & (p, m_0) = (q, m_0) = 1. \end{cases}$$

Легко заметить, что свойство совместной ω-вложимости в классе $\mathbf{K}$ не выполнено, поэтому $\mathbf{K}$ не является главным.

Замечание 1.4 [4, следствие 1.6.24]. Произвольный универсальный класс $\mathbf{K}$ языка $\mathtt{L}$ представи́м в виде объединения максимальных по включению главных универсальных классов языка $\mathtt{L}$.

Пусть A и B — абелевы группы. Они называются элементарно (универсально, квазиэквационально) эквивалентными, если $\mathrm{Th}(A) = \mathrm{Th}(B)$ ($\mathrm{Th}_\forall(A) = \mathrm{Th}_\forall(B)$, $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(A) = \mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(B)$ соответственно). В этом случае пишут $A \equiv B$ ($A \equiv_\forall B$, $A \equiv_{\mathrm{qi}} B$ соответственно). Очевидно, что

$$A \equiv_\forall B \iff \mathbf{Ucl}(A) = \mathbf{Ucl}(B),$$
$$A \equiv_{\mathrm{qi}} B \iff \mathbf{Qvar}(A) = \mathbf{Qvar}(B).$$

1.3. Инварианты Шмелёвой и элементарная эквивалентность

Существует несколько способов введения элементарных инвариантов для абелевых групп (см., например, [5, 29]). Все они эквивалентны в том смысле, что основной результат об элементарной эквивалентности абелевых групп формулируется в одной и той же форме. Среди них мы выбрали вариант определения, наиболее удобный для целей данной работы.

Пусть A — абелева группа и $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Нетрудно заметить, что $p^{k+1}A \subseteq p^kA$ и период фактор-группы $p^kA/p^{k+1}A$ равен p, следовательно, в ней определена структура векторного пространства над полем $\mathbb{F}_p$, поэтому можно говорить о размерности $p^kA/p^{k+1}A$ над полем $\mathbb{F}_p$.

Для абелевой группы A введём первую серию инвариантов $\alpha_{p,k}(A)$, $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, со значениями в $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, положив

$$\alpha_{p,k}(A) = \begin{cases} \dim\bigl(p^{k-1}A/p^kA\bigr), & \text{если эта размерность конечна,} \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введём вторую и третью серию инвариантов, $\beta_{p,k}(A)$ и $\gamma_{p,k}(A)$, также со значениями в $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Напомним, что p-слой $A[p]$ состоит из элементов порядка p и нулевого элемента группы A. Как и выше, на $A[p]$ определяется структура векторного пространства над полем $\mathbb{F}_p$ и понятие размерности $A[p]$ над $\mathbb{F}_p$. Для чисел $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$ положим

$$\beta_{p,k}(A) = \begin{cases} \dim\bigl((p^{k-1}A)[p]/(p^kA)[p]\bigr), & \text{если эта размерность конечна,} \\ \infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\gamma_{p,k}(A) = \begin{cases} \dim\bigl((p^{k-1}A)[p]\bigr), & \text{если эта размерность конечна,} \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Наконец, введём инвариант $\delta(A)$:

$$\delta(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } e(A) < \infty, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Через $\mathrm{EI}(A)$ обозначим бесконечный вектор всех элементарных инвариантов абелевой группы A:

$$\mathrm{EI}(A) = (\delta(A),\, \alpha_{p,k}(A),\, \beta_{p,k}(A),\, \gamma_{p,k}(A) \mid p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+).$$

Теорема 1.5 (В. Шмелёва [29]). *Две абелевы группы A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathrm{EI}(A) = \mathrm{EI}(B)$.*

Значение всех элементарных инвариантов может быть выражено с помощью предложений языка L, но далее нас будут интересовать только те параметры, которые описываются с помощью универсальных предложений или квазитождеств. Очевидно, что инвариант $\delta(A)$ выражается с помощью тождеств, а именно: $\delta(A) = 0$ тогда и только тогда, когда для некоторого $m \in \mathbb{Z}^+$ группа A удовлетворяет тождеству

$$\tau_m = \forall\, x\ (mx = 0),$$

соответственно $\delta(A) = 1$ тогда и только тогда, когда тождество τ_m ложно в A при любых $m \in \mathbb{Z}^+$. Условимся также для удобства через τ_∞ обозначать тривиальное тождество $0 = 0$. Таким образом, группа A всегда удовлетворяет тождеству $\tau_{e(A)}$.

Далее рассмотрим более пристально свойства инвариантов $\gamma_{p,k}(A)$.

Лемма 1.6. *Для любых чисел $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ и $m \in \mathbb{N}$ существует такое универсальное предложение $\theta_{p,k,m}$ языка* L*, что для произвольной абелевой группы A справедливо утверждение*

$$A \models \theta_{p,k,m} \Longleftrightarrow \gamma_{p,k}(A) \leqslant m.$$

В частности, $\gamma_{p,k}(A) = \infty$ *тогда и только тогда, когда* $A \not\models \theta_{p,k,m}$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Как следует из определения инварианта $\gamma_{p,k}(A)$, подходящее универсальное предложение $\theta_{p,k,m}$ может быть выбрано следующим образом:

$$\theta_{p,k,m} = \forall x_0 \ \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_m \ \Big(\bigwedge_{i=0}^{m} p^k x_i = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \bigvee_{\alpha_i \in \mathbb{F}_p, \ \bar{\alpha} \neq \bar{0}} \alpha_0 p^{k-1} x_0 + \alpha_1 p^{k-1} x_1 + \ldots + \alpha_m p^{k-1} x_m = 0 \Big) \ \text{ для } \ m \geqslant 1,$$

$$\theta_{p,k,0} = \forall x \ (p^k x = 0 \longrightarrow p^{k-1} x = 0).$$

□

Следствие 1.7. *Пусть* A *и* B *— абелевы группы, такие что* $A \in \mathbf{Ucl}(B)$ *(в частности, может быть* $A \leqslant B$*). Тогда* $\gamma_{p,k}(A) \leqslant \gamma_{p,k}(B)$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$ *и* $k \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. Если $\gamma_{p,k}(B) = \infty$, то требуемое очевидным образом выполняется. Пусть $\gamma_{p,k}(B) = m$. Тогда $B \models \theta_{p,k,m}$. Так как $A \in \mathbf{Ucl}(B)$, то $A \models \theta_{p,k,m}$, откуда следует, что $\gamma_{p,k}(A) \leqslant m$. □

Замечание 1.8. Для инвариантов $\alpha_{p,k}$ и $\beta_{p,k}$ не справедлив результат, аналогичный лемме 1.6 для $\gamma_{p,k}$, поскольку эти инварианты могут возрастать на подгруппах. Например, для абелевой группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ имеем $\alpha_{p,k}(\mathbb{Q}) = 0$, при этом $\alpha_{p,k}(\mathbb{Z}) = 1$ для её подгруппы целых чисел $\mathbb{Z}$. Точно так же для квазициклической группы $C(p^\infty)$ имеем $\beta_{p,k}\big(C(p^\infty)\big) = 0$, но для подгруппы $C(p^k)$ верно, что $\beta_{p,k}\big(C(p^k)\big) = 1$.

Для удобства введём обозначения $\theta_{p,k,\infty}$ для любых $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, полагая, что предложение $\theta_{p,k,\infty}$ есть тривиальное тождество $0 = 0$.

Заметим, что $\gamma_{p,k}(A) \geqslant \gamma_{p,k+1}(A)$ для любых $k \in \mathbb{Z}^+$, $p \in \mathcal{P}$. Например, для конечной p-группы

$$C = C^{m_1}(p) \oplus C^{m_2}(p^2) \oplus \ldots \oplus C^{m_k}(p^k)$$

имеем следующие значения инвариантов:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{p,1}(C) = m_1 + m_2 + \ldots + m_k,\\
&\gamma_{p,2}(C) = m_2 + \ldots + m_k,\\
&\quad \ldots\\
&\gamma_{p,k}(C) = m_k,\\
&\gamma_{p,t}(C) = 0 \ \text{ для всех } \ t > k.
\end{aligned}$$

В то же время, располагая последовательностью натуральных чисел

$$\gamma_{p,1} \geqslant \gamma_{p,2} \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{p,k} \geqslant \gamma_{p,k+1} = \gamma_{p,k+2} = \ldots = 0,$$

можно построить конечную p-группу C, такую что заданные числа являются её универсальными инвариантами:

$$C = C^{\gamma_{p,1}-\gamma_{p,2}}(p) \oplus \ldots \oplus C^{\gamma_{p,k-1}-\gamma_{p,k}}(p^{k-1}) \oplus C^{\gamma_{p,k}}(p^k).$$

Для квазициклической p-группы $C(p^\infty)$ все универсальные инварианты $\gamma_{p,k}$ равны 1 и $\delta\big(C(p^\infty)\big) = 1$.

Стандартными рассуждениями доказываются следующие леммы.

Лемма 1.9. *Для любой абелевой группы A верно, что*

$$\gamma_{p,k}(A) = \gamma_{p,k}\big(T(A)\big) = \gamma_{p,k}\big(T_p(A)\big),\ \gamma_{p,k}\big(T_q(A)\big) = 0, \quad p,q \in \mathcal{P},\ p \neq q,\ k \in \mathbb{Z}^+.$$

Лемма 1.10. *Если абелева группа A представима в виде прямой суммы $B \oplus C$, то*

$$\gamma_{p,k}(A) = \gamma_{p,k}(B) + \gamma_{p,k}(C), \quad p \in \mathcal{P}, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Лемма 1.11. *Пусть A — абелева группа и C — конечная абелева группа, такие что имеют место неравенства $\gamma_{p,k}(A) \geqslant \gamma_{p,k}(C)$ для всех $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда C вкладывается в A.*

Далее нам будет полезен следующий результат.

Лемма 1.12. *Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B. Тогда для любых $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$ имеет место равенство*

$$\gamma_{p,k}(B) = \gamma_{p,k}(A) + \gamma_{p,k}(B/A).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\gamma_{p,k}(B) = \infty$ и $\{b_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq (p^{k-1}B)[p]$ — счётное множество $\mathbb{F}_p$-линейно независимых элементов. Если при этом $\gamma_{p,k}(B/A) = \infty$, то требуемое равенство очевидным образом выполняется. Если $\gamma_{p,k}(B/A) < \infty$, то найдётся такое число $N \in \mathbb{N}$, что для всех $i > N$ элемент b_i является $\mathbb{F}_p$-линейной комбинацией элементов b_n, $n \leqslant N$, по модулю A. Следовательно,

$$\gamma_{p,k}(A) = \dim\big((p^{k-1}A)[p]\big) = \dim\big((p^{k-1}B)[p] \cap A\big) = \infty,$$

поэтому снова получаем справедливость требуемого равенства.

Пусть теперь $\gamma_{p,k}(B) < \infty$ и $W \subseteq (p^{k-1}B)[p]$ — конечное множество $\mathbb{F}_p$-линейно независимых элементов. Обозначим через C подгруппу группы B, порождённую группой A и множеством W. Тогда A — сервантная подгруппа группы C, и следовательно, C представима в виде $A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа. Имеем $\gamma_{p,k}(B) = \gamma_{p,k}(C) = \gamma_{p,k}(A) + \gamma_{p,k}(G)$. Пусть $g_1, \ldots, g_m \in (p^{k-1}G)[p]$ — $\mathbb{F}_p$-линейно независимые элементы. Тогда их образы при эпиморфизме $B \to B/A$ также будут $\mathbb{F}_p$-линейно независимыми элементами из $(p^{k-1}B/A)[p]$. Отсюда следует, что $\gamma_{p,k}(B) - \gamma_{p,k}(A) = \gamma_{p,k}(G) \leqslant \gamma_{p,k}(B/A)$. С другой стороны, если $c_1, \ldots, c_s \in (p^{k-1}B/A)[p]$ — $\mathbb{F}_p$-линейно независимые элементы, то для них в силу сервантности подгруппы A найдутся такие прообразы $c_1', \ldots, c_s'$ в группе B, что $c_1', \ldots, c_s' \in (p^{k-1}B)[p]$. Если $a_1, \ldots, a_n \in (p^{k-1}A)[p]$ — $\mathbb{F}_p$-линейно независимые элементы, то $\mathbb{F}_p$-линейно независимы элементы $a_1, \ldots, a_n, c'_1, \ldots, c'_s \in (p^{k-1}B)[p]$, следовательно, $\gamma_{p,k}(B) \geqslant \gamma_{p,k}(A) + \gamma_{p,k}(B/A)$. Таким образом, требуемое равенство в данном случае также доказано. □

Следствие 1.13. *Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B. Тогда*

$$\gamma_{p,k}(B) - \gamma_{p,k}(A) \geqslant \gamma_{p,k+1}(B) - \gamma_{p,k+1}(A) \geqslant 0$$

для любых $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. Во-первых, согласно следствию 1.7 $\gamma_{p,k}(B) - \gamma_{p,k}(A) \geqslant 0$ для любых $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$. Во-вторых, если $\gamma_{p,k}(B) = \infty$, то $\gamma_{p,k}(B) - \gamma_{p,k}(A) = \infty$, следовательно, требуемое неравенство выполняется. Если же $\gamma_{p,k}(B) < \infty$, то

$$\gamma_{p,k}(B) - \gamma_{p,k}(A) = \gamma_{p,k}(B/A) \geqslant \gamma_{p,k+1}(B/A) = \gamma_{p,k+1}(B) - \gamma_{p,k+1}(A). \quad \square$$

1.4. Класс абелевых A-групп

Итак, через $\mathtt{L}$ мы обозначаем стандартный язык абелевых групп, $\mathtt{L} = \{+, -, 0\}$, а через $\mathtt{L}_A$ — его расширение с помощью добавления новых константных символов, соответствующих элементам из данной абелевой группы A.

Напомним, что абелевой A-группой называется любая абелева группа G, в которую A вкладывается. Для краткости изложения в таких случаях подгруппу группы G, изоморфную A, будем отождествлять с A. Абелева A-группа G называется конечно порождённой A-группой, если она порождается подгруппой A в объединении с некоторым конечным подмножеством $W \subseteq G$. Гомоморфизм $h\colon G_1 \to G_2$ между A-группами G_1 и G_2 называется A-гомоморфизмом, если он $\mathtt{L}_A$-гомоморфизм, т. е. если $h(a) = a$ для всех $a \in A$. Множество A-гомоморфизмов из G_1 в G_2 будем обозначать через $\mathrm{Hom}_A(G_1, G_2)$, а обозначение $\cong_A$ будем использовать для A-изоморфизма. На прямом произведении абелевых A-групп выделенная подгруппа A — это диагональная подгруппа, что следует из теоретико-модельного определения прямого произведения в языке $\mathtt{L}_A$. Напомним, что элементами бесконечного прямого произведения абелевых групп являются векторы, координаты которых могут принимать любые значения из соответствующих сомножителей, а элементами бесконечной прямой суммы абелевых групп являются векторы, которые имеют не более чем конечное число ненулевых координат. По этой причине в категории абелевых A-групп отсутствует общее определение (бесконечных) прямых сумм. В то же время какая бы ни была абелева группа B, рассматривая группу вида $A \oplus B$ как A-группу, всегда будем подразумевать, что выделенная подгруппа A выбрана естественным образом.

При фиксированной группе A все абелевы A-группы образуют квазимногообразие $\mathbf{Q}_A$ в языке $\mathtt{L}_A$. Аксиомами $\mathbf{Q}_A$ являются

(i) тождества абелевых групп;

(ii) константные тождества, вытекающие из соотношений группы A;

(iii) квазитождества вида $\forall\, x\ (a_1 = a_2 \to x = 0)$ для всех $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$.

Обозначим через Θ_A множество квазитождеств выше, $\mathbf{Q}_A = \mathrm{Mod}(\Theta_A)$. Нулевая группа 0 также является группой языка $\mathtt{L}_A$, в ней все константные символы интерпретируются единственным нулевым элементом. Нулевая группа принадлежит квазимногообразию $\mathbf{Q}_A$. Все группы языка $\mathtt{L}_A$ из квазимногообразия $\mathbf{Q}_A$, за исключением нулевой, являются абелевыми A-группами.

Через $\mathbf{Q}_{\oplus A}$ обозначим квазимногообразие абелевых A-групп, в которых выделенная подгруппа A сервантна. Квазимногообразие $\mathbf{Q}_{\oplus A}$ аксиоматизируется с помощью аксиом квазимногообразия $\mathbf{Q}_A$ и

(iv) квазитождеств $\forall\, x\ (nx = a \to x = a)$ для всех неразрешимых в A уравнений $nx = a$, $a \in A$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

В языке $\mathtt{L}_A$ уже не все квазимногообразия оказываются главными, поэтому, как и для случая универсальных классов, нам пригодится следующий критерий.

Теорема 1.14 [4, теорема 1.6.20]. *Для любого нетривиального квазимногообразия $\mathbf{K}$ абелевых A-групп следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathbf{K}$ — *главное квазимногообразие языка* $\mathtt{L}_A$;
2) *любые две ненулевые конечно порождённые A-группы из $\mathbf{K}$ можно A-вложить в некоторую A-группу из $\mathbf{K}$.*

Следствие 1.15. *Внутри квазимногообразия $\mathbf{Q}_{\oplus A}$ все $\mathtt{L}_A$-подквазимногообразия главные.*

Доказательство. Действительно, любая конечно порождённая A-группа G из $\mathbf{Q}_{\oplus A}$ представима в виде $G \cong_A A \oplus C$, где C — конечно порождённая подгруппа группы G. Следовательно, для любой пары ненулевых конечно порождённых A-групп G_1 и G_2 существуют A-вложения каждой из них в прямую сумму $G_1 \oplus G_2$. □

Для любого класса A-групп $\mathbf{K}$ порождённый им универсальный класс (квазимногообразие) в языке $\mathtt{L}_A$ будем обозначать через $\mathbf{Ucl}_A(\mathbf{K})$ (соответственно $\mathbf{Qvar}_A(\mathbf{K})$).

В дальнейшем нам будет полезно иметь обобщение леммы 1.11 на случай A-групп. Следующий результат доказывается с помощью стандартных рассуждений.

Лемма 1.16. *Пусть B — абелева A-группа и C — конечная группа, такие что имеют место неравенства $\gamma_{p,k}(B) \geqslant \gamma_{p,k}(A \oplus C)$, причём $\gamma_{p,k}(A) < \infty$ при $\gamma_{p,k}(C) \neq 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда A-группа $A \oplus C$ A-вкладывается в B.*

1.5. Предварительные алгебро-геометрические сведения

Пусть B — абелева группа, алгебраическую геометрию которой мы хотим изучать. Для этого в первую очередь надо оговорить, в каком языке мы будем это делать. Алгебраическая геометрия над B в языке L называется *бескоэффициентной*. Если A — некоторая подгруппа группы B, то алгебраическая геометрия группы B в языке L_A называется алгебраической геометрией *с коэффициентами в группе* A, а при $A = B$ — *диофантовой* алгебраической геометрией. В качестве множества коэффициентов, как правило, выбирают некоторую сервантную подгруппу. Основные алгебро-геометрические сведения мы излагаем, следуя [4], где дана процедура введения алгебро-геометрических понятий, не зависящая от выбора базового языка. Но при адаптации соответствующих терминов к случаю абелевых групп удобнее выбрать язык L_A в качестве базового (бескоэффициентный случай при этом соответствует нулевой подгруппе: $A = 0$). Именно таким путём пошли авторы первых статей по алгебраической геометрии над группами [14, 26].

Зафиксируем абелеву группу A и абелеву A-группу B. *Уравнением* с коэффициентами в A от переменных из $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ называется любая атомарная формула языка L_A с переменными в X:

$$f\colon m_1x_1 + \ldots + m_nx_n = a, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad a \in A.$$

Уравнение f называется *однородным*, если $a = 0$. Любое множество уравнений S от переменных X есть *система уравнений*, $S = S(x_1, \ldots, x_n)$. Система S, состоящая из однородных уравнений, также называется *однородной*. Точка $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ называется *решением* уравнения f выше, если $m_1b_1 + \ldots + m_nb_n = a$. Множество всех решений уравнения f в B обозначается через $\mathrm{V}_B(f)$. Для системы уравнений S множество решений определяется как $\mathrm{V}_B(S) = \bigcap\limits_{f\in S} \mathrm{V}_B(f)$ и называется *алгебраическим множеством* над B. Если система S однородна, то алгебраическое множество $\mathrm{V}_B(S)$ будем называть *однородным*. Однородные алгебраические множества являются подгруппами группы B^n. Система уравнений S называется *совместной* над B, если $\mathrm{V}_B(S) \neq \varnothing$; в противном случае она *несовместна* над B. Однородная система уравнений всегда совместна, поэтому пустое множество $\varnothing$ является алгебраическим над B тогда и только тогда, когда $A \neq 0$.

Пример 1.17. Рассмотрим уравнение $mx = 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Его решением в группе B является m-слой $B[m]$. Легко видеть, что решением любой однородной системы уравнений от одной переменной x является некоторый m-слой, $m \in \mathbb{N}$.

Две системы уравнений S_1 и S_2 называются *эквивалентными* над B, если $\mathrm{V}_B(S_1) = \mathrm{V}_B(S_2)$. Максимальная система уравнений, эквивалентная данной системе уравнений S, называется её *радикалом* и обозначается через $\mathrm{Rad}_B(S)$.

Для того чтобы наиболее просто адаптировать определение координатной алгебры к категории абелевых групп, заметим, что уравнения можно рассматривать как элементы группы $A\oplus\mathbb{Z}^n$, переписав их в виде $m_1x_1+\ldots+m_nx_n-a = 0$. Тогда $\mathrm{Rad}_B(S)$ — подгруппа группы $A \oplus \mathbb{Z}^n$. Фактор-группа $A \oplus \mathbb{Z}^n/\mathrm{Rad}_B(S)$ называется *координатной группой* системы уравнений S или алгебраического множества $Y = \mathrm{V}_B(S)$ и обозначается через $\Gamma_B(S)$ или $\Gamma(Y)$. Координатную группу $\Gamma(Y)$ непустого алгебраического множества Y также можно представлять как группу линейных функций $f\colon Y \to B$, где

$$f(b_1, \ldots, b_n) = m_1 b_1 + \ldots + m_n b_n - a, \quad (b_1, \ldots, b_n) \in Y,$$

а $m_i \in \mathbb{Z}$ и $a \in A$ — параметры функции f. Заметим, что координатная группа пустого множества — это нулевая группа, а координатная группа непустого алгебраического множества является конечно порождённой A-группой.

Все алгебраические множества над данной абелевой A-группой B образуют категорию $\mathbf{AS}_A(B)$. Морфизмы между алгебраическими множествами $Y \subseteq B^n$ и $Z \subseteq B^m$ — это такие линейные отображения $\varphi = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in \Gamma(Y)$, что $\varphi(Y) \subseteq Z$. Напомним, что морфизм, для которого существует встречный морфизм, называется изоморфизмом.

Пример 1.18. Для любой точки $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ и любого непустого алгебраического множества $\mathrm{V}_B(S) = Y \subseteq B^n$ алгебраическое множество

$$Y+\bar{a} = \{(b_1+a_1, \ldots, b_n+a_n) \mid (b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{V}_B(S)\} = \mathrm{V}_B\big(S(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)\big)$$

изоморфно Y; будем называть $Y + \bar{a}$ *сдвигом* множества Y.

Для любой системы уравнений S через S_h обозначим однородную систему уравнений, состоящую из левых частей системы S. Если $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ — частное решение системы уравнений S, то очевидно, что $\mathrm{V}_B(S) = \mathrm{V}_B(S_h) + \bar{a}$. Заметим, что частное решение не всегда удаётся найти в A^n. Однако, как показывает следующая лемма, об этом можно не беспокоиться в том случае, если подгруппа коэффициентов A является сервантной.

Лемма 1.19. *Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B. Тогда любая совместная над B система уравнений S с коэффициентами в A имеет частное решение, координаты которого лежат в A.*

Доказательство. Пусть $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{V}_B(S)$ и C — подгруппа группы B, порождённая группой A и элементами $b_1, \ldots, b_n$. Тогда подгруппа A в C является сервантной, а фактор-группа C/A — конечно порождённой, следовательно, $C \cong_A A \oplus G$, $G \cong C/A$. Запишем $b_i = a_i + g_i$, $a_i \in A$, $g_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{V}_B(S)$ и $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{V}_B(S_h)$. □

Следствие 1.20. *Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B. Тогда любое непустое алгебраическое множество над B изоморфно некоторому однородному алгебраическому множеству над B, а именно если S — совместная над B система уравнений с коэффициентами в A и переменными в $\{x_1, \ldots, x_n\}$, то существует решение $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ системы S, такое что $\mathrm{V}_B(S) = \mathrm{V}_B(S_h) + \bar{a}$.*

Следствие 1.21. *Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B и Y — непустое алгебраическое множество над B, которое является множеством решений системы уравнений от одной переменной с коэффициентами в A. Тогда Y — некоторый сдвиг некоторого m-слоя: $Y = B[m] + a$, $m \in \mathbb{N}$, $a \in A$.*

Пример 1.22. Пусть α — автоморфизм группы $\mathbb{Z}^n$. Фиксированные порождающие $x_1, \ldots, x_n$ группы $\mathbb{Z}^n$ при автоморфизме α переходят в новые порождающие $y_1 = \alpha(x_1), \ldots, y_n = \alpha(x_n)$. Пусть $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — соответствующая матрица перехода: $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot M$. И пусть $M' = \|m'_{ij}\| \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — матрица перехода от порождающих $y_1, \ldots, y_n$ к порождающим $x_1, \ldots, x_n$: $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \cdot M'$. При этом $M \cdot M' = M' \cdot M = E$. Тогда любое непустое алгебраическое множество $Y = \mathrm{V}_B(S)$, $S = S(x_1, \ldots, x_n)$, изоморфно алгебраическому множеству $Y' = \mathrm{V}_B(S')$, где

$$S'(y_1, \ldots, y_n) = S(m'_{11}y_1 + \ldots + m'_{n1}y_n, \ldots, m'_{1n}y_1 + \ldots + m'_{nn}y_n).$$

Действительно, морфизм $\varphi_\alpha \colon Y \to Y'$ определяется правилом

$$\varphi_\alpha(b_1, \ldots, b_n) = (b_1, \ldots, b_n) \cdot M, \quad (b_1, \ldots, b_n) \in Y,$$

а встречный морфизм $\varphi'_\alpha \colon Y' \to Y$ — правилом

$$\varphi'_\alpha(b_1, \ldots, b_n) = (b_1, \ldots, b_n) \cdot M', \quad (b_1, \ldots, b_n) \in Y'.$$

Отметим, что форма определения встречных морфизмов φ_α и φ'_α универсальна, т. е. не зависит от выбора основной группы B и подгруппы коэффициентов A.

Пример 1.23. Возьмём любое число $m \geqslant 2$. Как отмечалось выше, m-слой $B[m]$ является алгебраическим множеством над B. Запишем m в виде произведения простых множителей: $m = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$. Это представление определяет морфизм $\varphi \colon B[m] \to (B[p_1^{k_1}], \ldots, B[p_s^{k_s}])$ по правилу

$$\varphi(b) = (m/p_1^{k_1}\, b, \ldots, m/p_s^{k_s}\, b), \quad b \in B[m].$$

Встречным для φ будет морфизм $\varphi' \colon (B[p_1^{k_1}], \ldots, B[p_s^{k_s}]) \to B[m]$, определённый как

$$\varphi'(b_1, \ldots, b_s) = q_1 b_1 + \ldots + q_s b_s, \quad (b_1, \ldots, b_s) \in (B[p_1^{k_1}], \ldots, B[p_s^{k_s}]),$$

где $q_1, \ldots, q_s$ — коэффициенты в соотношении Безу:

$$1 = q_1 \cdot (m/p_1^{k_1}) + \ldots + q_s \cdot (m/p_s^{k_s}).$$

Таким образом, алгебраические множества $B[m]$ и $(B[p_1^{k_1}], \ldots, B[p_s^{k_s}])$ изоморфны. В свою очередь, $(B[p_1^{k_1}], \ldots, B[p_s^{k_s}])$ изоморфно аналогичному множеству, в котором нет компонент $B[p_i^{k_i}]$, равных 0, и в остальных случаях $B[p_i^{k_i}]$ заменяется на $B[\min\{p_i^{k_i}, e_p(B)\}]$.

Все координатные группы алгебраических множеств над B также образуют категорию $\mathbf{CA}_A(B)$, морфизмы в которой — A-гомоморфизмы. Если пустое множество $\varnothing$ лежит в $\mathbf{AS}_A(B)$, то оно является универсально отталкивающим объектом, а если нулевая группа 0 лежит в $\mathbf{CA}_A(B)$, то она универсально притягивающий объект.

Основной задачей алгебраической геометрии над группой B является задача классификации всех алгебраических множеств над B с точностью до изоморфизма. С помощью следующей теоремы эта задача сводится к задаче классификации координатных групп алгебраических множеств над B.

Теорема 1.24 [4, теорема 2.3.5]. *В обозначениях выше категории* $\mathbf{AS}_A(B)$ *и* $\mathbf{CA}_A(B)$ *дуально эквивалентны.*

Следствие 1.25 [4, следствие 2.3.6]. *Алгебраические множества* $Y, Z \in \mathbf{AS}_A(B)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $\Gamma(Y) \cong_A \Gamma(Z)$.

Зная этот результат, мы можем, классифицировав координатные группы алгебраических множеств над B, восстановить сами алгебраические множества с точностью до изоморфизма. Для этого полезна следующая лемма.

Лемма 1.26 [4, лемма 2.1.16]. *Пусть* $Y \subseteq B^n$ *— непустое алгебраическое множество над абелевой* A*-группой* B. *Тогда точки алгебраического множества* Y *находятся во взаимно-однозначном соответствии с* A*-гомоморфизмами из* $\mathrm{Hom}_A(\Gamma(Y), B)$.

Доказательство. Действительно, запишем координатную группу $\Gamma(Y)$ алгебраического множества $Y = \mathrm{V}_B(S)$ с помощью множеств порождающих элементов и определяющих соотношений:

$$\Gamma(Y) = \langle \{x_1, \ldots, x_n\} \cup A \mid \mathrm{Rad}_B(S) \rangle.$$

Точка $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ принадлежит Y тогда и только тогда, когда она является решением всех уравнений $f \in \mathrm{Rad}_B(S)$, что равносильно тому, что отображение $x_i \to b_i$, $i = 1, \ldots, n$, корректно продолжается до A-гомоморфизма $\Gamma(Y) \to B$. $\square$

В универсальной алгебраической геометрии выделяют несколько особых классов алгебраических систем, в которых объекты обладают теми или иными хорошими алгебро-геометрическими свойствами. Среди них самые важные следующие: класс нётеровых по уравнениям алгебраических систем, класс эквациональных областей, класс эквациональных кообластей. Дадим соответствующие определения применительно к категории абелевых групп.

Говорят, что абелева A-группа B *нётерова по* A*-уравнениям*, если для любого конечного множества X и любой системы уравнений S с коэффициентами из A и переменными из X найдётся такая конечная подсистема $S_0 \subseteq S$, что $\mathrm{V}_B(S_0) = \mathrm{V}_B(S)$.

Лемма 1.27. *Для любой абелевой группы* A *все абелевы* A*-группы нётеровы по* A*-уравнениям, причём для любой системы уравнений* S *с коэффициентами в* A *существует конечная подсистема* $S_0 \subseteq S$*, которая эквивалентна* S *над любой абелевой* A*-группой* B.

Доказательство. В действительности результат выше следует из нётеровости конечно порождённого свободного модуля над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Тем не менее нам удобно дать прямое доказательство леммы, потому что в нём воспроизводится процедура, подобная алгоритму Гаусса, которая будет полезна далее.

Итак, пусть $S = S(x_1, \dots, x_n)$ — система уравнений с коэффициентами в A. Обозначим через I идеал кольца $\mathbb{Z}$, порождённый коэффициентами при переменной x_1 в уравнениях системы S. При необходимости перенумеровав переменные, можно считать, что $I \neq 0$. Идеал I является главным, т. е. порождается некоторым элементом $k \in \mathbb{Z}$, причём $k = k_1 m_1 + \ldots + k_s m_s$, где $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$, а $m_1, \dots, m_s$ — коэффициенты при переменной x_1 в некоторых уравнениях $f_1, \dots, f_s$ из S. Следовательно, по системе уравнений S можно записать эквивалентную систему уравнений S_1, в которой ровно одно уравнение $f = k_1 f_1 + \ldots + k_s f_s$ имеет ненулевой коэффициент при x_1, а именно k. Затем обозначим через J идеал кольца $\mathbb{Z}$, порождённый коэффициентами при переменной x_2 в уравнениях системы $S_1 \setminus \{f\}$. Повторяя проведённые рассуждения, в конце концов получим конечную систему уравнений S_t, эквивалентную S и записанную в треугольной или трапециевидной форме или же являющуюся несовместной системой. На каждом шаге уравнения системы S_{i+1} — это $\mathbb{Z}$-линейные комбинации уравнений системы S_i. Таким образом, найдётся конечная подсистема $S_0 \subseteq S$, такая что все уравнения системы S_t являются $\mathbb{Z}$-линейными комбинациями уравнений из S_0. Следовательно, S_0 эквивалентна S. □

Абелева A-группа B называется *A-эквациональной областью*, если для любого конечного множества X и любых систем уравнений S_1, S_2 с переменными в X и коэффициентами в A множество $\mathrm{V}_B(S_1) \cup \mathrm{V}_B(S_2)$ является алгебраическим над B.

Лемма 1.28. *Никакая нетривиальная абелева A-группа B не является A-эквациональной областью.*

Доказательство. Согласно [4, предложение 4.2.12] группа B является A-эквациональной областью тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему (бесконечному) универсальному предложению, записанному в мультипликативном языке $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$:

$$\forall x \; \forall y \; \Big(\bigwedge_{a \in A} [x, a^{-1} y a] = 1 \longleftrightarrow (x = 1 \vee y = 1) \Big).$$

Отсюда следует, что в категории абелевых групп нетривиальных эквациональных областей быть не может. □

Понятие эквациональной кообласти является двойственным к понятию эквациональной области. В категории абелевых групп эквациональных кообластей, в отличие от эквациональных областей, много, и они будут классифицированы в разделе 3.6.

Абелева A-группа B называется *A-эквациональной кообластью*, если для любого числа $n \in \mathbb{Z}^+$ никакое конечное собственное объединение $Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ алгебраических множеств $Y_1, \dots, Y_m \subset B^n$ над B не является алгебраическим над B. «Собственное объединение» означает, что $Y_1 \cup \ldots \cup Y_m \nsubseteq Y_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Отметим, что к понятию эквациональной кообласти близко понятие дискриминирующей алгебраической системы. Дискриминирующие алгебраические системы, в частности в классе абелевых групп, выступили объектом изучения в [15]. Все дискриминирующие алгебраические системы являются эквациональными кообластями, но последних значительно больше, кроме того, именно они представляют интерес с точки зрения алгебраической геометрии.

Эквациональные кообласти характеризуются тем, что в них все непустые алгебраические множества неприводимы. Напомним определение неприводимости. Стандартный путь определения неприводимости проходит через задание топологии Зариского, но мы поступим проще и определим неприводимые множества посредством следующего критерия [4, лемма 2.2.4]: непустое алгебраическое множество $Y \subseteq B^n$ является *неприводимым* тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде конечного объединения собственных алгебраических подмножеств. Всякое алгебраическое множество может быть либо неприводимым, либо приводимым, либо пустым. Изоморфные алгебраические множества одновременно неприводимы, приводимы или пусты [4, следствие 2.3.7]. Изучение и классификация неприводимых алгебраических множеств, а также их координатных алгебр — это важная задача в алгебраической геометрии, особенно при наличии нётеровости по уравнениям. С учётом леммы 1.27 в категории абелевых групп формулировка теоремы о разложении алгебраических множеств в объединение неприводимых будет иметь следующий вид.

Теорема 1.29 [4, следствие 2.5.6]. *Пусть B — абелева A-группа и Y — непустое алгебраическое множество над B. Тогда Y представимо в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств (неприводимых компонент):*

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m,$$

причём при условии, что $Y_i \nsubseteq Y_j$ для всех $i \neq j$, это разложение единственно с точностью до перестановки неприводимых компонент.

Итак, для данной абелевой A-группы B задача исследования алгебраических множеств над B (всех и отдельно неприводимых), а также их координатных групп является важнейшей алгебро-геометрической задачей над B. Но, разумеется, она не является единственной проблемой в алгебраической геометрии над абелевыми группами.

Другой важной задачей является сравнение различных абелевых групп с точки зрения их алгебро-геометрических свойств. С этой целью Б. И. Плоткиным было введено понятие геометрической эквивалентности [28].

Две абелевы A-группы B_1 и B_2 называются *геометрически эквивалентными* над A, если для любого конечного множества X и любой системы уравнений S с коэффициентами в A от переменных X имеет место равенство $\mathrm{Rad}_{B_1}(S) = \mathrm{Rad}_{B_2}(S)$.

Таким образом, классификация абелевых A-групп с точностью до геометрической эквивалентности также является важной задачей алгебраической геометрии над абелевыми группами. Однако в [4] показано, что геометрическая эквивалентность не всегда и не в полной мере отражает алгебро-геометрическое родство между группами. Например, в категории абелевых групп демонстрацией этого может служить то, что для любой абелевой группы, которая не является эквациональной кообластью, можно найти геометрически эквивалентную пару, которая будет эквациональной кообластью. Геометрическая эквивалентность оставляет свободу для соответствующих друг другу алгебраических множеств быть неприводимыми, приводимыми или пустыми. С целью усиления алгебро-геометрических связей в [4] предлагается дополнительное понятие универсальной геометрической эквивалентности.

Две абелевы A-группы B_1 и B_2 называются *универсально геометрически эквивалентными* над A, если они геометрически эквивалентны и для любого конечного множества X и любой системы уравнений S с коэффициентами в A от переменных X алгебраическое множество $\mathrm{V}_{B_1}(S)$ неприводимо в том и только том случае, если неприводимо $\mathrm{V}_{B_2}(S)$.

Лемма 1.30 [4, утверждение 5.2.10]. *Пусть B_1 и B_2 — абелевы A-группы, универсально геометрически эквивалентные над A. Тогда B_1 является A-эквациональной кообластью тогда и только тогда, когда B_2 — A-эквациональная кообласть.*

О том, как решаются все описанные в этом разделе алгебро-геометрические проблемы в категории абелевых групп, будет рассказано в разделе 3. Там же будут описаны эквациональные кообласти среди абелевых групп. При решении этих задач существенную роль играют понятия аппроксимируемости и дискриминируемости.

1.6. Аппроксимируемость и дискриминируемость

Пусть $\mathbf{K}$ — некоторый класс абелевых групп и G — абелева группа. Говорят, что G *аппроксимируется* классом $\mathbf{K}$, если для любого ненулевого элемента $g \in G$ найдутся такая группа $B \in \mathbf{K}$ и такой гомоморфизм $h\colon G \to B$, что $h(g) \neq 0$. Если для любого конечного набора ненулевых элементов $g_1, \ldots, g_m \in G$ существуют такие $B \in \mathbf{K}$ и $h\colon G \to B$, что $h(g_i) \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$, то говорят, что группа G *дискриминируется* классом $\mathbf{K}$. Если все конечно порождённые подгруппы группы G аппроксимируются (дискриминируются) классом $\mathbf{K}$, то говорят, что G *локально аппроксимируется* (соответственно *локально дискриминируется*) классом $\mathbf{K}$. Класс всех групп, аппроксимируемых (дискриминируемых) классом $\mathbf{K}$ будем обозначать через $\mathbf{Res}(\mathbf{K})$ (соответственно через $\mathbf{Dis}(\mathbf{K})$). Класс всех групп, локально аппроксимируемых (локально дискриминируемых) классом $\mathbf{K}$ будем обозначать через $\mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Res}(\mathbf{K})$ (соответственно через $\mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Dis}(\mathbf{K})$). Если класс $\mathbf{K}$ состоит из одной группы, $\mathbf{K} = \{B\}$, то говорят просто, что G (локально) аппроксимируется или дискриминируется группой B. Аналогичные определения также можно дать для языка L_A и A-групп; в этом случае будем говорить об A-аппроксимируемости и A-дискриминируемости, а в обозначении соответствующих классов будем использовать нижний индекс A. По определению нулевая группа в любом случае принадлежит классам $\mathbf{Res}(\mathbf{K})$, $\mathbf{Res}_A(\mathbf{K})$, $\mathbf{Dis}(\mathbf{K})$, а классу $\mathbf{Dis}_A(\mathbf{K})$ она принадлежит лишь при условии $A = 0$.

Пример 1.31. Группа $\mathbb{Z}^2$ $\mathbb{Z}$-дискриминируется группой $\mathbb{Z}$. Действительно, любой $\mathbb{Z}$-гомоморфизм $h_x\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ однозначно определяется параметром $x \in \mathbb{Z}$: $h_x(k_1, k_2) = xk_1 + (1-x)k_2$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Следовательно, для любого набора ненулевых элементов $(k_1^1, k_2^1), \ldots, (k_1^m, k_2^m) \in \mathbb{Z}^2$ достаточно найти параметр $x \in \mathbb{Z}$, при котором $F(x) = \prod\limits_{i=1}^{m}(xk_1 + (1-x)k_2) \neq 0$, что всегда можно сделать. Далее индукцией по k доказывается, что группа $\mathbb{Z}^k$ $\mathbb{Z}$-дискриминируется группой $\mathbb{Z}$ для любого числа $k \in \mathbb{Z}^+$.

Предложение 1.32. *Пусть A — абелева группа. Для любого класса абелевых A-групп $\mathbf{K}$ верно, что*

$$\mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Res}_A(\mathbf{K}) = \mathbf{Qvar}_A(\mathbf{K}), \quad \mathbf{Res}_A(\mathbf{K})_\omega = \mathbf{Qvar}_A(\mathbf{K})_\omega,$$
$$\mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Dis}_A(\mathbf{K}) = \mathbf{Ucl}_A(\mathbf{K}), \qquad \mathbf{Dis}_A(\mathbf{K})_\omega = \mathbf{Ucl}_A(\mathbf{K})_\omega.$$

Доказательство. Понятно, что в обеих строчках вторые равенства следуют из первых. Для обоснования первых равенств сошлёмся на [4, утверждение 1.6.5]. Там показано, что абелева A-группа B принадлежит классу $\mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Res}_A(\mathbf{K})$ тогда и только тогда, когда для любых конечного множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множества атомарных формул $S \cup \{f\}$ языка L_A с переменными из X из истинности во всех A-группах из $\mathbf{K}$ (бесконечного) квазитождества

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \left(\bigwedge_{s \in S} s(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

следует его истинность в B. По лемме 1.27 получаем, что множество S всегда можно считать конечным, поэтому условие $B \in \mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Res}_A(\mathbf{K})$ равносильно тому, что $B \in \mathbf{Qvar}_A(\mathbf{K})$.

Аналогично ненулевая абелева A-группа B принадлежит классу $\mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Dis}_A(\mathbf{K})$ тогда и только тогда, когда для любых конечного множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множества атомарных формул $S \cup \{f_1, \ldots, f_m\}$ языка L_A с переменными из X из истинности во всех A-группах из $\mathbf{K}$ (бесконечного) универсального предложения

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \left(\bigwedge_{s \in S} s(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} f_i(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

следует его истинность в B. Любое универсальное предложение в классе ненулевых абелевых A-групп эквивалентно конечной конъюнкции (конечных) универсальных предложений такого вида, как выше. Кроме того, нулевая группа одновременно принадлежит или не принадлежит классам $\mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Dis}_A(\mathbf{K})$ и $\mathbf{Ucl}_A(\mathbf{K})$ в зависимости от того, является A нулевой группой или нет. Таким образом, по лемме 1.27 вновь приходим к требуемому равенству $\mathbf{L}_{\mathrm{fg}}\mathbf{Dis}_A(\mathbf{K}) = \mathbf{Ucl}_A(\mathbf{K})$. □

Лемма 1.33. *Пусть C — абелева A-группа, A-дискриминируемая с помощью абелевой A-группы B бесконечного периода. Тогда A-группа $C \oplus \mathbb{Z}^k$ A-дискриминируется A-группой B для любого числа $k \in \mathbb{Z}^+$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $C \oplus \mathbb{Z}$ A-дискриминируется с помощью B. Возьмём ненулевые элементы $c_1 + k_1, \ldots, c_m + k_m$, $c_i \in C$, $k_i \in \mathbb{Z}$, и найдём такой A-гомоморфизм $h\colon C \to B$, что $b_i = h(c_i) \neq 0$ для всех $c_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Теперь определим A-гомоморфизм $h_b\colon C \oplus \mathbb{Z} \to B$ по правилу $h_b(c + k) = h(c) + kb$, $c \in C$, $k \in \mathbb{Z}$, $b \in B$. Если порядки элементов $b_1, \ldots, b_m$ ограниченны, то в качестве b возьмём элемент достаточно большого порядка, чтобы выполнялись неравенства $k_i b \neq -b_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Если для некоторого $i = 1, \ldots, m$ элемент b_i имеет бесконечный порядок, то положим $b = tb_i$, где t — достаточно большое натуральное число. □

Лемма 1.34. *Пусть A — абелева группа и C — такая конечная группа, что для всех $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$ из $\gamma_{p,k}(C) \neq 0$ следует $\gamma_{p,k}(A) = \infty$. Тогда A-группа $A \oplus C$ A-дискриминируется группой A.*

Доказательство. По условию в группе A существует бесконечно много конечных подгрупп, изоморфных C. Это позволяет для любого конечного набора W ненулевых элементов из $A \oplus C$ подобрать A-гомоморфизм из $A \oplus C$ в A, переводящий элементы из W в ненулевые элементы из A. □

Лемма 1.35. *Пусть B — абелева A-группа и C — конечно порождённая A-группа, в которой подгруппа A сервантна. Пусть имеют место неравенства $\delta(B) \geqslant \delta(C)$ и $\gamma_{p,k}(B) \geqslant \gamma_{p,k}(C)$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда A-группа C A-дискриминируется A-группой B.*

Доказательство. По условию $C = A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа. Запишем $G = \mathbb{Z}^k \oplus T(G)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $C = A \oplus T(G) \oplus \mathbb{Z}^k$. Если $k \neq 0$, то $\delta(C) = 1$, следовательно, $\delta(B) = 1$, значит, B имеет бесконечный период. Поэтому согласно лемме 1.33 достаточно проверить, что A-группа $A \oplus T(G)$ A-дискриминируется группой B.

Конечную группу $T(G)$ предста́вим в виде прямой суммы двух конечных групп, $T(G) = C_1 \oplus C_2$, в которой в первое слагаемое входят в точности все прямые суммы циклических $C(p^k)$ из $T(G)$, для которых $\gamma_{p,k}(A) = \infty$. Тогда в силу леммы 1.34 группа $A \oplus T(G)$ $A \oplus C_2$-дискриминируется группой $A \oplus C_2$, а в силу леммы 1.16 A-группа $A \oplus C_2$ A-вкладывается в B. □

1.7. Базовые вспомогательные алгебро-геометрические результаты

Теперь приведём формулировки тех результатов монографии [4], с помощью которых удобно искать решения алгебро-геометрических задач в классе абелевых групп.

Первые две теоремы помогают классифицировать координатные группы.

Теорема 1.36 [4, теорема 2.5.22]. *Пусть B — абелева A-группа. Тогда для любой конечно порождённой A-группы C следующие условия эквивалентны*:

1) *C является координатной группой некоторого алгебраического множества над B, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A*;
2) $C \in \mathbf{Qvar}_A(B)$;
3) *C A-аппроксимируется группой B.*

Теорема 1.37 [4, теорема 2.5.21]. *Пусть B — абелева A-группа. Тогда для любой ненулевой конечно порождённой A-группы C следующие условия эквивалентны*:

1) *C является координатной группой некоторого неприводимого алгебраического множества над B, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A*;
2) $C \in \mathbf{Ucl}_A(B)$;
3) *C A-дискриминируется группой B.*

Следующие три теоремы необходимы для классифицирования абелевых групп по отношению (универсальной) геометрической эквивалентности.

Теорема 1.38 [4, теорема 5.1.12]. *Пусть B_1 и B_2 — абелевы A-группы. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *B_1 и B_2 геометрически эквивалентны над A*;
2) *B_1 и B_2 квазиэквационально эквивалентны в языке $\mathtt{L}_A$, т. е.*
$$\mathbf{Qvar}_A(B_1) = \mathbf{Qvar}_A(B_2);$$
3) *B_1 и B_2 локально A-аппроксимируют друг друга.*

Теорема 1.39 [4, теорема 5.2.17]. *Пусть B_1 и B_2 — абелевы A-группы. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *B_1 и B_2 универсально геометрически эквивалентны над A*;
2) *B_1 и B_2 универсально эквивалентны в языке $\mathtt{L}_A$, т. е.*
$$\mathbf{Ucl}_A(B_1) = \mathbf{Ucl}_A(B_2);$$
3) *B_1 и B_2 локально A-дискриминируют друг друга.*

Теорема 1.40 [4, теорема 5.2.32]. *Пусть B_1 и B_2 — абелевы A-группы, являющиеся A-эквациональными кообластями. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *B_1 и B_2 геометрически эквивалентны над A*;
2) *B_1 и B_2 универсально геометрически эквивалентны над A.*

Далее приводятся результаты, которые помогут дать описание эквациональных кообластей в классе абелевых групп.

Теорема 1.41. *Пусть B — абелева A-группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *B является A-эквациональной кообластью*;
2) *$B \oplus B$ локально A-дискриминируется группой B*;
3) *любая ненулевая конечно порождённая A-группа из $\mathbf{Qvar}_A(B)$ принадлежит $\mathbf{Ucl}_A(B)$.*

Доказательство. Результат следует из теоремы 4.3.2, предложений 4.3.8 и 4.3.9 монографии [4] и леммы 1.27 о нётеровости по уравнениям всех абелевых групп. □

Лемма 1.42 [4, следствие 4.3.4]. *Пусть B — абелева A-группа, которая является A-эквациональной кообластью. Тогда B — A'-эквациональная кообласть для любой подгруппы $A' \leqslant A$.*

1.8. Понятие Dis-предела

Пусть A — абелева группа и B — абелева A-группа. При решении задач алгебраической геометрии над B с коэффициентами в A бывает полезно иметь так называемое хранилище координатных групп над B, т. е. такую A-группу $\mathrm{C}_A(B)$, в которую A-вкладываются координатные группы всех непустых алгебраических множеств над B и которая не содержит конечно порождённых A-подгрупп, отличных от координатных групп над B. Согласно [4, следствие 2.1.22, предложение 2.4.4] такая группа $\mathrm{C}_A(B)$ всегда существует, достаточно взять подходящую прямую степень B, а именно $\mathrm{C}_A(B) = B^I$, где $|I| = \max\{|B|, \omega\}$.

Но зачастую получается так, что задача описания координатных групп неприводимых алгебраических множеств (*неприводимых координатных групп*) важнее и содержательнее, чем задача описания всех координатных групп, поэтому удобно иметь также хранилище неприводимых координатных групп над B.

Абелева A-группа, в которую A-вкладываются все неприводимые координатные группы над B и которая не содержит конечно порождённых A-подгрупп, отличных от неприводимых координатных групп над B, называется $\mathbf{Dis}_A$-*пределом* для B (будем обозначать его через $\mathrm{IC}_A(B)$).

Согласно [4, утверждение 2.6.2] $\mathbf{Dis}_A$-предел существует для любой абелевой A-группы B, кроме того, он единствен с точностью до универсальной геометрической эквивалентности над A [4, утверждение 5.2.9], в частности, он наследует от B многие свойства, в числе которых свойство быть эквациональной кообластью. Описание $\mathbf{Dis}$-пределов абелевых групп будет дано в разделе 3.7.

Здесь необходимо упомянуть о том, что впервые проблема поиска $\mathbf{Dis}$-предела была сформулирована в [14] для случая групп. Для свободной группы F в роли $\mathbf{Dis}_F$-предела $\mathrm{IC}_F(F)$ выступает свободная $\mathbb{Z}[x]$-группа Линдона $F^{\mathbb{Z}[x]}$, понятность структуры которой даёт прекрасные возможности для проведения необходимых алгебро-геометрических исследований в свободной группе F [22—25].

2. Универсальные классы и квазимногообразия абелевых групп

Результаты, перечисленные в разделе 1.7, наглядно показывают, что решения алгебро-геометрических задач в классе абелевых групп сводится к проблемам описания квазимногообразий и главных универсальных классов. Начнём с описания этих классов в бескоэффициентном языке $\mathtt{L} = \{+, -, 0\}$.

В этом разделе мы покажем, как решаются следующие задачи:

1) как классифицируются квазимногообразия и главные универсальные классы внутри многообразия абелевых групп $\mathbf{A}$;
2) как они аксиоматизируются;
3) что выступает критерием того, что две данные абелевы группа A и B
   а) квазиэквационально эквивалентны;
   б) универсально эквивалентны.

Случай квазимногообразий описан в статье А. А. Виноградова [1]. Результаты этой статьи мы приводим с незначительными изменениями в формулировках и доказательствах. Случай универсальных классов исследован в статьях П. Эклофа [19] и А. А. Мищенко, В. Н. Ремесленникова, А. В. Трейера [9]. Эти результаты сложнее, и мы их приводим здесь, следуя [9], но существенно перестраивая структуру данной статьи.

Все универсальные классы, в том числе квазимногообразия, однозначно определяются конечно порождёнными группами, которые в них входят. При этом оказывается, что можно не рассматривать все конечно порождённые группы, а выделить подходящие базовые подмножества, которых будет достаточно для однозначного определения универсального класса или квазимногообразия. С этой целью введём обозначения для следующих множеств конечно порождённых абелевых групп:

$$\mathcal{Q} = \{\mathbb{Z},\, C(p^k) \mid p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+\},$$
$$\mathcal{U} = \{\mathbb{Z},\, C^{m_1}(p) \oplus \ldots \oplus C^{m_k}(p^k) \mid p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+,\ m_i \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{F} = \text{множество всех конечных абелевых групп.}$$

Через $\mathcal{F}(A)$ обозначим множество конечных абелевых групп, которые вкладываются в данную абелеву группу A, и положим

$$\mathcal{Q}(A) = \mathcal{Q} \cap \mathcal{F}(A),$$
$$\mathcal{U}(A) = \mathcal{U} \cap \mathcal{F}(A).$$

Условие вхождения бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ в главный универсальный класс или квазимногообразие выражается в следующей лемме.

Лемма 2.1. *Для любой абелевой группы A следующие условия эквивалентны:*

1) $\delta(A) = 1$;

2) $\mathbb{Z} \in \mathbf{Ucl}(A)$;
3) $\mathbb{Z} \in \mathbf{Qvar}(A)$.

Доказательство. Пусть $\delta(A) = 1$. Тогда для любых ненулевых элементов $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ существует такой элемент $a \in A$, что $ma \neq 0$, где $m = \text{НОК}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Следовательно, гомоморфизм $h\colon \mathbb{Z} \to A$, заданный правилом $h(1) = a$, переводит все элементы $x_1, \ldots, x_n$ в ненулевые элементы из A. Тем самым показано, что $\mathbb{Z}$ дискриминируется с помощью A, следовательно, $\mathbb{Z} \in \mathbf{Ucl}(A) \subseteq \mathbf{Qvar}(A)$. Пусть теперь $\mathbb{Z} \in \mathbf{Qvar}(A)$. Тогда все тождества τ_m, $m \in \mathbb{Z}^+$, должны быть ложны в группе A, стало быть, $\delta(A) = 1$. $\square$

Вхождение конечных групп в главные универсальные классы и квазимногообразия определяется апофатическими условиями.

Лемма 2.2. *Для любых абелевой группы A и чисел $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ следующие условия эквивалентны:*

1) *A не удовлетворяет квазитождеству*
$$\pi_{p,k} = \forall\, x\ (p^k x = 0 \longrightarrow p^{k-1} x = 0);$$
2) *конечная группа $C(p^k)$ вкладывается в A, т. е. $C(p^k) \in \mathcal{Q}(A)$;*
3) *$e_p(A) \geqslant p^k$;*
4) *$C(p^k) \in \mathbf{Qvar}(A)$.*

Доказательство. Первые три условия эквивалентны друг другу, поскольку в равной степени означают наличие в группе A ненулевого элемента порядка p^k. Также тривиальны импликации 2) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 1). $\square$

Лемма 2.3. *Для любой конечной абелевой группы C существует универсальное предложение υ_C языка* L, *такое что для любой абелевой группы A следующие условия эквивалентны:*

1) *$A \not\models \upsilon_C$;*
2) *C вкладывается в A;*
3) *$C \in \mathbf{Ucl}(A)$.*

Доказательство. Лемма доказывается аналогично предыдущей. Условие, что C вкладывается в A, записывается с помощью экзистенциальной формулы, отрицание которой и есть искомое универсальное предложение υ_C. $\square$

2.1. Квазимногообразия в языке L

В этом разделе будет изложена часть материала статьи А. А. Виноградова [1], связанная с классификацией квазимногообразий абелевых групп.

Лемма 2.4. *Для любых абелевых групп A и B следующие условия эквивалентны:*

1) *$B \in \mathbf{Qvar}(A)$;*

2) *$e(B) \leqslant e(A)$ и $e_p(B) \leqslant e_p(A)$ для всех простых чисел p;*
3) *$\delta(B) \leqslant \delta(A)$ и $\mathcal{Q}(B) \subseteq \mathcal{Q}(A)$.*

Доказательство. Пусть $B \in \mathbf{Qvar}(A)$. Если $e(A) = \infty$, то неравенства $e(B) \leqslant e(A)$ и $\delta(B) \leqslant \delta(A)$ тривиальны. Если $e(A) < \infty$, то $A \models \tau_{e(A)}$. Следовательно, $B \models \tau_{e(A)}$, а значит, $e(B) \leqslant e(A)$ и $\delta(B) = \delta(A) = 0$. Неравенства $e_p(B) \leqslant e_p(A)$ для всех простых чисел p и включение $\mathcal{Q}(B) \subseteq \mathcal{Q}(A)$ следуют из леммы 2.2. Оттуда же следует импликация 2) $\Longrightarrow$ 3).

Теперь предположим, что $\delta(B) \leqslant \delta(A)$ и $\mathcal{Q}(B) \subseteq \mathcal{Q}(A)$. Для доказательства включения $B \in \mathbf{Qvar}(A)$ достаточно проверить, что любая конечно порождённая подгруппа $C \leqslant B$ принадлежит $\mathbf{Qvar}(A)$. Запишем примарное разложение группы C: $C \cong C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, где $C_i \in \mathcal{Q}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда условие $C \in \mathbf{Qvar}(A)$ равносильно тому, что $C_i \in \mathbf{Qvar}(A)$ для всех $i = 1, \ldots, n$, поэтому, ссылаясь на лемму 2.1, получаем требуемое. $\square$

Теорема 2.5. *Для любых абелевых групп A и B следующие условия эквивалентны:*

1) *A и B квазиэквационально эквивалентны, т. е. $\mathbf{Qvar}(A) = \mathbf{Qvar}(B)$;*
2) *$e(A) = e(B)$ и $e_p(A) = e_p(B)$ для всех простых чисел p;*
3) *$\delta(A) = \delta(B)$ и $\mathcal{Q}(A) = \mathcal{Q}(B)$.*

Доказательство. Так как квазиэквациональная эквивалентность A и B равносильна тому, что $A \in \mathbf{Qvar}(B)$ и $B \in \mathbf{Qvar}(A)$, то требуемое следует из леммы 2.4. $\square$

Отметим, что в [1] нет в явном виде второго пункта формулировки теоремы выше, но он прямо следует из данного там доказательства. В явном виде, согласно лекциям Б. И. Плоткина [27, лекция 3, предложение 4], это утверждение было сформулировано в неопубликованный работе А. Берзиньша.

Следствие 2.6. *Абелевы группы A и B квазиэквационально эквивалентны тогда и только тогда, когда $\delta(A) = \delta(B)$ и $T_p(A) \equiv_{\mathrm{qi}} T_p(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$.*

Следствие 2.7. *Пусть A и B — абелевы группы из квазимногообразия $\mathbf{Q}_p$ для некоторого простого числа p. Тогда они квазиэквационально эквивалентны в том и только том случае, если $e(A) = e(B)$ и $e_p(A) = e_p(B)$.*

С помощью теоремы 2.5 сразу получается и классификация квазимногообразий абелевых групп, и их аксиоматизация. Напомним, что любое квазимногообразие групп является главным. Для квазимногообразия абелевых групп $\mathbf{K}$ будем использовать обозначения $\delta(\mathbf{K})$, $e(\mathbf{K})$, $e_p(\mathbf{K})$, $p \in \mathcal{P}$, равные $\delta(A)$, $e(A)$, $e_p(A)$ соответственно для любой абелевой группы A, такой что $\mathbf{K} = \mathbf{Qvar}(A)$. Эти определения корректны в силу теоремы 2.5.

Лемма 2.8. *Пусть $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — квазимногообразия абелевых групп. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2$;*
2) *$e(\mathbf{K}_1) \leqslant e(\mathbf{K}_2)$ и $e_p(\mathbf{K}_1) \leqslant e_p(\mathbf{K}_2)$ для всех простых чисел p;*

3) $\mathbf{K}_1 \cap \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{K}_2 \cap \mathcal{Q}$.

Доказательство. Результат следует из лемм 2.1 и 2.4. □

Следствие 2.9. *Если $\mathbf{K}$ — некоторое квазимногообразие абелевых групп и $A \in \mathbf{K}$, то $\delta(A) \leqslant \delta(\mathbf{K})$, $e(A) \leqslant e(\mathbf{K})$, $e_p(A) \leqslant e_p(\mathbf{K})$, $p \in \mathcal{P}$.*

Следствие 2.10. *Пусть $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — квазимногообразия абелевых групп. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2$;
2) $e(\mathbf{K}_1) = e(\mathbf{K}_2)$ *и* $e_p(\mathbf{K}_1) = e_p(\mathbf{K}_2)$ *для всех простых чисел* p;
3) $\mathbf{K}_1 \cap \mathcal{Q} = \mathbf{K}_2 \cap \mathcal{Q}$.

Завершая этот раздел, покажем, как аксиоматизируются квазимногообразия абелевых групп.

Предложение 2.11. *Пусть $\mathbf{K}$ — квазимногообразие абелевых групп.*

1. *Если $e(\mathbf{K}) < \infty$, то $\mathbf{K}$ является многообразием, порождённым тождеством $\tau_{e(\mathbf{K})}$.*
2. *Если $e(\mathbf{K}) = \infty$, то аксиомами для $\mathbf{K}$ являются квазитождества $\pi_{p,k+1}$ для всех простых чисел p, при которых $e_p(\mathbf{K}) = p^k < \infty$, и $k \in \mathbb{Z}^+$.*

Доказательство. Пусть $e(\mathbf{K}) < \infty$. Тождество $\tau_{e(\mathbf{K})}$ справедливо в $\mathbf{K}$, следовательно, для любого делителя p^k числа́ $e(\mathbf{K})$, $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, циклическая группа $C(p^k)$ принадлежит $\mathbf{K}$. Пусть $\mathbf{K}_1$ — абелево многообразие, порождённое тождеством $\tau_{e(\mathbf{K})}$. Тогда $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}_1$. В другую сторону, пусть C — конечно порождённая абелева группа из $\mathbf{K}_1$. Тогда C — конечная группа, причём порядок любого её элемента делит число $e(\mathbf{K})$, следовательно, все циклические p-подгруппы группы C принадлежат квазимногообразию $\mathbf{K}$, откуда получаем, что $C \in \mathbf{K}$. Таким образом, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1$.

Пусть теперь $e(\mathbf{K}) = \infty$ и $\mathbf{K}_2$ — квазимногообразие, порождённое квазитождествами $\pi_{p,k+1}$ для всех простых чисел p, при которых $e_p(\mathbf{K}) = p^k < \infty$, и $k \in \mathbb{Z}^+$. Ясно, что в этом случае $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}_2$. Также легко проверяется, что $\mathbf{K} \cap \mathcal{Q} \supseteq \mathbf{K}_2 \cap \mathcal{Q}$, следовательно, $\mathbf{K} \cap \mathcal{Q} = \mathbf{K}_2 \cap \mathcal{Q}$, поэтому согласно следствию 2.10 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_2$. □

2.2. Главные универсальные классы в языке L

В этом разделе речь пойдёт о результатах статей П. Эклофа [19] и А. А. Мищенко, В. Н. Ремесленникова, А. В. Трейера [9], связанных с классификацией главных универсальных классов абелевых групп.

Чтобы сформулировать и доказать аналог теоремы 2.5 для главных универсальных классов, нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Лемма 2.12. *Пусть $\mathbf{K}$ — главный универсальный класс абелевых групп и C — конечная абелева группа. Тогда*

1) *если $T_p(C) \in \mathbf{K}$ для всех $p \in \mathcal{P}$, то $C \in \mathbf{K}$;*

2) *если* $\mathbb{Z} \in \mathbf{K}$, *то* $\mathbb{Z}^k \in \mathbf{K}$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}^+$;
3) *если* $C \in \mathbf{K}$ *и* $\mathbb{Z} \in \mathbf{K}$, *то* $\mathbb{Z}^k \oplus C \in \mathbf{K}$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. Пусть $T_p(C) \in \mathbf{K}$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Тогда по теореме 1.1 в $\mathbf{K}$ есть конечно порождённая группа A, в которую вкладываются $T_p(C)$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Но тогда и C вкладывается в A, т. е. $C \in \mathbf{K}$. Второе утверждение следует из того, что $\mathbb{Z}^k \in \mathbf{Dis}(\mathbb{Z})$ (см. пример 1.31), следовательно, в силу предложения 1.32 $\mathbb{Z}^k \in \mathbf{Ucl}(\mathbb{Z})$ для любого $k \in \mathbb{Z}^+$. Если же $C \in \mathbf{K}$ и $\mathbb{Z} \in \mathbf{K}$, то снова найдётся конечно порождённая группа $B \in \mathbf{K}$, в которую вкладываются группы C и $\mathbb{Z}^k$. Но тогда и $\mathbb{Z}^k \oplus C$ вкладывается в B. □

Следствие 2.13. *Пусть* $\mathbf{K}$ *— главный универсальный класс абелевых групп,* C *— конечно порождённая абелева группа и* $\mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} T_p(C)$ *— её примарное разложение,* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $C \in \mathbf{K}$ *в том и только том случае, когда* $\mathbb{Z} \in \mathbf{K}$ *и* $T_p(C) \in \mathbf{K}$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$.

Следующая лемма является единственным заимствованием из статьи П. Эклофа [19] в данном разделе, но здесь она доказывается значительно проще.

Лемма 2.14. *Для любых абелевых групп* A *и* B *следующие условия эквивалентны*:

1) $B \in \mathbf{Ucl}(A)$;
2) $\delta(B) \leqslant \delta(A)$ *и* $\gamma_{p,k}(B) \leqslant \gamma_{p,k}(A)$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$ *и* $k \in \mathbb{Z}^+$;
3) $\delta(B) \leqslant \delta(A)$ *и* $\mathcal{U}(B) \subseteq \mathcal{U}(A)$;
4) $\delta(B) \leqslant \delta(A)$ *и* $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A)$.

Доказательство. Пусть $B \in \mathbf{Ucl}(A)$. Тогда $\delta(B) \leqslant \delta(A)$, как в лемме 2.4. Включение $\mathcal{U}(B) \subseteq \mathcal{U}(A)$ следует из леммы 2.3. Предположим теперь, что $\delta(B) \leqslant \delta(A)$ и $\mathcal{U}(B) \subseteq \mathcal{U}(A)$. Возьмём конечно порождённую подгруппу $C \leqslant B$ и запишем её примарное разложение: $\mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus\limits_{p\in\mathcal{P}} T_p(C)$. Если $k \neq 0$, то $\delta(B) = \delta(A) = 1$, следовательно, по лемме 2.1 $\mathbb{Z} \in \mathbf{Ucl}(A)$. Кроме того, $T_p(C) \leqslant B$, следовательно, $T_p(C) \in \mathcal{U}(A)$ и $T_p(C) \in \mathbf{Ucl}(A)$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Согласно следствию 2.13 $C \in \mathbf{Ucl}(A)$. Таким образом, $B \in \mathbf{Ucl}(A)$, и эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 3) доказана. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longrightarrow$ 4) имеют место в силу следствия 1.7 и леммы 1.11, а импликация 4) $\Longrightarrow$ 3) тривиальна. □

Обозначим через $\mathrm{UI}(A)$ бесконечный вектор следующих элементарных инвариантов абелевой группы A:

$$\mathrm{UI} = (\delta(A), \gamma_{p,k}(A) \mid p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+)$$

и будем называть их *универсальными инвариантами* для A. Также будем использовать обозначение

$$\mathrm{UI}_p(A) = (\delta(A), \gamma_{p,1}(A), \gamma_{p,2}(A), \ldots)$$

для так называемых *примарных универсальных инвариантов* при фиксированном простом числе p. Напомним, что $\gamma_{p,k}(A) \geqslant \gamma_{p,k+1}(A)$ для любого $k \in \mathbb{Z}^+$.

Теорема 2.15. *Для любых абелевых групп A и B следующие условия эквивалентны:*

1) *A и B универсально эквивалентны, т. е.* $\mathbf{Ucl}(A) = \mathbf{Ucl}(B)$;
2) $\mathrm{UI}(A) = \mathrm{UI}(B)$;
3) $\delta(A) = \delta(B)$ *и* $\mathcal{U}(A) = \mathcal{U}(B)$;
4) $\delta(A) = \delta(B)$ *и* $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$.

Доказательство. Поскольку равенство $\mathbf{Ucl}(A) = \mathbf{Ucl}(B)$ равносильно тому, что $A \in \mathbf{Ucl}(B)$ и $B \in \mathbf{Ucl}(A)$, то результат следует из леммы 2.14. □

Следствие 2.16. *Все ненулевые абелевы группы без кручения универсально эквиваленты друг другу, в частности, они универсально эквивалентны бесконечной циклической группе $\mathbb{Z}$.*

Следствие 2.17. *Если A — ненулевая абелева группа без кручения, то главный универсальный класс $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ есть квазимногообразие $\mathbf{Q}_0$.*

Следствие 2.18. *Абелевы группы A и B универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $\delta(A) = \delta(B)$ и $T_p(A) \equiv_\forall T_p(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$.*

Следствие 2.19. *Пусть A и B — абелевы группы из квазимногообразия $\mathbf{Q}_p$ для некоторого простого числа p. Тогда они универсально эквивалентны в том и только том случае, если $\mathrm{UI}_p(A) = \mathrm{UI}_p(B)$.*

Для главного универсального класса абелевых групп $\mathbf{K}$ будем использовать обозначения $\delta(\mathbf{K})$, $e(\mathbf{K})$, $e_p(\mathbf{K})$, $\mathrm{UI}(\mathbf{K})$, $\mathrm{UI}_p(\mathbf{K})$, $\gamma_{p,k}(\mathbf{K})$, $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, для $\delta(A)$, $e(A)$, $e_p(A)$, $\gamma_{p,k}(A)$, $\mathrm{UI}(A)$, $\mathrm{UI}_p(A)$, $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, соответственно для любой абелевой группы A, такой что $\mathbf{K} = \mathbf{Ucl}(A)$. Корректность этих определений гарантируется теоремами 2.5 и 2.15.

Лемма 2.20. *Пусть $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — главные универсальные классы абелевых групп. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2$;
2) $\delta(\mathbf{K}_1) \leqslant \delta(\mathbf{K}_2)$ *и* $\gamma_{p,k}(\mathbf{K}_1) \leqslant \gamma_{p,k}(\mathbf{K}_2)$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$ *и* $k \in \mathbb{Z}^+$;
3) $\mathbf{K}_1 \cap \mathcal{U} \subseteq \mathbf{K}_2 \cap \mathcal{U}$;
4) $\mathbf{K}_1 \cap \mathcal{F} \subseteq \mathbf{K}_2 \cap \mathcal{F}$.

Доказательство. Результат следует из лемм 2.1 и 2.14. □

Следствие 2.21. *Если $\mathbf{K}$ — главный универсальный класс абелевых групп и $A \in \mathbf{K}$, то $\delta(A) \leqslant \delta(\mathbf{K})$, $e(A) \leqslant e(\mathbf{K})$, $e_p(A) \leqslant e_p(\mathbf{K})$ и $\gamma_{p,k}(A) \leqslant \gamma_{p,k}(\mathbf{K})$ для всех $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$.*

Следствие 2.22. *Пусть $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — главные универсальные классы абелевых групп. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2$;
2) $\mathrm{UI}(\mathbf{K}_1) = \mathrm{UI}(\mathbf{K}_2)$;
3) $\mathbf{K}_1 \cap \mathcal{U} = \mathbf{K}_2 \cap \mathcal{U}$;

4) $\mathbf{K}_1 \cap \mathcal{F} = \mathbf{K}_2 \cap \mathcal{F}$.

Следствие 2.23. *Пусть $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — главные универсальные классы, лежащие внутри квазимногообразия $\mathbf{Q}_p$ для некоторого простого числа p. Тогда $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2$ в том и только том случае, если $\mathrm{UI}_p(\mathbf{K}_1) = \mathrm{UI}_p(\mathbf{K}_2)$.*

Теперь покажем, как аксиоматизируются главные универсальные классы абелевых групп.

Предложение 2.24. *Пусть $\mathbf{K}$ — главный универсальный класс абелевых групп. Тогда множество универсальных предложений*

$$\Theta = \{\theta_{p,k,\gamma_{p,k}(\mathbf{K})} \mid p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\tau_{e(\mathbf{K})}\}$$

аксиоматизирует универсальный класс $\mathbf{K}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{K}'$ — универсальный класс, порождённый аксиомами множества Θ. Очевидно, что $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}'$. Возьмём произвольную конечно порождённую группу C из $\mathbf{K}'$ и запишем её примарное разложение $\mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} T_p(C)$. Если $k \neq 0$, то $e(\mathbf{K}) = \infty$, следовательно, согласно лемме 2.1 универсальный класс $\mathbf{K}$ содержит бесконечную циклическую группу $\mathbb{Z}$. Все конечные группы $T_p(C)$, $p \in \mathcal{P}$, также принадлежат классу $\mathbf{K}$ в силу леммы 1.11. Согласно следствию 2.13 $C \in \mathbf{K}$. □

Замечание 2.25. Заметим, что в списке аксиом Θ есть избыточные, его можно сократить в зависимости от свойств класса $\mathbf{K}$. Во-первых, можно удалить из Θ все тривиальные тождества. Во-вторых, если для данного простого числа p в классе $\mathbf{K}$ нет p-групп, т. е. $e_p(\mathbf{K}) = 1$ и $\gamma_{p,k}(\mathbf{K}) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}^+$, то из всех формул $\theta_{p,k,0}$ можно оставить только квазитождество $\theta_{p,1,0} = \rho_p$. Аналогично можно поступить в том случае, если последовательность $\gamma_{p,1}(\mathbf{K}) \geqslant \gamma_{p,2}(\mathbf{K}) \geqslant \ldots$ стремится к нулю, т. е. $e_p(\mathbf{K}) = p^{k_p}$ для некоторого числа $k_p \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $\gamma_{p,k_p+1}(\mathbf{K}) = \gamma_{p,k_p+2}(\mathbf{K}) = \ldots = 0$, поэтому все формулы $\theta_{p,k,0}$ при $k \geqslant k_p+2$ можно удалить из Θ. В частности, если $e(\mathbf{K}) < \infty$, то не более чем для конечного множества простых чисел p выполняется неравенство $e_p(\mathbf{K}) \neq 1$, причём даже для таких чисел p имеем $e_p(\mathbf{K}) < \infty$. Таким образом, в этом случае $\mathbf{K}$ аксиоматизируется конечным множеством универсальных предложений.

2.3. Канонические группы

Этот раздел основан на результатах из статьи А. А. Мищенко, В. Н. Ремесленникова, А. В. Трейера [9], оригинальные доказательства значительно сокращены. Для каждого главного универсального класса $\mathbf{K}$ абелевых групп будет построена так называемая каноническая группа — фиксированный представитель класса $\mathbf{K}$. Введение канонических групп закрывает сразу несколько вопросов. Перечислим их.

1. Предположим, что задан бесконечный вектор универсальных инвариантов

$$\mathrm{UI} = (\delta, \gamma_{p,k} \mid p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+),$$

где $\delta \in \{0,1\}$ и $\gamma_{p,k} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Этот вектор будем называть *допустимым*, если

$$\gamma_{p,1} \geqslant \gamma_{p,2} \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{p,k} \geqslant \ldots$$

для всех $p \in \mathcal{P}$ и

$$\delta = 0 \Longrightarrow \sup\{p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+ \mid \gamma_{p,k} \neq 0\} < \infty.$$

Для каждого ли допустимого вектора универсальных инвариантов UI существует абелева группа A, такая что $\mathrm{UI}(A) = \mathrm{UI}$? Ответ на этот опрос будет положительным, а соответствующую группу A, которую мы построим по UI, назовём *канонической группой* для соответствующего главного универсального класса и обозначим через $\Sigma(\mathrm{UI})$.

2. Канонические группы должны удовлетворять условию

$$\Sigma(\mathrm{UI}_1) \cong \Sigma(\mathrm{UI}_2) \Longleftrightarrow \mathrm{UI}_1 = \mathrm{UI}_2\,.$$

3. С помощью канонических групп должны без труда вычисляться **Dis**-пределы.
4. На языке канонических групп необходимо получить классификацию эквациональных кообластей с точностью до универсальной геометрической эквивалентности.

То, как вводятся канонические группы с нужными свойствами, будет показано в этом разделе. Решения последних двух задач приведены в разделах 3.6 и 3.7.

Итак, пусть задан допустимый вектор универсальных инвариантов UI. Чтобы определить каноническую группу $\Sigma(\mathrm{UI})$, введём следующие обозначения:

— $d = 1$, если $\delta = 1$ и $\sup\{p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+ \mid \gamma_{p,k} \neq 0\} < \infty$, в противном случае $d = 0$;
— для каждого $p \in \mathcal{P}$ положим $l_p = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{p,k}$, $l_p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; если $l_p < \infty$, то определим также
   а) $a_p = \max\limits_i \{i \mid \gamma_{p,i} = \infty\}$, а если $\{i \mid \gamma_{p,i} = \infty\} = \varnothing$, то $a_p = 0$;
   б) $b_p = \min\limits_i \{i \mid \gamma_{p,i} = l_p\}$; в этом случае $\gamma_{p,k} = l_p$ для всех $k \geqslant b_p$.

На рис. 1 изображён график функции $f_p\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f_p(k) = \gamma_{p,k}$, и обозначены значения параметров a_p, b_p и l_p при $l_p < \infty$ и $a_p > 0$.

Определим каноническую группу $\Sigma(\mathrm{UI})$ следующим образом:

$$\Sigma(\mathrm{UI}) = \mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \Biggl(C^\infty(p^{a_p}) \bigoplus_{a_p<t<b_p} C^{\gamma_{p,t}-\gamma_{p,t+1}}(p^t) \oplus C^{l_p}(p^\infty) \Biggr),$$

где $C(p^{a_p}) = 0$ при $a_p = 0$ и слагаемые $\bigoplus\limits_{a_p<t<b_p} C^{\gamma_{p,t}-\gamma_{p,t+1}}(p^t)$ отсутствуют при $l_p = \infty$.

Предложение 2.26. *Для любого допустимого вектора универсальных инвариантов* UI *верно, что* $\mathrm{UI}\bigl(\Sigma(\mathrm{UI})\bigr) = \mathrm{UI}$.

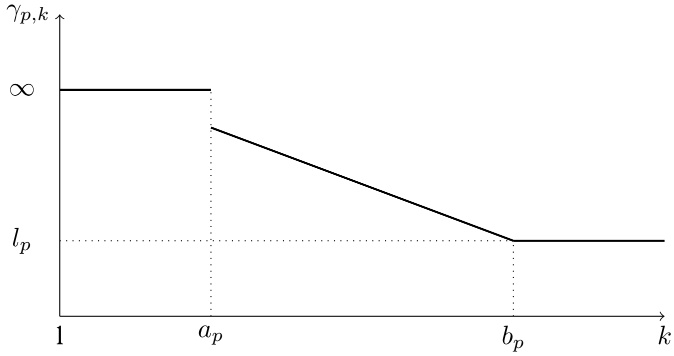

Рис. 1. График значений универсальных инвариантов $\gamma_{p,k}$

Доказательство. Равенство $\mathrm{UI}\big(\Sigma(\mathrm{UI})\big) = \mathrm{UI}$ следует из построения канонической группы $\Sigma(\mathrm{UI})$. $\square$

Предложение 2.27. *Для любых допустимых векторов универсальных инвариантов* UI_1 *и* UI_2 *следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathrm{UI}_1 = \mathrm{UI}_2$;
2) $\Sigma(\mathrm{UI}_1) \cong \Sigma(\mathrm{UI}_2)$;
3) $\Sigma(\mathrm{UI}_1) \equiv_\forall \Sigma(\mathrm{UI}_2)$.

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны, а импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) следует из теоремы 2.15 и предложения 2.26. $\square$

Следствие 2.28. *Для любой абелевой группы* A (*или главного универсального класса абелевых групп* $\mathbf{K}$) *существует и единственная с точностью до изоморфизма каноническая группа* Σ*, такая что* $A \equiv_\forall \Sigma$ (*или* $\mathbf{K} = \mathbf{Ucl}(\Sigma)$).

Доказательство. Достаточно взять $\Sigma = \Sigma\big(\mathrm{UI}(A)\big)$ (или $\Sigma = \Sigma\big(\mathrm{UI}(\mathbf{K})\big)$). Тогда $\mathrm{UI}(\Sigma) = \mathrm{UI}(A)$, следовательно, по теореме 2.15 $A \equiv_\forall \Sigma$ (или согласно следствию 2.22 $\mathbf{K} = \mathbf{Ucl}(\Sigma)$). $\square$

3. Алгебраическая геометрия над абелевыми группами

Пусть B — абелева группа и A — подгруппа группы B. Также будем считать, что A — сервантная подгруппа в B, в частности, это может быть и диофантов случай $A = B$, и бескоэффициентный $A = 0$. Нашей целью в этом разделе является решение основных задач алгебраической геометрии над группой B с коэффициентами в подгруппе A. Отметим сразу, что если подгруппа коэффициентов не является сервантной, то в отдельных случаях (например, при отсутствии кручения) классификационные задачи имеют понятные решения, однако для общего случая построение алгебро-геометрическая теории представляется проблематичным.

Впервые описание всех алгебраических множеств и координатных групп для диофантова случая было дано в кандидатской диссертации Ю. М. Федосеевой [10]. Затем в статье А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова [26] эти результаты были передоказаны более оптимальным способом, там же было дано описание неприводимых алгебраических множеств и их координатных групп. Ниже мы даём описание координатных групп и алгебраических множеств в более общем случае (с коэффициентами в произвольной сервантной подгруппе), причём мы приводим описание неприводимых координатных групп в несколько иной форме, чем в [26], а также предлагаем иную, по сравнению с [26], систему аксиом для главных универсальных классов языка $\mathtt{L}_A$.

Результаты разделов 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, в которых описываются координатные группы, алгебраические множества и аксиомы главных универсальных классов, а также изучается (универсальная) геометрическая эквивалентность абелевых групп, частично новы. В разделе 3.3 приводится процедура вычисления координатной группы по заданной системе уравнений, ранее описанная в статье Э. Ю. Данияровой и В. Н. Ремесленникова [17]. В разделе 3.6 дано описание эквациональных кообластей в классе абелевых групп, заимствованное из статьи Э. Ю. Данияровой [3]. В разделе 3.7 построены $\mathbf{Dis}$-пределы для абелевых групп, и его результаты полностью новые.

Напомним, что через $\mathtt{L}_A$ мы обозначаем стандартный аддитивный групповой язык $\mathtt{L} = \{+, -, 0\}$, расширенный с помощью новых констант — элементов группы A, через $\mathbf{Q}_A$ — $\mathtt{L}_A$-квазимногообразие всех абелевых A-групп, а через $\mathbf{Q}_{\oplus A}$ — $\mathtt{L}_A$-квазимногообразие всех абелевых A-групп, в которых выделенная подгруппа A сервантна.

3.1. Классификация координатных групп

Первая из приведённых ниже теорем описывает все координатные группы над данной абелевой A-группой B.

Теорема 3.1. *Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B. Тогда для любой ненулевой конечно порождённой A-группы C следующие условия эквивалентны:*

1) *C является координатной группой некоторого непустого алгебраического множества над B, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A;*
2) *подгруппа A выделяется в C прямым слагаемым: $C \cong_A A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа, причём*

$$e(G) \leqslant e(B) \ \text{ и } \ e_p(G) \leqslant e_p(B) \ \text{ для всех простых чисел } \ p.$$

Доказательство. Пусть C является координатной группой некоторого непустого алгебраического множества над B, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A. Тогда в силу теоремы 1.36 $C \in \mathbf{Qvar}_A(B)$. Так как по условию B принадлежит квазимногообразию $\mathbf{Q}_{\oplus A}$, то $C \in \mathbf{Q}_{\oplus A}$, т. е. A — сервантная подгруппа в C, а значит, A выделяется в C прямым слагаемым: $C \cong_A A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа. Так как $G \in \mathbf{Qvar}(B)$, то согласно лемме 2.4 $e(G) \leqslant e(B)$ и $e_p(G) \leqslant e_p(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

Пусть теперь $C \cong_A A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа, и $e(G) \leqslant e(B)$, $e_p(G) \leqslant e_p(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Покажем, что в этом случае C A-аппроксимируется группой B. Во-первых, согласно лемме 2.4 $G \in \mathbf{Qvar}(B)$ и согласно теореме 1.36 G аппроксимируется группой B. Пусть $a + g$ — ненулевой элемент из C, $a \in A$, $g \in G$. Если $a \neq 0$, то при A-гомоморфизме $h\colon C \to B$, тождественно нулевом на подгруппе G, имеем $h(a + g) = a \neq 0$. Если $a = 0$, то гомоморфизм $h'\colon G \to B$, при котором $h'(g) \neq 0$, продолжается до A-гомоморфизма $h''\colon C \to B$, при котором $h''(g) \neq 0$. Таким образом, C A-аппроксимируется группой B, и по теореме 1.36 получаем требуемое. □

Следствие 3.2 (диофантов случай). *Пусть A — абелева группа. Тогда для любой ненулевой конечно порождённой A-группы C следующие условия эквивалентны:*

1) *C является координатной группой некоторого непустого алгебраического множества над A, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A;*
2) *подгруппа A выделяется в C прямым слагаемым: $C \cong_A A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа, причём*

$$e(C) = e(A) \quad \text{и} \quad e_p(C) = e_p(A) \quad \text{для всех простых чисел} \quad p.$$

Доказательство. В этом случае не только $C \in \mathbf{Qvar}(A)$, но и $A \in \mathbf{Qvar}(C)$, так как $A \leqslant C$, поэтому имеем равенства $e(C) = e(A)$ и $e_p(C) = e_p(A)$ для всех $p \in \mathcal{P}$. □

Следствие 3.3. *Пусть $B, C \in \mathbf{Q}_{\oplus A}$ и $C \in \mathbf{Qvar}(B)$. Тогда $C \in \mathbf{Qvar}_A(B)$.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждения для случая, когда C является конечно порождённой A-группой. В этом случае A выделяется в C прямым слагаемым. Согласно лемме 2.4 $e(C) \leqslant e(B)$ и $e_p(C) \leqslant e_p(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Тогда в силу теоремы 1.36 $C \in \mathbf{Qvar}_A(B)$. □

Следующая теорема даёт описание координатных групп неприводимых алгебраических множеств.

Теорема 3.4. *Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B. Тогда для любой ненулевой конечно порождённой A-группы C следующие условия эквивалентны:*

1) *C является координатной группой некоторого неприводимого алгебраического множества над B, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A;*

2) *подгруппа A выделяется в C прямым слагаемым*: $C \cong_A A \oplus G$, *где G — конечно порождённая группа, причём*

$$\delta(C) \leqslant \delta(B) \quad \text{и} \quad \gamma_{p,k}(C) \leqslant \gamma_{p,k}(B) \quad \text{для всех} \quad p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+.$$

Доказательство. Если C является координатной группой некоторого неприводимого алгебраического множества над B, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A, то $C \in \mathbf{Ucl}_A(B)$ в силу теоремы 1.37. Тогда группа A выделяется прямым слагаемым в C согласно теореме 3.1, а требуемые неравенства имеют место в силу леммы 2.14.

Теперь предположим, что $C \cong_A A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа и $\delta(C) \leqslant \delta(B)$, $\gamma_{p,k}(C) \leqslant \gamma_{p,k}(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда C A-дискриминируется с помощью B в силу леммы 1.35. Согласно теореме 1.37 получаем требуемое. □

Следствие 3.5 (диофантов случай). *Пусть A — абелева группа. Тогда для любой ненулевой конечно порождённой A-группы C следующие условия эквивалентны*:

1) *C является координатной группой некоторого неприводимого алгебраического множества над A, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A*;
2) *подгруппа A выделяется в C прямым слагаемым*: $C \cong_A A \oplus G$, *где G — конечно порождённая группа, причём*

$$\mathrm{UI}(C) = \mathrm{UI}(A).$$

Доказательство. В этом случае $A \leqslant C$, поэтому условие $C \in \mathbf{Ucl}_A(A)$ равносильно тому, что $\mathbf{Ucl}_A(C) = \mathbf{Ucl}_A(A)$. □

Следствие 3.6. *Пусть $B, C \in \mathbf{Q}_{\oplus A}$ и $C \in \mathbf{Ucl}(B)$. Тогда $C \in \mathbf{Ucl}_A(B)$.*

Доказательство. Можно считать, что C — конечно порождённая A-группа, поэтому A в C выделяется прямым слагаемым. В силу леммы 2.14 $\delta(C) \leqslant \delta(B)$ и $\gamma_{p,k}(C) \leqslant \gamma_{p,k}(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$. Согласно теореме 1.37 $C \in \mathbf{Ucl}_A(B)$. □

3.2. Описание алгебраических множеств

Имея описание координатных групп, мы можем при помощи леммы 1.26 описать и сами алгебраические множества с точностью до изоморфизма.

Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B и Y — непустое алгебраическое множество над B, соответствующее системе уравнений с коэффициентами в A. По теореме 3.1 координатная группа $\Gamma(Y)$ представима в виде $A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа и $e(G) \leqslant e(B)$, $e_p(G) \leqslant e_p(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Запишем представление группы G в виде прямой суммы циклических групп:

$$G = C(a_1) \oplus \ldots \oplus C(a_n) \oplus C(b_1) \oplus \ldots \oplus C(b_m), \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — элементы бесконечного порядка, b_i — элемент порядка $p_i^{k_i}$, $p_i \in \mathcal{P}$, $k_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда любой A-гомоморфизм $h\colon C \to B$ однозначно определяется набором значений $\big(h(a_1), \ldots, h(a_n), h(b_1), \ldots, h(b_m)\big)$, в качестве которого может выступать любая точка из B^{n+m}, которая является решением системы уравнений

$$S = \{p_i^{k_i} y_i = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$

в переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$. Таким образом, алгебраическое множество Y изоморфно $\mathrm{V}_B(S)$. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ в этом случае естественно называть *свободными*. Заметим, что алгебраическое множество $\mathrm{V}_B(S)$ содержится в группе B^{n+m}, образуя подгруппу, а именно, получаем, что

$$Y \cong B^n \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} B[p_i^{k_i}]. \tag{2}$$

Теперь мы хотим разобраться с тем, как выглядят неприводимые компоненты алгебраических множеств. Для каждого непустого алгебраического множества Y над B и его координатной группы C определим неприводимую координатную группу iC следующим образом: запишем $C = A \oplus \mathbb{Z}^n \oplus H$, где $n \in \mathbb{N}$, а H — конечная группа, и положим

$$iC = A \oplus \mathbb{Z}^n \oplus iH,$$

где iH — конечная группа, универсальные инварианты которой равны

$$\gamma_{p,k}(iH) = \min\{\gamma_{p,k}(H), \gamma_{p,k}(B) - \gamma_{p,k}(A)\}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad \delta(iH) = 0.$$

Согласно следствию 1.13 $\gamma_{p,k}(iH) \geqslant \gamma_{p,k+1}(iH)$ для любых $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Кроме того, по построению все универсальные инварианты $\gamma_{p,k}(iH)$ конечны и не более чем конечное число их отличны от нуля. Это означает, что искомая конечная группа iH действительно существует (см. раздел 2.3).

Лемма 3.7. *В обозначениях выше iC — неприводимая координатная группа над B.*

Доказательство. Если $n > 0$, то $e(C) = \infty$ и по теореме 3.1 $e(B) = \infty$, таким образом, $\delta(iC) = \delta(B) = 1$. Далее, $\gamma_{p,k}(iC) = \gamma_{p,k}(A) + \gamma_{p,k}(iH) \leqslant \gamma_{p,k}(B)$ для любых $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, и по теореме 3.4 iC — неприводимая координатная группа над B. □

Пусть iY — соответствующее неприводимое алгебраическое подмножество в Y, построенное по своей координатной группе iC так, как описано выше.

Следующий результат мы формулируем пока только для диофантова случая, однако предполагаем, что его можно обобщить, и рассчитываем сделать это в ближайшее время.

Теорема 3.8. *Пусть A — абелева группа и Y — непустое алгебраическое множество над A, соответствующее системе уравнений с коэффициентами в A,* *а $C = \Gamma(Y)$ — его координатная группа. Тогда все неприводимые компоненты алгебраического множества Y изоморфны iY, причём их количество равно индексу подгруппы iC в группе C.*

Доказательство. В этом случае посмотрим на Y как на подгруппу группы A^{n+m}, а на iY — как на подгруппу Y. Индекс iY в Y конечен и равен индексу iC в C. Классы смежности Y по iY являются сдвигами множества iY, а следовательно, это алгебраические множества, изоморфные iY, а значит, тоже неприводимые. Так как их объединение покрывает Y и несократимо, то это и есть неприводимые компоненты множества Y. □

3.3. Вычисление координатных групп

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и S — система уравнений с переменными в X и коэффициентами в A. В этом разделе мы хотим показать, как по системе S вычисляется координатная группа $\Gamma_B(S)$. Как и выше, B — абелева группа с выделенной сервантной подгруппой A.

Сначала перейдём от системы уравнений S к однородной системе уравнений S_{h}. Так как алгебраические множества $\mathrm{V}_B(S)$ и $\mathrm{V}_B(S_{\mathrm{h}})$ изоморфны, то их координатные группы также A-изоморфны. Таким образом, изначально можно считать, что исходная система уравнений S однородна. Правда тут следует отметить, что если даже исходная система уравнений S не была совместной, то описанная далее процедура позволит это выявить, а значит, дать ответ: $\Gamma_B(S) = 0$. Также сразу можно полагать, что система S отлична от пустой или тривиальной $\{0 = 0\}$ (для этого случая ответом будет $\Gamma_B(S) = A \oplus \mathbb{Z}^n$).

Однородную систему уравнений S удобно рассматривать как подмножество абелевой группы без кручения $\mathbb{Z}^n$. Строя координатную группу $\Gamma_B(S)$, мы будем поэтапно преобразовывать систему уравнений S, переходя от $x_1, \ldots, x_n$ к новым переменным $y_1, \ldots, y_n$. Каждый такой переход $S \to S'$ соответствует некоторому автоморфизму группы $\mathbb{Z}^n$, а следовательно, он алгебраическое множество $\mathrm{V}_B(S)$ переводит в изоморфное ему множество $\mathrm{V}_B(S')$ с той же координатной группой (см. пример 1.22). Мы будем стремиться к тому, чтобы получить из S систему уравнений

$$S' = \{m_1 y_1 = 0, \ldots, m_s y_s = 0\}, \quad s \leqslant n, \tag{3}$$

с $n - s$ свободными переменными. Тогда исходное алгебраическое множество $\mathrm{V}_B(S)$ изоморфно алгебраическому множеству $B^{n-s} \oplus B[m_1] \oplus \ldots \oplus B[m_s]$. Отметим, что система уравнений S' из (3) не зависит ни от основной группы B, ни от подгруппы коэффициентов A. Но дальше алгебраическое множество $\mathrm{V}_B(S') = B^{n-s} \oplus B[m_1] \oplus \ldots \oplus B[m_s]$ с помощью изоморфизма приводится к виду (2) таким образом, как в примере 1.23. Тогда искомая координатная группа $\Gamma_B(S)$ изоморфна группе $A \oplus G$, где G из (1). Окажется при этом соответствующее алгебраическое множество неприводимым или нет, можно будет понять из сравнения универсальных γ-инвариантов групп B и $\Gamma_B(S)$.

В лемме 1.27 описана процедура перехода от системы S к системе S_{t} треугольной или трапециевидной формы. Система S_{t} зависит от переменных $x'_1, \ldots, x'_n$, которые получаются перестановкой исходных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Иногда при переходе к новым переменным, не желая перегружать текст, мы будем использовать старые обозначения, если это не приводит к недоразумениям. Далее нам необходимо несколько детализировать переход $S \to S_{\mathrm{t}}$.

В самом начале посчитаем идеалы $I_1, \ldots, I_n$, порождённые коэффициентами в уравнениях из S при переменных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, и пусть $k^1, \ldots, k^n \geqslant 0$ — порождающие элементы этих идеалов. При необходимости переставив переменные, будем считать, что $0 < k^1 \leqslant k^i$ для всех $k^i \neq 0$, $i = 2, \ldots, n$. Затем, как и ранее, перепишем систему уравнений S в эквивалентную систему S_1, в которой ровно у одного уравнения присутствует ненулевой коэффициент при x_1:

$$k^1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_n x_n = 0, \quad d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Далее добьёмся того, чтобы коэффициенты $d_2, \ldots, d_n$ делились на k^1. Известно, что $|d_i| \geqslant k^1$, если $d_i \neq 0$, $i = 2, \ldots, n$. Допустим, что $d_2 = d \cdot k^1 + r$, $0 < r < k_1$, $d \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$k^1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_n x_n = k^1(x_1 + d x_2) + r x_2 + \ldots + d_n x_n.$$

В этом случае перейдём от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к переменным $x_1 + d x_2$, $x_2, \ldots, x_n$ и повторим рассуждения выше. В новых переменных наименьший положительный коэффициент k^1 стал строго меньше. Таким путём, повторяя при необходимости этот цикл несколько раз, добьёмся того, что в первом уравнении (4) системы S_1 коэффициенты $d_2, \ldots, d_n$ делятся на k^1: $d_i = d^i \cdot k^1$, $d_i \in \mathbb{Z}$, $i = 2, \ldots, n$.

Теперь от переменных $x_1, \ldots, x_n$ перейдём к переменным $y_1, x_2, \ldots, x_n$, где $y_1 = x_1 + d^2 x_2 + \ldots + d^n x_n$. В результате этого система S_1 становится системой уравнений с распадающимися переменными: в ней первое уравнение — это $k^1 y_1 = 0$, а остальные уравнения зависят только от переменных $x_2, \ldots, x_n$. Далее повторим проведённые выше преобразования применительно к системе уравнений $S_1 \setminus \{k^1 y_1 = 0\}$, а затем к её нижнему правому углу и так далее. В результате мы получим систему уравнений вида (3), что и требовалось.

В заключение отметим, что процедура вычисления координатной группы по системе уравнений фактически заодно даёт альтернативное к теореме 3.1 решение задачи классификации координатных групп. При этом описание координатных групп со ссылкой на универсальную алгебраическую геометрию (в данном случае на теорему 1.36) получается значительно проще.

3.4. Аксиомы главных универсальных классов и квазимногообразий языка L_A

Для главного квазимногообразия $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Q}_A$, как и в бескоэффициентном случае, будем использовать обозначения $e(\mathbf{K})$ и $e_p(\mathbf{K})$, $p \in \mathcal{P}$, для соответственно

$e(B)$ и $e_p(B)$, $p \in \mathcal{P}$, для любой A-группы B, такой что $\mathbf{K} = \mathbf{Qvar}_A(B)$. Это определение корректно, поскольку из условия $\mathbf{K} = \mathbf{Qvar}_A(B) = \mathbf{Qvar}_A(C)$ для $C \in \mathbf{Q}_A$ следует, что $\mathbf{Qvar}(B) = \mathbf{Qvar}(C)$, поэтому $e(B) = e(C)$ и $e_p(B) = e_p(C)$, $p \in \mathcal{P}$, в силу теоремы 2.5.

Напомним, что согласно следствию 1.15 любое $\mathtt{L}_A$-квазимногообразие $\mathbf{K}$, лежащее в $\mathbf{Q}_{\oplus A}$, является главным.

Предложение 3.9. *Пусть K — квазимногообразие языка $\mathtt{L}_A$, $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Q}_{\oplus A}$. Тогда $\mathbf{K}$ аксиоматизируется с помощью аксиом квазимногообразия $\mathbf{Q}_{\oplus A}$ и*

— $\mathtt{L}$-*тождества $\tau_{e(\mathbf{K})}$ при $e(\mathbf{K}) < \infty$ или же*

— $\mathtt{L}$-*квазитождеств $\pi_{p,k+1}$ для всех простых чисел p, при которых $e_p(\mathbf{K}) = p^k < \infty$, $k \in \mathbb{Z}^+$, если $e(\mathbf{K}) = \infty$.*

Доказательство. Пусть B — абелева A-группа, такая что $\mathbf{K} = \mathbf{Qvar}_A(B)$. Ясно, что перечисленные выше квазитождества истинны на группе B. С другой стороны, если C — конечно порождённая $\mathtt{L}_A$-группа, на которой истинны все $\mathtt{L}_A$-квазитождества из формулировки предложения, то $C \in \mathbf{Q}_{\oplus A}$, поэтому C — A-группа, в которой выделенная подгруппа A сервантна. Согласно предложению 2.11 $C \in \mathbf{Qvar}(B)$, поэтому в силу следствия 3.3 $C \in \mathbf{Qvar}_A(B)$. □

Аналогичным образом для любого главного универсального класса $\mathbf{K}$ абелевых A-групп, $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Q}_A$, будем использовать обозначения $\delta(\mathbf{K})$ и $\gamma_{p,k}(\mathbf{K})$, для соответственно $\delta(B)$ и $\gamma_{p,k}(B)$, $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, для любой A-группы B, такой что $\mathbf{K} = \mathbf{Ucl}_A(B)$. Корректность этого определения следует из теоремы 2.15.

Предложение 3.10. *Пусть $\mathbf{K}$ — главный универсальный класс языка $\mathtt{L}_A$, $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Q}_{\oplus A}$. Тогда $\mathbf{K}$ аксиоматизируется с помощью аксиом квазимногообразия $\mathbf{Q}_{\oplus A}$ и множества универсальных предложений Θ языка $\mathtt{L}$ из предложения 2.24.*

Доказательство. Пусть B — абелева A-группа, такая что $\mathbf{K} = \mathbf{Ucl}_A(B)$. Тогда B удовлетворяет требуемым универсальным предложениям. В другую сторону, если C — конечно порождённая $\mathtt{L}_A$-группа, удовлетворяющая всем универсальным предложениям выше, то $C \in \mathbf{Q}_{\oplus A}$ и $C \in \mathbf{Ucl}(B)$, поэтому $C \in \mathbf{Ucl}_A(B)$ ввиду следствия 3.6. □

3.5. Геометрические эквивалентности абелевых групп

В этом разделе сформулированы критерии геометрической и универсальной геометрической эквивалентностей в классе абелевых групп.

Теорема 3.11. *Пусть B_1 и B_2 — абелевы A-группы, в которых подгруппа A сервантна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *B_1 и B_2 геометрически эквивалентны над A;*
2) *B_1 и B_2 квазиэквационально эквивалентны в языке $\mathtt{L}_A$, т. е.*

$$\mathbf{Qvar}_A(B_1) = \mathbf{Qvar}_A(B_2);$$

3) *B_1 и B_2 квазиэквационально эквивалентны в языке* $\mathtt{L}$, *т. е.*

$$\mathbf{Qvar}(B_1) = \mathbf{Qvar}(B_2);$$

4) $e(B_1) = e(B_2)$ *и* $e_p(B_1) = e_p(B_2)$ *для всех простых чисел* p;
5) $\delta(B_1) = \delta(B_2)$ *и* $\mathcal{Q}(B_1) = \mathcal{Q}(B_2)$.

Доказательство. Результат следует из теорем 1.38, 2.5 и следствия 3.3. □

Следствие 3.12. *Если абелевы группы B_1 и B_2 геометрически эквивалентны в бескоэффициентном случае, то они геометрически эквивалентны над любой группой A, которая является сервантной подгруппой в B_1 и B_2.*

Теорема 3.13. *Пусть B_1 и B_2 — абелевы A-группы, в которых подгруппа A сервантна. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *B_1 и B_2 универсально геометрически эквивалентны над A*;
2) *B_1 и B_2 универсально эквивалентны в языке* $\mathtt{L}_A$, *т. е.*

$$\mathbf{Ucl}_A(B_1) = \mathbf{Ucl}_A(B_2);$$

3) *B_1 и B_2 универсально эквивалентны в языке* $\mathtt{L}$, *т. е.*

$$\mathbf{Ucl}(B_1) = \mathbf{Ucl}(B_2);$$

4) $\mathrm{UI}(B_1) = \mathrm{UI}(B_2)$;
5) $\delta(B_1) = \delta(B_2)$ *и* $\mathcal{U}(B_1) = \mathcal{U}(B_2)$.

Доказательство. Результат следует из теорем 1.1, 2.15 и следствия 3.6. □

Следствие 3.14. *Если абелевы группы B_1 и B_2 универсально геометрически эквивалентны в бескоэффициентном случае, то они универсально геометрически эквивалентны над любой группой A, которая является сервантной подгруппой в B_1 и B_2.*

3.6. Классификация эквациональных кообластей

Имея описание всех координатных групп и неприводимых координатных групп над данной абелевой группой B, можно сформулировать критерии, определяющие, является B эквациональной кообластью или нет.

Теорема 3.15. *Пусть B — абелева группа и A — произвольная её подгруппа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *B — эквациональная кообласть в языке* $\mathtt{L}$;
2) *B — эквациональная кообласть в расширенном языке* $\mathtt{L}_A$;
3) $\gamma_{p,k}(B) \in \{0, \infty\}$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. Последовательно покажем, что 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 1) $\Longrightarrow$ 3).

Предположим, что $\gamma_{p,k}(B) \in \{0, \infty\}$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$. Покажем, что в этом случае B является B-эквациональной кообластью. Пусть C — конечно порождённая B-подгруппа группы $B \oplus B$. Имеем, что $\delta(C) = \delta(B)$ и $\gamma_{p,k}(B) \leqslant \leqslant \gamma_{p,k}(C) \leqslant \gamma_{p,k}(B \oplus B) = \gamma_{p,k}(B)$, т. е. $\gamma_{p,k}(B) = \gamma_{p,k}(C)$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$. Кроме того, диагональная подгруппа B в $B \oplus B$ сервантна, следовательно, в C она также сервантна. Тогда в силу леммы 1.35 C B-дискриминируется с помощью B. Тогда по теореме 1.41 B является B-эквациональной кообластью, а по лемме 1.42 B является A-эквациональной кообластью для любой подгруппы $A \leqslant B$.

Теперь допустим, что $\gamma_{p,k}(B) = m$ для некоторых $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ и $m \in \mathbb{Z}^+$. Это означает, что $C^m(p^k) \in \mathbf{Ucl}(B) \subseteq \mathbf{Qvar}(B)$. Но при этом $C^{m+1}(p^k) \notin \mathbf{Ucl}(B)$. В то же время квазимногообразия замкнуты относительно прямых произведений, поэтому $C^{m+1}(p^k) \in \mathbf{Qvar}(B)$. Таким образом, в силу теоремы 1.41 B не является эквациональной кообластью (в бескоэффициентном случае), а следовательно, по лемме 1.42 B не является A-эквациональной кообластью ни для какой подгруппы $A \leqslant B$. □

Доказанная теорема позволяет разбить многообразие абелевых групп $\mathbf{A}$ на класс эквациональных кообластей $\mathbf{D}^{\mathrm{c}}$ и его дополнение $\mathbf{A} \setminus \mathbf{D}^{\mathrm{c}}$. Это разбиение не зависит от наличия или отсутствия коэффициентов в рассматриваемых уравнениях. Из теоремы 3.15 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.16. *Класс эквациональных кообластей $\mathbf{D}^{\mathrm{c}}$ в многообразии абелевых групп аксиоматизируем, а его аксиомами являются $\forall\exists$-предложения*

$$\forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{m-1} \ \exists x_m$$
$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{m-1} p^k x_i = 0 \wedge \bigwedge_{\alpha_i \in \mathbb{F}_p, \ \bar{\alpha} \neq \bar{0}} \alpha_1 p^{k-1} x_1 + \ldots + \alpha_{m-1} p^{k-1} x_{m-1} \neq 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow p^k x_m = 0 \wedge \bigwedge_{\beta_i \in \mathbb{F}_p, \ \bar{\beta} \neq \bar{0}} \beta_1 p^{k-1} x_1 + \ldots + \beta_m p^{k-1} x_m \neq 0\Big),$$
$$p \in \mathcal{P}, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad m \geqslant 2.$$

Замечание 3.17. Альтернативный способ аксиоматизации класса $\mathbf{D}^{\mathrm{c}}$ — это множество $\forall\exists$-предложений вида $\theta_{p,k,m} \to \theta_{p,k,0}$ по всем $p \in \mathcal{P}$ и $k, m \in \mathbb{Z}^+$.

Другим следствием теоремы 3.15 является классификация эквациональных кообластей с точностью до универсальной эквивалентности путём постановки им в соответствие подходящих канонических групп.

Предложение 3.18. *Абелева группа A является эквациональной кообластью тогда и только тогда, когда она универсально эквивалентна канонической группе вида*

$$\Sigma = \mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} T_p(\Sigma),$$

где $d \in \{0, 1\}$ и p-примарная компонента $T_p(\Sigma)$ равна $C^\infty(p^{a_p})$, $a_p \in \mathbb{N}$, или $C^\infty(p^\infty)$ для каждого $p \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Действительно, согласно следствию 2.28 существует единственная с точностью до изоморфизма каноническая группа Σ, такая что $A \equiv_\forall \Sigma$, при этом $\mathrm{UI}(A) = \mathrm{UI}(\Sigma)$. $\square$

В дальнейшем для вычислений **Dis**-пределов нам будет полезно определить для каждой абелевой группы A абелеву эквациональную кообласть $D(A)$, максимальную в некотором смысле и такую что $D(A) \in \mathbf{Ucl}(A)$. С этой целью положим

$$\gamma_{p,k} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \gamma_{p,k}(A) = \infty, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$. Затем

$$D(A) = \mathbb{Z}^d \oplus T\big(\Sigma(\mathrm{UI})\big),$$

где $d = \infty$ при $\delta(A) = 1$ и $d = 0$ при $\delta(A) = 0$, а $\mathrm{UI} = (1, \gamma_{p,k} \mid p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+)$.

Лемма 3.19. *Для любой абелевой группы A верно, что абелева группа $D(A)$ является эквациональной кообластью и $D(A) \in \mathbf{Ucl}(A)$.*

Доказательство. Так как $\gamma_{p,k}\big(D(A)\big) = \gamma_{p,k}$ для всех $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, то $D(A)$ — эквациональная кообласть в силу теоремы 3.15. То, что $D(A) \in \mathbf{Ucl}(A)$, следует из леммы 2.14. $\square$

3.7. Dis-пределы

Определение $\mathbf{Dis}_A$-предела $\mathrm{IC}_A(B)$ для данной абелевой A-группы B как хранилища неприводимых координатных групп дано в разделе 1.8. Напомним, что группа $\mathrm{IC}_A(B)$ определяется с точностью до универсальной эквивалентности в языке $\mathtt{L}_A$. Получив описание неприводимых координатных групп и используя такую конструкцию, как каноническая группа, несложно вычислить $\mathbf{Dis}_A$-предел $\mathrm{IC}_A(B)$.

Предложение 3.20. *Пусть A — сервантная подгруппа абелевой группы B. Тогда $\mathbf{Dis}_A$-предел $\mathrm{IC}_A(B)$ вычисляется следующим образом:*

$$\mathrm{IC}_A(B) = A \oplus \mathbb{Z}^d \oplus T\big(\Sigma(\mathrm{UI})\big),$$

где $d = \infty$ при $\delta(B) = 1$ и $d = 0$ при $\delta(B) = 0$, а

$$\mathrm{UI} = (1,\, \gamma_{p,k} = \gamma_{p,k}(B) - \gamma_{p,k}(A) \mid p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{Z}^+).$$

Доказательство. Во-первых, необходимо убедиться в том, что вектор универсальных инвариантов UI является допустимым. Это вытекает из следствия 1.13.

Во-вторых, по построению $\mathrm{UI}\big(\mathrm{IC}_A(B)\big) = \mathrm{UI}(B)$ и $\mathrm{IC}_A(B) \in \mathbf{Q}_{\oplus A}$. Следовательно, по теореме 3.13 $\mathbf{Ucl}_A\big(\mathrm{IC}_A(B)\big) = \mathbf{Ucl}_A(B)$. Тогда любая конечно порождённая A-подгруппа C группы $\mathrm{IC}_A(B)$ согласно теореме 1.37 является координатной группой некоторого неприводимого алгебраического множества над B, соответствующего системе уравнений с коэффициентами в A.

В-третьих, если C — неприводимая координатная группа над B, то по теореме 3.4 $C \cong_A A \oplus G$, где G — конечно порождённая группа, причём $\delta(C) \leqslant \delta(B)$ и $\gamma_{p,k}(C) \leqslant \gamma_{p,k}(B)$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда C A-вкладывается в $\mathrm{IC}_A(B)$. $\square$

Дадим формулировки этого результата в частных случаях: в диофантовом и в бескоэффициентном.

Следствие 3.21 (диофантов случай). *Пусть A — абелева группа. Тогда $\mathbf{Dis}_A$-пределом $\mathrm{IC}_A(A)$ является группа $A \oplus D(A)$.*

Следствие 3.22 (бескоэффициентный случай). *Пусть A — абелева группа. Тогда $\mathbf{Dis}$-предел вычисляется следующим образом:*

$$\mathrm{IC}(A) = \mathbb{Z}^d \oplus T\Big(\Sigma\big(\mathrm{UI}(A)\big)\Big),$$

где $d = \infty$ при $\delta(A) = 1$ и $d = 0$ при $\delta(A) = 0$.

Литература

[1] Виноградов А. А. Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. — 1965. — Т. 4, № 6. — С. 15—19.

[2] Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Научная книга, 1999.

[3] Даниярова Э. Ю. Эквациональные ко-области в классе абелевых групп // Вестн. Омского ун-та. — 2018. — Т. 23, № 4. — С. 25—29.

[4] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.

[5] Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.

[6] Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 1. — М.: Изд. иностр. лит., 1963.

[7] Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 2. — М.: Изд. иностр. лит., 1963.

[8] Мищенко А. А., Ремесленников В. Н., Трейер А. В. Канонические и экзистенциальные группы в универсальных классах абелевых групп // Докл. РАН. — 2016. — Т. 467, № 3. — С. 266—270.

[9] Мищенко А. А., Ремесленников В. Н., Трейер А. В. Универсальные инварианты для классов абелевых групп // Алгебра и логика. — 2017. — Т. 56, № 2. — С. 176—201.

[10] Федосеева Ю. М. Алгебраическая геометрия над абелевыми и нильпотентными группами: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — 1998.

[11] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[12] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[13] Фомин А. А. Абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квазиизоморфизма: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — М., 1992.

[14] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. — 1999. — Vol. 219. — P. 16—79.

[15] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. Discriminating and co-discriminating groups // J. Group Theory. — 2000. — Vol. 3, no. 4. — P. 467—479.

[16] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion Free Groups of Rank Two. — Providence: Amer. Math. Soc., 1961. — Mem. Amer. Math. Soc.

[17] Daniyarova E. Yu., Remeslennikov V. N. Calculation of the coordinate group by a system of equations over an abelian group // IEEE, 2018 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). — Omsk, 2018. — P. 1—6.

[18] Eisenbud D. Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry. — Berlin: Springer, 1995. — (Graduate Texts Math.; Vol. 150).

[19] Eklof P. C. Some model theory of abelian groups // J. Symbolic Logic. — 1972. — Vol. 37, no. 2. — P. 335—342.

[20] Hodges W. Model Theory. — Cambridge Univ. Press, 1993.

[21] Jónsson B. On direct decomposition of torsion free Abelian groups // Math. Scand. — 1959. — Vol. 7. — P. 361—371.

[22] Kharlampovich O., Myasnikov A. Irreducible affine varieties over free group I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz // J. Algebra. — 1998. — Vol. 200, no. 2. — P. 472—516.

[23] Kharlampovich O., Myasnikov A. Irreducible affine varieties over free group II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups // J. Algebra. — 1998. — Vol. 200, no. 2. — P. 517—570.

[24] Lyndon R. C. Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 96. — P. 518—533.

[25] Myasnikov A., Remeslennikov V. Exponential groups 2. Extension of centralizers and tensor completion of CSA-groups // Int. J. Algebra Comput. — 1996. — Vol. 6, no. 6. — P. 687—711.

[26] Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups II: Logical foundations // J. Algebra. — 2000. — Vol. 234. — P. 225—276.

[27] Plotkin B. I. Seven lectures on the universal algebraic geometry: Preprint. — 2002. — `arXiv:math/0204245`.

[28] Plotkin B. Algebras with the same (algebraic) geometry // Proc. Steklov Inst. Math. — 2003. — Vol. 242. — P. 165—196.

[29] Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups // Fund. Math. — 1955. — Vol. 41. — P. 203—271.