Обобщённая типовая размерность градуированного модуля

М. В. КОНДРАТЬЕВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: kondratieva@sumail.ru

УДК 512.628.2

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, кольцо обобщённых многочленов, градуированный идеал, характеристический многочлен, типовая размерность, теорема Безу.

Аннотация

В статье доказана верхняя оценка старшего коэффициента характеристического многочлена градуированного идеала кольца обобщённых многочленов. Примерами таких колец являются как кольцо обычных многочленов (для которого выполняется классическая теорема Безу), так и некоторые кольца дифференциальных операторов. Для системы обобщённых однородных уравнений от нескольких переменных в малых коразмерностях получены точные полиномиальные по d оценки. В общем случае оценка дважды экспоненциальная по τ: $O\big(d^{2^{\tau-1}}\big)$, где d — максимальная степень образующих градуированного идеала, τ — его коразмерность. Для систем линейных дифференциальных уравнений оценки такой же асимптотики, но иными методами были получены Д. Григорьевым.

Abstract

M. V. Kondratieva, Generalized typical dimension of a graded module, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 2, pp. 147—161.

In this paper, we prove an upper bound for the leading coefficient of the characteristic polynomial of a graded ideal in a ring of generalized polynomials. Examples of such rings are the rings of commutative polynomials (for which the classical Bézout theorem holds), as well as some rings of differential operators. For a system of generalized homogeneous equations in small codimensions we obtain exact estimates that are polynomial in d. In the general case, the estimate is double exponential in τ: $O\big(d^{2^{\tau-1}}\big)$, where d is the maximal degree of generators of a graded ideal and τ is its codimension. For systems of linear differential equations, bounds of the same asymptotics, but by other methods, were obtained by D. Grigoriev.

1. Введение

В алгебраической геометрии и коммутативной алгебре многие исследования посвящены многочлену Гильберта. Такую же важную роль в дифференциальной алгебре играет дифференциальный размерностный многочлен, введённый

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 2, с. 147—161.

Э. Колчиным [6]. Оценка его коэффициентов относится к классическим нерешённым проблемам дифференциальной алгебры.

В последние годы повысился интерес к компьютерной алгебре, одним из направлений которой является изучение базисов Грёбнера. Для полиномиальных идеалов это понятие изучено достаточно полно, в частности, найдены верхние и нижние оценки степеней полиномов в базисе Грёбнера по степеням образующих идеала (см., например, [3, 8]). Интересно, что сложности вычисления базиса Грёбнера и нахождения старшего коэффициента многочлена Гильберта имеют различные асимптотические оценки.

Для колец дифференциальных операторов над полем большого успеха в этой области достигли Д. Григорьев и А. Чистов (см. [4, 5]). Здесь ситуация иная, чем для полиномиальных идеалов, и известна только верхняя дважды экспоненциальная оценка (как для порядков элементов базиса Грёбнера, так и для старшего коэффициента размерностного многочлена).

Для обобщения этих результатов мы будем рассматривать кольцо, введённое в [7, определение 4.1.4]. Для идеалов этих (в общем случае некоммутативных) колец обобщённых многочленов работает техника базисов Грёбнера и определено понятие характеристического многочлена.

Полученная в работе оценка (теорема 3) в ситуации, когда степень характеристического многочлена на 1 меньше максимально возможной (мы будем употреблять термин коразмерность τ) равна 1, совпадает с оценкой Э. Колчина (см. [6, с. 199]).

Э. Колчин полагал, что по аналогии с этой линейной оценкой в других коразмерностях оценка старшего коэффициента размерностного многочлена также будет полиномом степени $O(\tau)$. В общем случае это до сих пор не опровергнуто.

В коразмерности 2 для дифференциального размерностного многочлена доказана оценка (см. [7, 5.6.7]), совпадающая с полученной в данной статье для однородных систем обобщённых многочленов от нескольких переменных.

В коразмерностях 3, 4 и 5 (теорема 4) впервые получены точные верхние оценки обобщённой типовой размерности однородного идеала, причём в коразмерности 3 оценка достигается (пример 6).

В случае когда характеристический многочлен однородного идеала кольца обобщённых многочленов является константой, получена верхняя дважды экспоненциальная оценка этой величины от количества обобщённых неизвестных. Этот результат аналогичен результату Д. Григорьева [4].

2. Предварительные факты

Основные понятия и факты изложены в [6, 7, 9].

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, через $\mathbb{N}_0$ множество неотрицательных целых чисел, $\binom{n}{k} = \frac{s(s-1)\ldots(s-m+1)}{m!}$ — количество сочетаний из n элементов по k.

Пусть $e = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Тогда число $\sum\limits_{k=1}^{m} j_k$ будем называть *порядком* элемента e и обозначать через $\operatorname{ord} e$. Отметим, что любой целозначный (т. е. принимающий в целых точках целые значения) полином $v(s)$ может быть записан в виде

$$v(s) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{s+i}{i}, \quad \text{где} \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Будем называть числа $(a_d, \ldots, a_0)$ *стандартными коэффициентами* многочлена $v(s)$.

Определение 1 (см. [1; 7, определение 2.4.9]). Пусть $\omega = \omega(s)$ является целозначным многочленом степени d от переменной s. Назовём последовательностью *минимизирующих коэффициентов* многочлена ω вектор

$$b(\omega) = (b_d, \ldots, b_0) \in \mathbb{Z}^{d+1},$$

определяемый индуктивно по d следующим образом. Если $d = 0$ (т. е. ω является константой), то положим $b(\omega) = (\omega)$. Пусть $d > 0$ и $(a_d, \ldots, a_0)$ – стандартные коэффициенты многочлена ω, т. е.

$$\omega(s) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{si}{i}.$$

Обозначим

$$v(s) = \omega(s + a_d) - \binom{s+1+d+a_d}{d+1} + \binom{s+d+1}{d+1}.$$

Так как $\deg v < d$, можно вычислить последовательность минимизирующих коэффициентов

$$b(v) = (b_k, \ldots, b_0) \quad (0 \leqslant k < d)$$

многочлена $v(s)$. Определим

$$b(\omega) = (a_d, 0, \ldots, 0, b_k, \ldots, b_0) \in \mathbb{Z}^{d+1}.$$

Теперь дадим определение размерностного многочлена Колчина подмножества $E \subset \mathbb{N}_0^m$.

Определение 2. Определим частичный порядок на $\mathbb{N}_0^m$ следующим образом: отношение $(i_1, \ldots, i_m) \leqslant (j_1, \ldots, j_m)$ равносильно $i_k \leqslant j_k$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Рассмотрим функцию $\omega_E(s)$, принимающую в точке s значение $\operatorname{Card} V_E(s)$, где $V_E(s)$ — множество векторов $v \in \mathbb{N}_0^m$, таких что $\operatorname{ord} v \leqslant s$ и для каждого $e \in E$ не выполняется условие $e \leqslant v$. Тогда (см., например, [6, с. 115] или [7, теорема 5.4.1]) функция $\omega_E(s)$ для всех достаточно больших s является целозначным многочленом. Будем называть её *размерностным многочленом* Колчина множества E и обозначать через $\omega_E(s)$.

Не каждый целозначный многочлен является размерностным многочленом Колчина для некоторого множества E. Связь этих понятий установлена в следующей теореме.

Теорема 1 (см. [1; 7, утверждение 2.4.10]). *Все минимизирующие коэффициенты размерностного многочлена Колчина неотрицательны. Верно и обратное: если последовательность минимизирующих коэффициентов некоторого целозначного полинома состоит из неотрицательных чисел, то он является размерностным многочленом Колчина некоторого множества E. Будем обозначать множество таких многочленов через W.*

Отметим, что множество W замкнуто относительно сложения, взятия оператора

$$\Delta_1\omega(s) = \omega(s) - \omega(s-1) \tag{1}$$

и положительного сдвига:

$$\omega(s) = \omega(s+j), \quad j \in \mathbb{N}$$

(см. [7, утверждения 2.4.13 и 2.4.22]).

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Обозначим через $T = T(X)$ свободную коммутативную полугруппу с единицей (записываемую мультипликативно), порождённую множеством X. Элементы T будем называть *мономами*. Пусть $\theta \in T$, $\theta = x_1^{e_1} \ldots x_m^{e_m}$. Порядком монома θ будем называть $\operatorname{ord}(e_1, \ldots, e_m)$ и обозначать через $\operatorname{ord}\theta$. Предположим, что множество мономов линейно упорядочено и для всех $\theta \in T$ выполняются следующие условия:

$$1 \leqslant \theta;$$

если $\theta_1 < \theta_2$, то

$$\theta\theta_1 < \theta\theta_2.$$

В этом случае будем говорить, что на множестве мономов T определён *ранжир*.

Пусть $\mathcal{F}$ — поле, P — векторное $\mathcal{F}$-пространство с базисом $T = T(X)$. Определим на P функцию «взятия лидера» следующим образом: каждый g из P представляется в виде суммы

$$g = \sum_{\theta \in T} a_\theta \theta,$$

где только конечное число коэффициентов $a_\theta \in \mathcal{F}$ ненулевые. Среди всех мономов, входящих в это представление с ненулевым коэффициентом, выберем максимальный в смысле порядка, введённого на множестве T. Этот моном будем называть *лидером* $g \in P$ и обозначать через $\mathbf{u}_g$.

Определение 3. Пусть на множестве мономов $T = T(X)$ задан ранжир, и пусть P — векторное $\mathcal{F}$-пространство с базисом T. Предположим, что P является $\mathcal{F}$-алгеброй и $\mathbf{u}_{AB} = \mathbf{u}_A\mathbf{u}_B$ для всех $A, B \in P$. Также предположим, что $1\theta_1 \cdot 1\theta_2 = 1\theta_1\theta_2 \in P$ для всех $\theta_1, \theta_2 \in T$; в частности, образующие $x_1, \ldots, x_m$ попарно коммутируют. Такое кольцо будем называть *кольцом обобщённых многочленов* от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ над полем $\mathcal{F}$.

Пример 1 (кольцо коммутативных многочленов над полем)**.** Рассмотрим произвольный ранжир на $T = T(X)$. Пусть P — алгебра $\mathcal{F}[X]$ коммутативных многочленов над полем $\mathcal{F}$. Нетрудно видеть, что условие $\mathbf{u}_{AB} = \mathbf{u}_A\mathbf{u}_B$

выполняется, поэтому $\mathcal{F}[X]$ можно рассматривать как кольцо обобщённых многочленов от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над полем $\mathcal{F}$.

Определение 4. Оператор ∂, действующий на коммутативном кольце $\mathbb{K}$ с единицей, называется *дифференциальным оператором* (или *дифференцированием*), если он линеен, $\partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b)$, и удовлетворяет правилу Лейбница, $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$ для всех элементов $a, b \in \mathbb{K}$.

Дифференциальным кольцом (или Δ-кольцом) будем называть коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с конечным множеством $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ попарно коммутирующих дифференцирований на $\mathbb{K}$.

Определение 5. Для дифференциального поля $\mathcal{F}$ с множеством дифференцирований $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ определим (в общем случае некоммутативное) кольцо $D = \mathcal{F}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ косых многочленов от переменных $\partial_1, \ldots, \partial_m$ с коэффициентами в $\mathcal{F}$ так, что выполняется $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$, $\partial_i a = a\partial_i + \partial_i(a)$ для всех $a \in \mathcal{F}$, $\partial_i, \partial_j \in \Delta$. D называется кольцом (*линейных*) *дифференциальных* (или Δ-) *операторов* над $\mathcal{F}$.

Пример 2 (кольцо дифференциальных операторов над полем)**.** Пусть $\mathcal{F}$ — Δ-поле. Рассмотрим произвольный ранжир на множестве $T = T(\Delta)$. Кольцо $D = \mathcal{F}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ линейных дифференциальных операторов над $\mathcal{F}$ (см. определение 5) является кольцом обобщённых многочленов от переменных $\partial_1, \ldots, \partial_m$ над полем $\mathcal{F}$.

Пример 3 (кольцо дифференциальных операторов над кольцом многочленов)**.** Пусть $\mathcal{F}$ — $\Delta = \{\partial_1, \ldots \partial_m\}$-поле и R — кольцо коммутативных многочленов от переменных $y_1, \ldots, y_n$ над $\mathcal{F}$. Определим дифференцирования из $\Delta' = \{\partial'_1, \ldots \partial'_m\}$ на кольце R следующим образом. Положим $\partial'_i(y_j) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Фиксируем для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ число $1 \leqslant j \leqslant n$ (для различных i соответствующие им индексы j могут совпадать) и положим $\partial'_i(c) = \partial_i(f)y_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$, $c \in \mathcal{F}$. Кольцо D_R линейных Δ'-операторов над R является кольцом обобщённых многочленов над полем $\mathcal{F}$ от переменных $X = \{\partial'_1, \ldots, \partial'_m, y_1, \ldots, y_n\}$. В самом деле, рассмотрим следующий ранжир: $\partial'_i > y_j$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда условие $\mathbf{u}_f\mathbf{u}_g = \mathbf{u}_{fg}$ выполняется.

Пусть D — кольцо обобщённых многочленов от $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ над полем $\mathcal{F}$ и F — свободный D-модуль с базисом $B = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Прямое произведение $T \times B$ является $\mathcal{F}$-базисом векторного пространства F. Это множество будем называть *множеством термов* модуля F,

$$T_F = \{x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m} f_j \mid (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}_0^m,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Мы можем определить произведение терма на моном и расширить понятие ранжира на множество термов.

Определение 6. Ранжир на множестве термов T_F — это полный порядок, для которого выполняются следующие условия:

$u \leqslant \theta u$ для всех термов u и любого монома θ;

если $u \leqslant v,\ u, v \in T_F,$ для любого монома $\theta \in T$ выполняется $\theta u \leqslant \theta v$.

Определение 7. Будем называть ранжир *степенным*, если выполняется следующее условие: $\operatorname{ord}\theta_1 < \operatorname{ord}\theta_2$ ($\theta_1, \theta_2 \in T$) влечёт $\theta_1 f_i < \theta_2 f_j$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Пример 4. Пусть дан ранжир на множестве мономов T. Рассмотрим такой ранжир на множестве термов T_F: $\theta_1 f_i < \theta_2 f_j$, если либо $i < j$, либо $i = j$ и $\theta_1 < \theta_2$. Такой ранжир на T_F не является степенным.

Пример 5. Рассмотрим следующий ранжир на множестве мономов T: $\theta_1 < \theta_2$, если либо $\operatorname{ord}\theta_1 < \operatorname{ord}\theta_2$, либо $\operatorname{ord}\theta_1 = \operatorname{ord}\theta_2$ и $\theta_1 < \theta_2$ в смысле лексикографического порядка на множестве мономов. Пусть $t_1, t_2 \in T_F$. Положим $t_1 = \theta_1 f_i < t_2 = \theta_2 f_j$, если $\operatorname{ord}\theta_1 < \operatorname{ord}\theta_2$, либо $\operatorname{ord}\theta_1 = \operatorname{ord}\theta_2$ и $i < j$, либо $\operatorname{ord}\theta_1 = \operatorname{ord}\theta_2$, $i = j$ и $\theta_1 < \theta_2$. Такой ранжир является степенным. Будем называть его *стандартным*.

В подмодуле свободного модуля F над кольцом обобщённых многочленов D существует базис Грёбнера.

Определение 8 (см. [7, определение 4.1.25])**.** Пусть D — кольцо обобщённых многочленов над полем $\mathcal{F}$ от $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, F — свободный D-модуль. Пусть $M \subseteq F$ — подмодуль F, $G \subset M$ — конечное множество и $<$ — ранжир на множестве термов T_F. Будем называть G *базисом Грёбнера* подмодуля M, если для любого $f \in M$ существует представление

$$f = \sum_{i=1}^{r} c_i \theta_i g_i, \quad 0 \neq c_i \in \mathcal{F}, \quad \theta_i \in T(X), \quad g_i \in G, \quad \theta_i \mathbf{u}_{g_i} > \theta_{i+1} \mathbf{u}_{g_{i+1}},$$

откуда, в частности, следует, что $\mathbf{u}_f = \theta_1 \mathbf{u}_{g_1}$.

Рассмотрим теперь градуированные модули над кольцом обобщённых многочленов. Сначала определим градуировку на множестве мономов $T = T(X)$

$$T_s = \left\{ x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{m} i_k = s,\ (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}_0^m \right\}, \quad s \in \mathbb{Z},$$

причём $T_s = \varnothing$ для $s < 0$.

Определение 9. Пусть D — кольцо обобщённых многочленов над полем $\mathcal{F}$ от неизвестных $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Предположим, что ранжир на множестве мономов $T = T(X)$ степенной и

$$D_s = \left\{ \sum_{\theta \in T_s} a_\theta \theta \;\middle|\; a_\theta \in \mathcal{F} \text{ и почти все коэффициенты } a_\theta \text{ равны } 0 \right\}.$$

Кольцо D называется *градуированным*, если

$$D = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}_0} D_s$$

и $D_s D_r \subseteq D_{s+r}$ для всех $s, r \in \mathbb{N}_0$.

Кольца (примеры 1, 3), снабжённые степенным ранжиром (пример 5), являются градуированными. Кольцо дифференциальных операторов над полем $\mathcal{F}$ (пример 2) градуированным не является, если в поле $\mathcal{F}$ есть элементы, не являющиеся константами.

Определение 10. Пусть D — градуированное кольцо обобщённых многочленов над полем $\mathcal{F}$. Будем называть D-модуль M *градуированным*, если для любого $s \in \mathbb{N}_0$ определено $\mathcal{F}$-подпространство M_s модуля M и выполняются следующие свойства:

$$M = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}_0} M_s$$

и

$$D_s M_r \subseteq M_{s+r}$$

для всех $s,\ r \in \mathbb{N}_0$. Элементы M_s будем называть *однородными элементами* M степени s.

Свободные модули над кольцами (примеры 1, 3), снабжённые стандартным ранжиром, являются градуированными.

Определение 11. Пусть ${}_DM$ — конечно порождённый модуль над кольцом обобщённых многочленов и $M = \bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}_0} M_s$ — его градуировка. Функцию ϕ_M^{gr}, значение которой в точке $s \in \mathbb{N}_0$ равно $\dim_{\mathcal{F}} M_s$ будем называть *характеристической функцией* градуированного модуля M.

Теорема 2 (см. [7, теорема 4.3.20]). *Пусть D — градуированное кольцо обобщённых многочленов над полем от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, ${}_DM$ — градуированный модуль, $\{m_1, \ldots, m_n\}$ — его образующие, $m_i \in M_{\alpha^i}$. Существуют множества $E_i \subset \mathbb{N}_0^m$ $(i = 1, \ldots, n)$, такие что для всех достаточно больших s значение характеристической функции модуля M в точке s равно*

$$\phi_M^{\mathrm{gr}}(s) = \Delta_1 \sum_{i=1}^{n} \omega_{E_i}(s - \alpha^i), \tag{2}$$

где $\omega_E(s)$ — размерностный многочлен Колчина множества E (*см. определение* 2, *уравнение* (1)).

Как следует из доказательства, множества E_i соответствуют лидерам однородного базиса Грёбнера соотношений между образующими (модулю сизигий). Легко видеть, что для достаточно больших s функция $\phi_M^{\mathrm{gr}}(s)$ является многочленом. Будем обозначать его через $\omega_M(s)$ и называть *характеристическим многочленом* градуированного конечно порождённого модуля ${}_DM$. Его степень $d(M) = \deg(\omega_M)$ называют (обобщённым) *типом* модуля M (хотя правильнее было бы называть размерностью), разность $m - 1 - d$ — (обобщённой) *коразмерностью*, а стандартный старший (ненулевой) коэффициент $\tau_d(M)$ — (обобщённой) *типовой размерностью*, хотя эта величина является аналогом степени алгебраического многообразия. Мы будем использовать термины, введённые Э. Колчиным (традиционные для дифференциальной алгебры). Отметим, что типвая размерность и тип являются инвариантами градуированного модуля, т. е. не зависят от выбора градуировки.

У градуированных модулей над кольцом обобщённых многочленов есть свойства, аналогичные свойствам дифференциальных модулей: $d(M) < m$ и $a_{m-1}(\omega_M) = \mathrm{rk}_D\, M$.

Пусть F — свободный D-модуль с образующими $f_1, \ldots, f_n$. Каждый элемент $f \in F$ представляется в виде $f = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \theta_j f_j$, где $\theta_j \in D$. Обозначим $\mathrm{ord}_{f_i} f = \mathrm{ord}\, \theta_i$ и $\mathrm{ord}\, f = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\mathrm{ord}\, \theta_i)$.

Рассмотрим на F градуировку $F_s = \sum\limits_{i=1}^{n} T_s f_i$. Пусть H — подмодуль модуля F, порождённый однородными элементами $\Sigma \subset H$, причём $\mathrm{ord}_{f_j} h \leqslant e_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$, $h \in \Sigma$. На модуле H возникает индуцированная градуировка $H_s = H \cap F_s$. Фактор-модуль F/H также можно рассматривать как градуированный: $(F/H)_s = (F_s/H_s)$, причём

$$\omega_{F/H}(s) = \omega_F(s) - \omega_H(s) = \sum_{i=1}^{n} \binom{s+m-1}{m-1} - \omega_H(s).$$

Иногда этот многочлен называют характеристическим многочленом системы обобщённых полиномиальных уравнений Σ (или системой D-уравнений) и обозначают через ω_Σ.

Как следует из теоремы 2 (положим $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $M = F/H$), характеристический многочлен системы обобщённых полиномиальных уравнений можно вычислять так же, как в дифференциальном случае [7, теорема 4.3.5]:

$$\omega_\Sigma(s) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_1 \omega_{E_i}(s), \tag{3}$$

где $E_i \subset \mathbb{N}_0^m$.

Нас интересует следующий вопрос.

Вопрос 1. Как оценить обобщённую типовую размерность Σ через известные величины $e_1, \ldots, e_n$?

В дифференциальной алгебре этот вопрос впервые поставил Д. Ритт, который занимался системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Позднее Э. Колчин решил эту задачу в коразмерности 1 для нелинейной системы. Его оценка (см. [6, с. 199]) следующая: типовая дифференциальная размерность не превосходит $e_1 + \ldots + e_n$.

В коразмерности 2 известен следующий результат (см. [7, 5.6.7]). Пусть $n = 1$. Тогда $a_{m-2}(\omega_\Sigma) \leqslant e_1^2$.

Оба эти результата верны и для систем однородных обобщённых полиномиальных уравнений.

3. Основные результаты

Итак, для однородных идеалов кольца обобщённых многочленов в коразмерностях 1 и 2 выполняется классическая теорема Безу. Если коразмерность больше 2, в общем случае это неверно. Рассмотрим пример.

Пример 6. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, x_2, x_3)$, $n = 1$, $D = \mathcal{F}\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, y_1\}$ — кольцо дифференциальных операторов над кольцом многочленов от одной переменной y_1 (см. пример 3) над полем $\mathcal{F}$, $m = 4$, $e_i = k$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $\partial_i(x_j) = \delta_i^j$, $\Sigma = \{\partial_1^k f_1, (\partial_2^k + x_1\partial_3^k) f_1\}$. Утверждается, что обобщённая коразмерность Σ равна 3, а обобщённая типовая размерность равна $k^2(k+1)^2/2$.

Рассмотрим степенной ранжир $\partial_1 > \partial_2 > \partial_3 > y_1$ и найдём однородный базис Грёбнера идеала Σ. Он состоит из элементов

$$G = \{\partial_1^k f_1, (\partial_2^k + x_1\partial_3^k) f_1, \partial_1^{k-1}\partial_3^k y_1 f_1, \partial_1^{k-2}\partial_3^{2k} y_1^2 f_1, \ldots, \partial_1^{k-i}\partial_3^{i*k} y_1^i f_1, \ldots, \partial_3^{k^2} y_1^k f_1\}.$$

Тогда согласно уравнению (3) $\omega_\Sigma = \Delta_1 \omega_E$, где

$$E = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & k & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k-i & 0 & ik & i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & k^2 & k \end{pmatrix}.$$

Одним из основных методов вычисления размерностного многочлена матрицы является применение формулы (см. [7, теорема 2.2.10])

$$\omega_E(s) = \omega_{E \cup e} + \omega_H\bigl(s - \operatorname{ord}(e)\bigr), \tag{4}$$

где $e \in N_0^m$, H — матрица, полученная вычитанием из каждой строки E вектора e (при этом отрицательные числа заменяются нулями).

Применив формулу (4) для $e = (0, k, 0, 0)$ k раз, получим $\omega_E = k\omega_{E_1}$, где

$$E_1 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k-1 & k & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k-i & ik & i \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & k^2 & k \end{pmatrix}.$$

По [7, теорема 2.2.17] $\Delta_1(\omega_{E_1}) = \omega_{E_2} + \omega_{E_3}$, где E_2, E_3 — матрицы, полученные вычёркиванием соответственно второго и третьего столбца из матрицы E_1. Применив [7, следствие 2.3.21], получим $\omega_{E_2} = 1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2$ и $\omega_{E_3} = k(1 + 2 + \ldots + k) = k^2(k+1)/2$, поэтому $\omega_E = k^2(k+1)^2/2$. Если бы для системы Σ выполнялась классическая теорема Безу, мы должны были бы иметь $\omega_\Sigma = k^2(k+1)^2/2 \leqslant k^3$ (система имеет коразмерность 3, при этом у неё две однородные образующие), что неверно. Таким образом, в коразмерности 3 для обобщённых градуированных идеалов не выполняется теорема Безу.

Теорема 3. *Пусть D — градуированное кольцо обобщённых многочленов над полем $\mathcal{F}$ от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $F = \bigoplus_{i=1}^{n} Df_i$ — свободный градуированный D-модуль с образующими $f_1, \ldots, f_n$, $\Sigma \subset F$ — система однородных D-уравнений. Пусть $\operatorname{ord}_{f_j} h \leqslant e_j$ для всех $h \in \Sigma$. Тогда верны следующие оценки*:

- *если коразмерность системы равна 0, то типовая размерность не превосходит n;*
- *если коразмерность системы Σ равна 1, то $\tau_d(\Sigma) \leqslant e_1 + \ldots + e_n$;*
- *если коразмерность $d(\Sigma)$ равна 2, то*

$$\tau_d(\Sigma) \leqslant (e_1 + \ldots + e_n) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i + \prod_{i<j} e_i e_j \leqslant (e_1 + \ldots e_n)^2.$$

Эта оценка достигается, см. пример из [2].

Сначала докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть в условиях теоремы* 3 *обобщённая коразмерность системы Σ больше* 1. *Тогда*

$$\omega_\Sigma(s) = \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{s+m-1}{m-1} - \binom{s+m-1-\tilde{e}_i}{m-1} \right) - w(s), \tag{5}$$

где $w(s+e) \in W$, $e = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (e_i)$, $\tilde{e}_i \leqslant e_i$.

Доказательство. Обозначим через H подмодуль D-модуля F, порождённый системой Σ. D является кольцом Оре, и, так как коразмерность Σ больше 1, $\operatorname{rk}_D F/H = 0$, откуда следует, что $\operatorname{rk}_D H = n$. Выберем n D-независимых уравнений из системы Σ, и пусть ${}_D M$ — D-фактор-модуль F по этим уравнениям (обозначим их $\Sigma_1 = \{h_1, \ldots, h_n\}$). Имеем точную последовательность градуированных D-модулей:

$$0 \to N \to M \to F/H \to 0. \tag{6}$$

Можно считать, что N — градуированный подмодуль модуля M, порождённый уравнениями $\Sigma \setminus \Sigma_1 = \bigcup\limits_j g_j$, и пусть α^j — порядки этих уравнений. Сдвинутая градуировка, связанная с выбором этой системы однородных образующих ($N_s = \sum\limits_j D_{s-\alpha^j} g_j$), и градуировка, индуцированная с M ($N_s = M_s \cap N$), совпадают.

Пусть $e = \max(e_1, \ldots, e_n)$. Из теоремы 2 следует, что $\omega_N(s+e) \in W$. Действительно, образующие g_j модуля N имеют порядки α^j, не большие чем e, и из формулы (2) получаем, что

$$\omega_N(s+e) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j(s+e-\alpha^j),$$

где $\omega_j \in W$ (здесь $k = \mathrm{Card}(\Sigma) - n$). Так как $\alpha^j \leqslant e_j$, учитывая замкнутость W относительно положительного сдвига и суммирования, получаем, что $\omega_N(s+e) \in W$.

Для вычисления $\omega_M = \omega_{\Sigma_1}$ воспользуемся D-независимостью уравнений Σ_1. Доказательство леммы 5.8.2 из [7] можно провести и для системы обобщённых полиномиальных уравнений, поэтому $J(\Sigma_1) \neq \infty$, где J — число Якоби матрицы $(\mathrm{ord}_{f_i} h_j)_{i,j=1}^n$, $h_i \in \Sigma_1$. Выбрав конечную диагональную сумму матрицы и перенумеровав уравнения Σ_1, так как $\mathrm{ord}\, h_{f_i} h_i \neq \infty$, получим

$$\omega_{\Sigma_1}(s) = \omega_F(s) - \sum_{i=1}^n \binom{s+m-1-\mathrm{ord}\, h_i}{m-1} = \\ = \sum_{i=1}^n \binom{s+m-1}{m-1} - \sum_{i=1}^n \binom{s+m-1-\tilde{e}_i}{m-1},$$

где $\tilde{e}_i = \mathrm{ord}_{f_i} h_i \leqslant e_i$. Для доказательства леммы осталось воспользоваться равенством $\omega_M = \omega_N + \omega_{F/H}$, полученным из последовательности (6). □

Вернёмся к доказательству теоремы 3.

Доказательство. Случай $d(\Sigma) = m-1$ непосредственно следует из теоремы 2.

Пусть $d(\Sigma) = m-2$. Из леммы 1 следует, что

$$\sum_{i=1}^n \big((s+1) - (s+1-\tilde{e}_i)\big) - \Delta_1^{m-2}\omega_\Sigma(s) \in W$$

(так как W замкнуто относительно операции Δ_1, см. формулу (1)). Тогда

$$\sum_{i=1}^n \tilde{e}_i - \tau_d(\Sigma) \in W.$$

Поскольку минимизирующие коэффициенты многочлена из W неотрицательны, отсюда сразу получаем, что

$$\tau_d(\Sigma) \leqslant \sum_{oi=1}^n \tilde{e}_i \leqslant \sum_{i=1}^n e_i.$$

Пусть $d(\Sigma) = m-3$. Как и выше, к соотношению (5) применяем оператор Δ_1^{m-3}. Получаем

$$\Delta_1^{m-3}\left(\sum_{i=1}^n \binom{s+m-1}{m-1} - \binom{s+m-1-\tilde{e}_i}{m-1}\right) - \tau_d(\Sigma) = w'(s), \quad w'(s+e) \in W,$$

поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^n \binom{s+2}{2} - \binom{s+2-\tilde{e}_i}{2}\right) - \tau_d(\Sigma) = w'(s), \quad w'(s+e) \in W,$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{e}_i(s+1)-\binom{\tilde{e}_i}{2}\right)-\tau_d(\Sigma)=w'(s).$$

Пусть минимизирующие коэффициенты многочлена $w'(s+e)$ равны (b_1,b_0). Тогда

$$w'(s+e)=b_1(s+1)-\binom{b_1}{2}+b_0$$

и $b_1\geqslant 0$, $b_0\geqslant 0$. Имеем

$$\tau_d(\Sigma)=\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{e}_i-b_1\right)(s+1)-\sum_{i=1}^{n}\binom{\tilde{e}_i}{2}+eb_1+\binom{b_1}{2}-b_0.$$

Приравняв к нулю коэффициент при s в правой части равенства, получим

$$b_1=\sum_{i=1}^{n}\tilde{e}_i,$$

откуда, учитывая, что $b_0\geqslant 0$, получаем

$$\tau_d(\Sigma)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{e}_i\right)e-\sum_{i=1}^{n}\binom{\tilde{e}_i}{2}+\binom{\sum_{i=1}^{n}\tilde{e}_i}{2}=$$
$$=\prod_{i<j}\tilde{e}_i\tilde{e}_j+\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{e}_i\right)e\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}e_i\right)\max_{1\leqslant i\leqslant n}e_i+\prod_{i,j=1,i\leqslant j}^{n}e_ie_j.\quad\square$$

Далее будем рассматривать однородные идеалы в кольце обобщённых многочленов, т. е. случай $n=1$. Пусть идеал порождён элементами степени не выше e. Если обобщённый тип идеала равен $m-2$, то из теоремы 3 следует, что его типовая размерность не превосходит e^2, т. е. выполняется классическая теорема Безу.

Теорема 4. *Пусть D — градуированное кольцо обобщённых многочленов над полем $\mathcal{F}$ от переменных $T=\{x_1,\dots,x_m\}$, $\Sigma\subset D$ — система однородных D-уравнений. Пусть $\operatorname{ord}h\leqslant e$ для всех $h\in\Sigma$. Тогда верны следующие оценки:*

— *если коразмерность Σ равна 3, то $\tau_d(\Sigma)\leqslant e^2(e+1)^2/2$ (согласно примеру 6 эта оценка достигается);*

— *если коразмерность Σ равна 4, то*

$$\tau_d(\Sigma)\leqslant e^2(e+1)^2(3e^4+6e^3+11e^2+8e+8)/24;$$

— *если коразмерность Σ равна 5, то*

$$\tau_d(\Sigma)\leqslant e^2(e+1)^2(288+480e+952e^2+1264e^3+1592e^4+1648e^5+1529e^6+$$
$$+1174e^7+775e^8+420e^9+183e^10+54e^11+9e^12)(e+1)^2/1152;$$

— *в любой коразмерности $\tau > 0$ обобщённая типовая размерность $\tau_d(\Sigma)$ не превосходит $O(e^{2^{\tau-1}})$.*

Доказательство основано на лемме 1 и том факте, что минимизирующие коэффициенты многочлена из множества W неотрицательны. В качестве Σ' выберем элемент Σ максимального порядка. Пусть он равен e. Тогда в выражении (5) $n = 1$, $\tilde{e}_1 = e$.

Рассмотрим случай коразмерности 3. Применяем оператор Δ_1^{m-4} к обеим частям равенства (5):

$$\tau_d(\Sigma) = \left(\binom{s+3}{3} - \binom{s+3-e}{3}\right) - w'(s), \quad w'(s+e) \in W.$$

Пусть (b_2, b_1, b_0) — последовательность минимизирующих коэффициентов многочлена w'. Согласно определению 1 можно явно выразить стандартные коэффициенты w' через числа b_2, b_1, b_0 и найти коэффициенты «сдвинутого» многочлена $w'(s+e)$. Приравняв коэффициенты при s^2, s в правой части уравнения к 0, получим $b_2 = e$, $b_1 = e^2$ и

$$\tau_d(\Sigma) = \left(\binom{s+3}{3} - \binom{s+3-e}{3}\right) - \left(\binom{s+3-e}{3} - \binom{s+3-2e}{3}\right) - \\ - \left(\binom{s+2-2e}{2} - \binom{s+2-2e-b_1}{2}\right) - b_0, \quad b_0 \geqslant 0.$$

Подставляя $s = -1$, получаем $\tau_d(\Sigma) \leqslant e^2(e+1)^2/2$.

Таким же образом вычисляются оценки в любой коразмерности. Каждый раз будем получать многочлен от e.

Если не важны конкретные коэффициенты этого многочлена, а только его степень по e, утверждается, что она равна $2^{\tau-1}$. Действительно, пусть d — обобщённая типовая размерность системы Σ, т. е. коразмерность τ многочлена ω_Σ равна $\tau = m - 1 - d$. Применяем в (5) Δ_1^d (при этом $\Delta_1^d\omega_\Sigma$ — многочлен нулевой степени, т. е. константа, равная $\tau_d(\Sigma)$). Из сравнения степеней получим, что степень $w' = \Delta_1^d w$ меньше τ. Пусть минимизирующие коэффициенты многочлена w' равны $(0, \ldots, 0, b_{\tau-1}, \ldots, b_0)$. Заменим в полученном уравнении переменную s на e и получим следующее соотношение:

$$\tau_d(\Sigma) = \binom{s+\tau+e}{\tau} - \binom{s+\tau}{\tau} - w'(s).$$

Используем определение 1 и получим

$$\tau_d(\Sigma) = \binom{s+\tau+e}{\tau} - \binom{s+\tau}{\tau} - \sum_{k=\tau}^{1}\left(\binom{s+k-\sum\limits_{j=\tau}^{k} b_j}{k} - \binom{s+k-\sum\limits_{j=\tau}^{k-1} b_j}{k}\right). \quad (7)$$

Обозначим

$$c_i = \sum_{j=i}^{\tau-1} b_j$$

и перепишем уравнение (7) в виде

$$\tau_d(\Sigma) = \binom{s+\tau+e}{\tau} - \binom{s+\tau}{\tau} - \sum_{k=\tau}^{1}\left(\binom{s+k-c_k}{k} - \binom{s+k-c_{k-1}}{k}\right), \quad (8)$$

Используя тождество

$$\binom{s+k-1-a}{k} = \binom{s+k-a}{k} - \binom{s+k-1-a}{k-1},$$

преобразуем уравнение (8) к виду

$$\tau_d(\Sigma) = \binom{s+\tau+e}{\tau} - 2\binom{s+\tau}{\tau} + \sum_{k=\tau}^{2}\binom{s+k-1-c_{k-1}}{k} + (s+1-c_0). \quad (9)$$

Возьмём $\Delta_1^{\tau-1}$ от обеих частей равенства (9). Будем иметь

$$0 = (s+1+e) - 2(s+1) + (s-c_{\tau-1}) + 1,$$

следовательно, $c_{\tau-1} = e$.

Индукцией по i докажем, что для $1 \leqslant i < \tau-1$ выполняется

$$c_i = O\big(e^{2^{(\tau-1)-i}}\big).$$

Пусть $c_j = O\big(e^{2^{(\tau-1)-j}}\big)$ для всех j, $i \leqslant j < \tau-1$. Возьмём Δ_1^{i-1} от обеих частей равенства (9) и получим

$$0 = \binom{s+\tau-i+1+e}{\tau-i+1} - 2\binom{s+\tau-i+1}{\tau-i+1} + \sum_{k=\tau}^{i-1}\binom{s+k-i-c_{k-1}}{k-i+1}.$$

Подставляя вместо s число -1, получаем

$$0 = \binom{\tau-i+e}{\tau-i+1} - 2\binom{\tau-i}{\tau-i+1} + \sum_{k=\tau}^{i+1}\binom{k-i-1-c_{k-1}}{k-i+1} - c_{i-1}.$$

Сделаем в последней сумме замену $j = k-i+1$ и получим

$$0 = \binom{\tau-i+e}{\tau-i+1} + \sum_{j=2}^{j=\tau+1-i}\binom{j-c_{i+j-2}}{j} - c_{i-1}.$$

Теперь мы имеем формулу, выражающую c_{i-1} через $c_i, \ldots, c_{\tau-1}$:

$$c_{i-1} = \sum_{j=2}^{\tau-i+1} O\left(\binom{c_{i+j-2}}{j}\right) = \sum_{j=2}^{\tau-i+1} O(c_{i+j-2}^{j}) = \sum_{j=2}^{\tau-i+1} O\big(e^{j2^{\tau-i-j+1}}\big) =$$

$$= O\big(e^{2\cdot 2^{\tau-1-i}}\big) + \sum_{j=3}^{\tau-i+1} O\big(e^{j2^{\tau-i-j+1}}\big) = O\big(e^{2^{\tau-i}}\big) + \sum_{j=3}^{\tau-i+1} O\big(e^{2^{j-1}\cdot 2^{\tau-i-j+1}}\big) =$$

$$= O\big(e^{2^{\tau-i}}\big) + \sum_{j=3}^{\tau-i} O\big(e^{2^{\tau-i}}\big) = O\big(e^{2^{\tau-i}}\big)$$

(мы использовали индуктивное предположение и тот факт, что $j \leqslant 2^{j-1}$ для всех $j \geqslant 2$).

Подставляя $s = -1$ в уравнение (9), получаем $\tau_d(\Sigma) = O(c_1^2) - c_0 \leqslant O(2^{\tau-1})$. $\square$

Неизвестно, достигается ли полученная дважды экспоненциальная оценка типовой размерности градуированного идеала кольца обобщённых многочленов. Отметим, что в [8] доказано, что для степеней элементов базиса Грёбнера полиномиального идеала дважды экспоненциальная оценка достигается снизу.

Литература

[1] Кондратьева М. В. Описание множества минимальных дифференциальных размерностных многочленов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1988. — № 1. — С. 35—39.

[2] Кондратьева М. В. Оценка типовой дифференциальной размерности системы линейных дифференциальных уравнений // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 5. — С. 259—269.

[3] Dubé T. The structure of polynomial ideals and Gröbner bases // SIAM J. Comput. — 1990. — Vol. 19, no. 4. — P. 750—773.

[4] Grigoriev D. Weak Bezout inequality for D-modules // J. Complexity. — 2005. — Vol. 21. — P. 532—542.

[5] Chistov A., Grigoriev D. Complexity of a standard basis of a D-module // St. Petersburg Math. J. — 2009. — Vol. 20. — P. 709—736.

[6] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — Academic Press, 1973.

[7] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[8] Mayr E. W., Meyer A. R. The complexity of a word problem for commutative semigroups and polynomial ideals // Adv. Math. — 1982. — Vol. 46. — P. 305—329.

[9] Ritt J. Differential Algebra. — New York: Amer. Math. Soc., 1950.