О проблеме обобщённой сопряжённости в группе $F/N_1 \cap N_2$*

О. В. КУЛИКОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: olga.kulikova@mail.ru

УДК 512.54.05

Ключевые слова: проблема обобщённой сопряжённости, условия малых сокращений, картинки над копредставлениями групп.

Аннотация

Пусть F — свободная группа, порождённая конечным алфавитом A. Пусть N_1 (N_2) — нормальное замыкание конечного непустого симметризованного множества R_1 (соответственно R_2) элементов в F. Ранее автором были получены условия, достаточные для разрешимости проблемы сопряжённости в группе $F/N_1 \cap N_2$. Настоящая работа продолжает эти исследования и посвящена разрешимости проблемы обобщённой сопряжённости в группе $F/N_1 \cap N_2$. В частности, получено, что для разрешимости проблемы обобщённой сопряжённости в $F/N_1 \cap N_2$ достаточно потребовать, чтобы множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяло условию малых сокращений $C'(1/6)$.

Abstract

O. V. Kulikova, On the multiple conjugacy problem in group $F/N_1 \cap N_2$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 2, pp. 163—183.

Let F be a free group generated by a finite alphabet A. Let N_1 (N_2) be the normal closure of a finite non-empty symmetrized set R_1 (respectively, R_2) of elements in F. Earlier, one obtained the conditions sufficient for the solvability of the conjugacy problem in the group $F/N_1 \cap N_2$. The present paper is a continuation of this research and is devoted to the solvability of the multiple conjugacy problem in $F/N_1 \cap N_2$. In particular, we get that if $R_1 \cup R_2$ satisfies the small cancellation condition $C'(1/6)$, then the multiple conjugacy problem is solvable in $F/N_1 \cap N_2$.

Введение

Пусть F — свободная группа, порождённая конечным алфавитом A. Пусть N_1 (N_2) — нормальное замыкание конечного непустого множества R_1 (соответственно R_2) элементов в F. Считаем, что множество R_i ($i = 1, 2$) симметризованно, т. е. все элементы из R_i циклически приведены и для каждого r из R_i все циклические перестановки элементов r и r^{-1} также лежат в R_i. Обозначим F/N_1N_2 через G, а F/N_i через G_i ($i = 1, 2$).

*Работа поддержана грантом РФФИ № 19-01-00591.

© 2020 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Будут использоваться следующие обозначения. Графическое (побуквенное) равенство слов $u, v \in F$ будет обозначаться $u \equiv v$. Если слова $u, v \in F$ представляют равные элементы в некоторой группе H, будем писать, что $u = v$ в H. Равенство в F будет обозначаться просто $u = v$.

В [3] были получены условия, достаточные для разрешимости проблемы сопряжённости в группе $F/N_1 \cap N_2$. Настоящая работа является продолжением [3] и посвящена разрешимости проблемы обобщённой сопряжённости в группе $F/N_1 \cap N_2$. Говорят, что в некоторой группе H разрешима проблема обобщённой сопряжённости, если существует алгоритм, позволяющий для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых слов $u_1, \ldots, u_k$ и $v_1, \ldots, v_k$ определить, существует или нет такое слово h, что $h^{-1}u_jh = v_j$ в H для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$. При $k = 1$ получаем обычную проблему сопряжённости.

Проблема обобщённой сопряжённости для различных групп рассматривалась в [1, 7, 10, 11, 17] и других работах. В [13] Д. Коллинз доказал, что разрешимость проблемы сопряжённости не влечёт разрешимость проблемы обобщённой сопряжённости. В [10] М. Р. Бридсон и Дж. Хоуи привели примеры конечно определённых групп, в которых разрешима проблема сопряжённости, но не разрешима проблема обобщённой сопряжённости.

В настоящей работе мы будем предполагать, что в случае положительного ответа алгоритм (из определения проблемы обобщённой сопряжённости) предъявляет соответствующее слово h.

Обобщением теоремы 1 из [3] является следующая теорема, доказательство которой приведено в разделе 2.

Теорема 1. *Пусть выполняется следующее* ($i = 1, 2$).

1.1. *В G_i разрешима проблема обобщённой сопряжённости.*

1.2. *В G_i существует алгоритм, позволяющий по несократимому слову $x \in F$, $x \neq 1$, определить все $z \in F$, такие что $x \in \langle z \rangle$ в G_i, причём различных таких элементов z из G_i конечное число.*

1.3. *В G_i централизатор любого неединичного элемента является циклическим.*

2.1. *В G разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу.*

2.2. *Копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим.*

Тогда в $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема обобщённой сопряжённости.

Здесь, как и в [3], используется понятие аторичности. Определение этого понятия и связанное с ним определение картинки будут даны в разделе 1 настоящей работы. Кратко, картинки можно описать как геометрический объект, двойственный к диаграммам ван Кампена (о картинках см., например, работу [9] и ссылки в ней, о диаграммах ван Кампена см. [19]).

Отметим, что фактически в доказательстве теоремы 1 будет использовано не само условие 1.3, а два следствия из него:

a) если $x^n \neq 1$ в G_i, то из $x^ny = yx^n$ в G_i следует, что $xy = yx$ в G_i для любых $x, y \in G_i$, $n \in \mathbb{N}$;

б) в G_i любые два перестановочных элемента принадлежат одной циклической подгруппе.

В случае аторичности условие б) выполняется автоматически по теореме 13.5 из [6].

В качестве примера применения теоремы 1 рассмотрим словесно-гиперболические группы [2]. В любой словесно-гиперболической группе разрешимы проблема обобщённой сопряжённости [10, 14], проблема существования корня из элемента [5, теорема 2], проблемы нахождения порядка элемента и вхождения в циклическую подгруппу [5, теорема 3]. Кроме того, в словесно-гиперболической группе без кручения централизатор любого неединичного элемента является циклической подгруппой. Поэтому из теоремы 1 получаем следствие 1.

Следствие 1. *Если F/N_1, F/N_2 и F/N_1N_2 являются словесно-гиперболическими группами, в F/N_1 и F/N_2 нет кручения, а копредставление $\langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим, то в $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема обобщённой сопряжённости.*

Рассмотрим несколько примеров применения следствия 1 для групп с условием малых сокращений $C'(\lambda)$, $C(k)$ (определение см. в [19]).

Конечно определённая группа, удовлетворяющая условию $C(7)$, является словесно-гиперболической [15, следствие 4.1]. Из условия $C(7)$ следует аторичность копредставления (доказательство этого факта аналогично теореме 13.3 из [6]). Если в группе, удовлетворяющей условию $C(7)$, ни одно из определяющих соотношений не является истинной степенью, то в группе нет кручения (см., например, [9]). Получаем следствие 2.

Следствие 2. *Если множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C(7)$ и не содержит истинных степеней, то в группе $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема обобщённой сопряжённости.*

Учитывая, что из $C'(\lambda)$ следует $C(k)$ для $\lambda \leqslant 1/(k-1)$, а централизатор любого неединичного элемента в группе с условием $C'(1/6)$ является циклической подгруппой [21, 22], получаем следствие 3.

Следствие 3. *Если множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C'(1/6)$, то в группе $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема обобщённой сопряжённости.*

Отметим, что группу $F/N_1 \cap N_2$ можно рассматривать как подгруппу прямого произведения F/N_1 и F/N_2 (при этом она является подпрямым произведением F/N_1 и F/N_2). Как показано в [20], существует конечно порождённая подгруппа прямого произведения двух неабелевых свободных групп, в которой не разрешима проблема сопряжённости. Как показано в [8], существует словесно-гиперболическая группа без кручения Γ и конечно определённая подгруппа $P \subset \Gamma \times \Gamma$, в которой не разрешима проблема сопряжённости. С другой стороны, проблема сопряжённости разрешима в любой конечно определённой подгруппе прямого произведения свободных групп и групп поверхностей [12, теорема 5.4]. Для сравнения отметим, что в теореме 1 данной статьи для непересекающихся R_1 и R_2 группа $F/N_1 \cap N_2$ конечно определённая тогда и только тогда, когда

F/N_1N_2 конечная. Действительно, группа $F/[N_1, N_2]$ конечно определённая тогда и только тогда, когда F/N_1N_2 конечная [4], а условие 2.2 теоремы 1 для непересекающихся R_1 и R_2 обеспечивает равенство $N_1 \cap N_2 = [N_1, N_2]$ (см., например, [16, 18]).

1. Определение аторичности

Пусть N — нормальное замыкание симметризованного множества R слов в F.

Картинкой P над копредставлением $\langle A \mid R \rangle$ на ориентированной поверхности T будем называть конечный набор «вершин» $V_1, \ldots, V_n \in T$ вместе с конечным набором простых связных попарно непересекающихся ориентированных «рёбер» $E_1, \ldots, E_m \in T \setminus \big\{\{V_1, \ldots, V_n\} \cup \partial T\big\}$, помеченных словами из F. При этом ребро может соединять две (возможно совпадающие) вершины, вершину и точку на ∂T или две различные точки на ∂T. Более того, некоторые рёбра могут не иметь ни начала, ни конца и являться циклами, такие рёбра будут называться рёбрами-циклами.

Ниже в работе будут рассматриваться только те пути на T, которые не проходят через вершины и пересекают рёбра картинки P конечное число раз (более того, если путь пересекает ребро, то он действительно пересекает, а не просто касается его). При движении вдоль произвольного ориентированного пути γ в положительном направлении мы встречаем последовательность рёбер $E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}$ с метками $g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}$. Эти метки образуют слово $g_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \cdot \ldots \cdot g_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$, где $\varepsilon_{i_j} \in \{1, -1\}$ равняется локальному индексу пересечения ребра E_{i_j} и пути γ. Это слово будет называться *словом вдоль пути* γ (или *меткой* γ) и обозначаться через $\mathrm{Lab}^+(\gamma)$. Движение по γ в отрицательном направлении даёт слово $\mathrm{Lab}^-(\gamma) \equiv \mathrm{Lab}^+(\gamma)^{-1}$.

Если путь γ замкнутый, рассмотрим некоторую точку p на γ, не лежащую ни на каком ребре картинки P. Слово, читаемое вдоль γ начиная с точки p, будет обозначаться через $\mathrm{Lab}_p^+(\gamma)$ или через $\mathrm{Lab}_p^-(\gamma)$ (в зависимости от направления движения вдоль γ). Меняя расположение точки p, мы получаем то же слово с точностью до циклической перестановки.

Для каждой вершины V картинки P рассмотрим окружность Σ маленького радиуса с центром в V и точку $p \in \Sigma$, не принадлежащую никакому ребру картинки P. Слово $\mathrm{Lab}_p^+(\Sigma)$ называется *меткой вершины* V. Для окончательного определения картинки над копредставлением $\langle A \mid R \rangle$ на поверхности T остаётся потребовать, чтобы метки всех вершин в P принадлежали R.

Ниже мы будем рассматривать картинки на поверхности T, где T — тор (торические картинки), диск (дисковые картинки) или кольцо (кольцевые картинки).

В картинке на диске *граничной меткой* картинки называется слово $\mathrm{Lab}_{\bar{p}}^+(\bar{\Sigma})$, где $\bar{\Sigma}$ — окружность около границы диска ∂T, а $\bar{p}$ — точка на окружности $\bar{\Sigma}$, не принадлежащая рёбрам.

Следующая лемма — хорошо известный результат (его можно получить из теоремы 1.1 и леммы 1.2 главы V в [19] и двойственности).

Лемма 1. *Пусть W — непустое слово в алфавите A. Тогда W представляет единицу в группе $H = F/N$ тогда и только тогда, когда существует дисковая картинка над копредставлением $\langle A \mid R \rangle$ группы H с граничной меткой, равной W.*

Диполем называются две различные вершины V_1 и V_2 картинки P, соединённые ребром, параллельно которому можно провести простой путь ψ, не пересекающий никакие рёбра и не проходящий через вершины, соединяющий точки p_1 и p_2 на окружностях Σ_1 и Σ_2 вокруг этих вершин так, что $\mathrm{Lab}^{+}_{p_1}(\Sigma_1) \equiv \mathrm{Lab}^{-}_{p_2}(\Sigma_2)$.

Копредставление $\langle A \mid R \rangle$ называется *аторическим* (см., например, [6]), если любая связная торическая картинка над копредставлением $\langle A \mid R \rangle$, содержащая вершины, содержит диполь.

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 состоит из двух частей: геометрической и алгебраической.

Геометрическая часть доказательства теоремы 1

Ниже будем использовать факт, что из условия 1.1 теоремы 1 следует разрешимость проблемы равенства в группе G_i, причём любое слово w, равное единице в G_i, эффективно выражается через определяющие соотношения из R_i. Поэтому по лемме 1 можно эффективно построить дисковую картинку над копредставлением $G_i = \langle A \mid R_i \rangle$ с граничной меткой, равной w.

Пусть $u_1, \ldots, u_k$ и $v_1, \ldots, v_k$ — два набора несократимых слов в F. Для каждого $i \in \{1, 2\}$ по условию 1.1 теоремы 1 существует алгоритм, определяющий, существует ли $h_i \in F$, такой что $h_i^{-1} u_j h_i = v_j$ в $G_i = F/N_i$ для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$. Если такого h_i не существует хотя бы для одного i, то, очевидно, не существует такого $h \in F$, чтобы $h^{-1} u_j h = v_j$ в $F/N_1 \cap N_2$ для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$. Поэтому далее считаем, что для каждого $i \in \{1, 2\}$ найдено слово $h_i \in F$, такое что $h_i^{-1} u_j h_i = v_j$ в G_i, т. е. $h_i^{-1} u_j h_i v_j^{-1} = 1$ в G_i, для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$.

По условию 1.1 теоремы 1 для каждого $j \in \{1, \ldots, k\}$ существует дисковая картинка $P_1^{(j)}$ над копредставлением $G_1 = \langle A \mid R_1 \rangle$ с граничной меткой, равной тождественно слову $h_1^{-1} u_j h_1 v_j^{-1}$, такая что в $P_1^{(j)}$ все рёбра помечены буквами. При этом на границе $\partial P_1^{(j)}$ картинки $P_1^{(j)}$ зафиксируем четыре точки $a_1^{(j)}$, $b_1^{(j)}$, $c_1^{(j)}$, $d_1^{(j)}$, не лежащие на рёбрах и разбивающие $\partial P_1^{(j)}$ на четыре подпути так, чтобы вдоль подпутей $\left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right]$, $\left[b_1^{(j)}, c_1^{(j)}\right]$, $\left[c_1^{(j)}, d_1^{(j)}\right]$,

$\left[d_1^{(j)}, a_1^{(j)}\right]$ были написаны слова, тождественно равные h_1^{-1}, u_j, h_1, v_j^{-1} соответственно. Для каждого $j \in \{1, \dots, k-1\}$ склеим подпуть $\left[d_1^{(j)}, c_1^{(j)}\right]$ картинки $P_1^{(j)}$ и подпуть $\left[a_1^{(j+1)}, b_1^{(j+1)}\right]$ картинки $P_1^{(j+1)}$. В конце склеиваем подпуть $\left[d_1^{(k)}, c_1^{(k)}\right]$ картинки $P_1^{(k)}$ и подпуть $\left[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}\right]$ картинки $P_1^{(1)}$ и получаем кольцевую картинку $\bar{P}_1$ с двумя граничными циклами. Один из этих граничных циклов имеет метку $u_1 \dots u_k$ и образован подпутями $\left[b_1^{(1)}, c_1^{(1)}\right], \dots, \left[b_1^{(k)}, c_1^{(k)}\right]$. Второй из этих граничных циклов имеет метку $v_1 \dots v_k$ и образован подпутями $\left[a_1^{(1)}, d_1^{(1)}\right], \dots, \left[a_1^{(k)}, d_1^{(k)}\right]$.

Аналогично, заменяя в обозначениях индекс 1 на индекс 2, по словам $h_2^{-1} u_j h_2 v_j^{-1}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, строится кольцевая картинка над копредставлением $G_2 = \langle A \mid R_2 \rangle$. Её зеркальное отражение с изменением ориентации рёбер даёт кольцевую картинку $\bar{P}_2$ над $G_2 = \langle A \mid R_2 \rangle$.

Склеиваем $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ по их границам и получаем картинку P на торе T над копредставлением $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$. При этом $\left[a_1^{(j)}, d_1^{(j)}\right]$ $\left(\left[b_1^{(j)}, c_1^{(j)}\right]\right)$ склеивается с $\left[a_2^{(j)}, d_2^{(j)}\right]$ (соответственно с $\left[b_2^{(j)}, c_2^{(j)}\right]$) и образует путь, который обозначим через $\underline{\mathrm{Equ}}^{(j)}$ (соответственно через $\overline{\mathrm{Equ}}^{(j)}$), $j \in \{1, \dots, k\}$. Точку, полученную из склееных точек $a_1^{(j)}$ и $a_2^{(j)}$ ($b_1^{(j)}$ и $b_2^{(j)}$), обозначим через $p_v^{(j)}$ (соответственно через $p_u^{(j)}$), $j \in \{1, \dots, k\}$. Цикл, полученный из склеенных $\left[b_1^{(1)}, c_1^{(1)}\right], \dots, \left[b_1^{(k)}, c_1^{(k)}\right]$ $\left(\left[a_1^{(1)}, d_1^{(1)}\right], \dots, \left[a_1^{(k)}, d_1^{(k)}\right]\right)$, обозначим через $\underline{\mathrm{Equ}}$ (соответственно через $\overline{\mathrm{Equ}}$).

Путь на торе, полученный из подпути $\left[b_1^{(j)}, a_1^{(j)}\right]$ $\left(\left[b_2^{(j)}, a_2^{(j)}\right]\right)$, обозначим через $\mathrm{Conj}_1^{(j)}$ (соответственно через $\mathrm{Conj}_2^{(j)}$). Цикл, полученный склейкой по концевым точкам $\mathrm{Conj}_1^{(j)}$ и $\mathrm{Conj}_2^{(j)}$, обозначим через $\mathrm{Conj}^{(j)}$.

Циклы $\underline{\mathrm{Equ}}$ и $\overline{\mathrm{Equ}}$ называются *экваторами*. Точки $p_u^{(j)}$, $p_v^{(j)}$ называются *полюсами*. Экватор $\underline{\mathrm{Equ}}$ ($\overline{\mathrm{Equ}}$) делится полюсами $p_v^{(1)}, \dots, p_v^{(k)}$ (соответственно $p_u^{(1)}, \dots, p_u^{(1)}$) на k частей $\underline{\mathrm{Equ}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathrm{Equ}}^{(k)}$ (соответственно $\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}, \dots, \overline{\mathrm{Equ}}^{(k)}$).

Зафиксируем положительное направление движения вдоль экваторов так, чтобы

$$\mathrm{Lab}^+_{p_v^{(1)}}\left(\underline{\mathrm{Equ}}\right) \equiv v_1 \dots v_k, \quad \mathrm{Lab}^+_{p_u^{(1)}}\left(\overline{\mathrm{Equ}}\right) \equiv u_1 \dots u_k,$$

при этом

$$\mathrm{Lab}^+_{p_v^{(j)}}\left(\underline{\mathrm{Equ}}^{(j)}\right) \equiv v_j, \quad \mathrm{Lab}^+_{p_u^{(j)}}\left(\overline{\mathrm{Equ}}^{(j)}\right) \equiv u_j.$$

Зафиксируем положительное направление движения вдоль $\mathrm{Conj}_1^{(j)}$ и $\mathrm{Conj}_2^{(j)}$ так, чтобы

$$\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(j)}}\left(\mathrm{Conj}_1^{(j)}\right) \equiv h_1, \quad \mathrm{Lab}^+_{p_u^{(j)}}\left(\mathrm{Conj}_2^{(j)}\right) \equiv h_2.$$

Экваторы $\underline{\mathrm{Equ}}$ и $\overline{\mathrm{Equ}}$ делят тор T на два кольца, соответствующие $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$. Кольцо, соответствующее $\bar{P}_1$ ($\bar{P}_2$), назовём R_1-*кольцом* (соответственно R_2-*кольцом*).

Будем называть *обобщёнными вершинами* «маленькие» дисковые картинки над $G_1 = \langle A \mid R_1 \rangle$ (над $G_2 = \langle A \mid R_2 \rangle$). Фактически нас будут интересовать не сами эти дисковые картинки, но их метки. Поэтому на обобщённые вершины мы будем смотреть как на обычные вершины, меткам которых разрешено быть произвольными словами из N_1 (соответственно из N_2). В частности, никакие пути не могут проходить через обобщённые вершины.

Будем называть преобразование картинки P на торе T *обобщённым допустимым*, если после этого преобразования

(i) $\mathrm{Lab}^+_{p_v^{(j)}}\big(\underline{\mathrm{Equ}}^{(j)}\big)$ $(\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(j)}}\big(\overline{\mathrm{Equ}}^{(j)}\big))$ заменяется на слово, равное v_j (соответственно u_j) с точностью до элементов из $N_1 \cap N_2$, $j \in \{1, \ldots, k\}$;

(ii) $\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(j)}}\big(\mathrm{Conj}_1^{(j)}\big)$ $(\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(j)}}\big(\mathrm{Conj}_2^{(j)}\big))$ заменяется на слово, равное h_1 (соответственно h_2) с точностью до элементов из N_1 (соответственно N_2), $j \in \{1, \ldots, k\}$;

(iii) обобщённые вершины с метками из $N_1 \setminus N_2$ не могут находиться в R_2-кольце, обобщённые вершины с метками из $N_2 \setminus N_1$ не могут находиться в R_1-кольце;

(iv) экваторы и $\mathrm{Conj}^{(j)}$ остаются неизменёнными, $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Предложение 1. *Пусть копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим. Тогда существует конечная последовательность обобщённых допустимых преобразований картинки P, в результате которой получится один из следующих двух случаев $(j \in \{1, \ldots, k\})$.*

Случай 1.

$$\begin{gathered}
\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(1)}}\big(\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}\big) = \alpha_1(\omega\nu_1\nu_2)\alpha_2^{-1},\ \mathrm{Lab}^+_{p_u^{(2)}}\big(\overline{\mathrm{Equ}}^{(2)}\big) = \alpha_2\alpha_3^{-1}, \ldots, \\
\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(k)}}\big(\overline{\mathrm{Equ}}^{(k)}\big) = \alpha_k\alpha_1^{-1}, \\
\mathrm{Lab}^+_{p_v^{(1)}}\big(\underline{\mathrm{Equ}}^{(1)}\big) = \beta_1(\omega\nu_1\nu_2)\beta_2^{-1},\ \mathrm{Lab}^+_{p_v^{(2)}}\big(\underline{\mathrm{Equ}}^{(2)}\big) = \beta_2\beta_3^{-1}, \ldots, \\
\mathrm{Lab}^+_{p_v^{(k)}}\big(\underline{\mathrm{Equ}}^{(k)}\big) = \beta_k\beta_1^{-1}, \\
\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(j)}}\big(\mathrm{Conj}_1^{(j)}\big) = \alpha_j\beta_j^{-1}, \\
\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(j)}}\big(\mathrm{Conj}_2^{(j)}\big) = \alpha_j\beta_j^{-1}.
\end{gathered}$$

Случай 2.

$$\begin{gathered}
\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(1)}}\big(\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}\big) = \alpha_1(\omega^q\nu_1\omega^{-l}\nu_2\omega^l)\alpha_2^{-1},\ \mathrm{Lab}^+_{p_u^{(2)}}\big(\overline{\mathrm{Equ}}^{(2)}\big) = \alpha_2\alpha_3^{-1}, \ldots, \\
\mathrm{Lab}^+_{p_u^{(k)}}\big(\overline{\mathrm{Equ}}^{(k)}\big) = \alpha_k\alpha_1^{-1}, \\
\mathrm{Lab}^+_{p_v^{(1)}}\big(\underline{\mathrm{Equ}}^{(1)}\big) = \beta_1(\omega^q\nu_1\nu_2)\beta_2^{-1},\ \mathrm{Lab}^+_{p_v^{(2)}}\big(\underline{\mathrm{Equ}}^{(2)}\big) = \beta_2\beta_3^{-1}, \ldots, \\
\mathrm{Lab}^+_{p_v^{(k)}}\big(\underline{\mathrm{Equ}}^{(k)}\big) = \beta_k\beta_1^{-1},
\end{gathered}$$

$$\mathrm{Lab}^{+}_{p_u^{(j)}}\bigl(\mathrm{Conj}_1^{(j)}\bigr) = \alpha_j\omega^{-l}\beta_j^{-1},$$
$$\mathrm{Lab}^{+}_{p_u^{(j)}}\bigl(\mathrm{Conj}_2^{(j)}\bigr) = \alpha_j\beta_j^{-1}.$$

Здесь $\nu_1 \in N_1$, $\nu_2 \in N_2$, $\alpha_j, \beta_j, \omega \in F$, $l, q \in \mathbb{Z}$ *определяются по конечной картинке* P.

Доказательство предложения 1 аналогично доказательству предложения 1 в [3] с естественными отличиями. Перечислим их, используя понятия из [3].

1. С каждым из $2k$ полюсов $p_u^{(j)}$, $p_v^{(j)}$ необходимо работать так же, как с p_u, p_v из [3].
2. С каждым из k циклов $\mathrm{Conj}^{(j)}$ необходимо работать так же, как с Conj из [3]. При этом замечаем, что на шаге, аналогичном шагу 2 в [3], происходит замена $\mathrm{Lab}^{+}_{p_u^{(j)}}\bigl(\mathrm{Conj}_1^{(j)}\bigr)$ ($\mathrm{Lab}^{+}_{p_u^{(j)}}\bigl(\mathrm{Conj}_2^{(j)}\bigr)$) на слово, равное h_1 (соответственно h_2) с точностью до элементов из N_1 (соответственно N_2), все остальные преобразования не меняют $\mathrm{Lab}^{+}_{p_u^{(j)}}\bigl(\mathrm{Conj}_1^{(j)}\bigr)$ (соответственно $\mathrm{Lab}^{+}_{p_u^{(j)}}\bigl(\mathrm{Conj}_2^{(j)}\bigr)$) как элемент в свободной группе, т. е. выполняется условие (ii) из определения обобщённого допустимого преобразования.
3. Замечаем, что шаг, аналогичный шагу 5 в [3], — единственное место, где возможно нарушение условия (i) из определения обобщённого допустимого преобразования. Чтобы это условие не нарушилось, на этом шаге прежде выполнения операции 10 (перестановки двусторонних диполей) необходимо дополнительно произвести перекидывание рёбер через полюса (операцию 11), чтобы рёбра переставляемых диполей пересекали $\underline{\mathrm{Equ}}$ ($\overline{\mathrm{Equ}}$) на одном и том же участке $\underline{\mathrm{Equ}}^{(j)}$ (соответственно $\overline{\mathrm{Equ}}^{(j)}$). Аналогично необходимо поступить со всеми двусторонними N_1-диполями (соответственно N_2-диполями) в конце этого шага прежде их замены на один диполь Δ_1 (соответственно Δ_2).
4. В конце на шаге, аналогичном шагу 6 в [3], с помощью операции 11 дополнительно добиваемся, чтобы никакое ребро, не являющееся сопрягающим для какого-нибудь полюса, не пересекало экваторы вне участков $\underline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ и $\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$.

Поясним, откуда в предложении 1 возникают разложения элементов в произведение. На последнем шаге конечный вид картинки P содержит:

1) не более одного ребра-цикла Z (оно не пересекает экваторы вне $\underline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ и $\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ и имеет метку ω);
2) не более одного двустороннего N_1-диполя Δ_1 (с меткой ν_1), не более одного двустороннего N_2-диполя Δ_2 (с меткой ν_2) (если Δ_i присутствует в P, Δ_i располагается между $\mathrm{Conj}^{(1)}$ и $\mathrm{Conj}^{(2)}$, его ребро пересекает каждый из $\underline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ и $\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ ровно по одному разу, диполь Δ_1 не может находиться правее диполя Δ_2);

3) $2k$ сопряжённых полюсов $p_u^{(j)}$ и $p_v^{(j)}$ ($\alpha^{(j)}$ — метка сопрягающего ребра для $p_u^{(j)}$, $\beta^{(j)}$ — для $p_v^{(j)}$), $j \in \{1, \ldots, k\}$.

При этом для P возможны три варианта.

Случай A. Картинка P не содержит ребра-цикла Z.

Имеем случай 1 предложения 1 ($\omega \equiv 1$).

Случай B. Ребро-цикл Z есть в P и гомотопно $\mathrm{Conj}^{(1)}$.

Z целиком расположено между $\mathrm{Conj}^{(1)}$ и $\mathrm{Conj}^{(2)}$ параллельно $\mathrm{Conj}^{(1)}$, левее Δ_1 и Δ_2 (если Δ_1 или Δ_2 присутствуют в P). Z пересекает каждый из $\underline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ и $\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ ровно по одному разу. Имеем случай 1 предложения 1.

Случай C. Ребро-цикл Z есть в P и гомотопно простому замкнутому пути, $|q|$ раз оборачивающемуся вдоль $\mathrm{Conj}^{(1)}$ и $|l|$ раз вдоль экваторов, где $l, q \in \mathbb{Z}$, $l \neq 0$.

Если в P нет Δ_2, то Z делает $|q|$ оборотов вдоль $\mathrm{Conj}^{(1)}$ между $\mathrm{Conj}^{(1)}$ и $\mathrm{Conj}^{(2)}$, левее Δ_1 (если Δ_1 есть в P), а $|l|$ оборотов вдоль экваторов в R_1-кольце, пересекая каждый $\mathrm{Conj}_1^{(j)}$. Имеем случай 2 предложения 1 ($\nu_2 \equiv 1$).

Если в P есть Δ_2, то Z делает $|q|$ оборотов вдоль $\mathrm{Conj}^{(1)}$ между $\mathrm{Conj}^{(1)}$ и $\mathrm{Conj}^{(2)}$, левее Δ_1 (если Δ_1 есть в P) и Δ_2, а $|l|$ оборотов вдоль экваторов Z делает в R_1-кольце, при каждом обороте пересекая каждый из $\mathrm{Conj}_1^{(j)}$, когда же Z доходит до ребра диполя Δ_2, то огибает его вершину, пересекая $\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ и попадая в R_2-кольцо, а затем снова пересекая $\overline{\mathrm{Equ}}^{(1)}$ и возвращаясь в R_1-кольцо. Имеем случай 2 предложения 1. □

Алгебраическая часть доказательства теоремы 1

По предложению 1, учитывая определение обобщённых допустимых преобразований и изначальные значения меток путей $\underline{\mathrm{Equ}}^{(j)}$, $\overline{\mathrm{Equ}}^{(j)}$, $\mathrm{Conj}_1^{(j)}$, $\mathrm{Conj}_2^{(j)}$, имеем один из двух случаев (в которых $\nu_1 \in N_1$, $\nu_2 \in N_2$, $\alpha_j, \beta_j, \omega \in F$, $l, q \in \mathbb{Z}$).

Случай C1. В $F/N_1 \cap N_2$ верны равенства

$$u_1 = \alpha_1(\omega\nu_1\nu_2)\alpha_2^{-1},\ u_2 = \alpha_2\alpha_3^{-1}, \ldots,\ u_k = \alpha_k\alpha_1^{-1},$$
$$v_1 = \beta_1(\omega\nu_1\nu_2)\beta_2^{-1},\ v_2 = \beta_2\beta_3^{-1}, \ldots,\ v_k = \beta_k\beta_1^{-1}.$$

И в F/N_1, и в F/N_2 верны равенства

$$\alpha_1\beta_1^{-1} = \ldots = \alpha_k\beta_k^{-1}.$$

Случай C2. В $F/N_1 \cap N_2$ верны равенства

$$u_1 = \alpha_1(\omega^q\nu_1\omega^{-l}\nu_2\omega^l)\alpha_2^{-1},\ u_2 = \alpha_2\alpha_3^{-1}, \ldots,\ u_k = \alpha_k\alpha_1^{-1}, \qquad (\mathrm{C2}_u)$$
$$v_1 = \beta_1(\omega^q\nu_1\nu_2)\beta_2^{-1},\ v_2 = \beta_2\beta_3^{-1}, \ldots,\ v_k = \beta_k\beta_1^{-1}, \qquad (\mathrm{C2}_v)$$

В F/N_1 верны равенства

$$\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1} = \ldots = \alpha_k\omega^{-l}\beta_k^{-1}. \qquad (\mathrm{C2}_1)$$

В F/N_2 верны равенства

$$\alpha_1\beta_1^{-1} = \ldots = \alpha_k\beta_k^{-1}. \tag{C2$_2$}$$

В случае C1 $h^{-1}u_jh = v_j$ в $F/N_1 \cap N_2$ при $h = \alpha_1\beta_1^{-1}$ для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$.

В случае C2 есть четыре возможности: $\tilde{v}_1 \neq 1$ в G_1 и в G_2, $\tilde{v}_1 = 1$ в G_1 и в G_2, $\tilde{v}_1 \neq 1$ в G_1 и $\tilde{v}_1 = 1$ в G_2, $\tilde{v}_1 = 1$ в G_1 и $\tilde{v}_1 \neq 1$ в G_2, где

$$\tilde{v}_1 = \beta_1^{-1}v_1\beta_2 = \omega^q\nu_1\nu_2.$$

Эти четыре возможности будут рассмотрены в следующих четырёх леммах. Но прежде для произвольных слов $x, y \in F$ определим множества

$\mathrm{Roots}_{G_1}(x) = \{c \in F \mid$ найдётся $s \in \mathbb{Z}^+$, такое что $x = c^s$ в $G_1\}$ для $x \neq 1$ в G_1,

$\mathrm{Roots}_{G_2}(x) = \{d \in F \mid$ найдётся $t \in \mathbb{Z}^+$, такое что $x = d^t$ в $G_2\}$ для $x \neq 1$ в G_2,

введём обозначения

$$y_1 = \beta_1\beta_2^{-1},\ y_2 = \beta_2\beta_3^{-1}, \ldots,\ y_{k-1} = \beta_{k-1}\beta_k^{-1},\ y_k = \beta_k\beta_1^{-1},$$
$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

и сформулируем условия для $i \in \{1, 2\}$:

(D1$_i$) для любого $x \in G_i$ из $\tilde{v}_1x = x\tilde{v}_1$ в G_i следует, что $\tilde{v}_1$ и x принадлежат одной циклической подгруппе группы G_i;

(D2$_i$) если $z^n \neq 1$ в G_i для $z \in \mathrm{Roots}_{G_i}(\tilde{v}_1)$, $n \in \mathbb{N}$, то из $[\beta_1z^n\beta_1^{-1}, y_j] = 1$ в G_i следует, что $[\beta_1z\beta_1^{-1}, y_j] = 1$ в G_i для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$;

(D3$_i$) для любого $x \in G_i$ из $y_jx = xy_j$ в G_i следует, что y_j и x принадлежат одной циклической подгруппе группы G_i для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$;

(D4$_i$) если $y_{j_1} \neq 1$ в G_i, то для любых $z_1 \in \mathrm{Roots}_{G_i}(y_{j_1})$, $n_1 \in \mathbb{N}$, таких что $z_1^{n_1} \neq 1$ в G_i, из $[z_1^{n_1}, y_{j_2}] = 1$ в G_i следует $[z_1, y_{j_2}] = 1$ в G_i для всех $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, k\}$.

Запись (D1), (D2), (D3), (D4) без нижнего индекса будет означать, что соответствующее условие выполняется и при $i = 1$, и при $i = 2$.

Отметим, что условия (D1), (D2), (D3), (D4) следуют из условия 1.3 теоремы 1.

В каждой из следующих четырёх лемм будет рассматриваться система

$$\begin{cases} h^{-1}u_1h = v_1, \\ \quad\vdots \\ h^{-1}u_kh = v_k. \end{cases} \tag{1}$$

Также для $j \in \{1, \ldots, k\}$ при $j = k$ индекс $j + 1$ считаем равным 1.

Лемма 2. *Пусть* $\tilde{v}_1 \neq 1$ *в* G_1 *и* $\tilde{v}_1 \neq 1$ *в* G_2 *и выполняются равенства случая* C2, *а также условия* (D1), (D2), (D3). *Тогда существует* $h \in F$, *при котором верна система* (1) *в* $F/N_1 \cap N_2$, *тогда и только тогда, когда существуют* $c \in \mathrm{Roots}_{G_1}(\tilde{v}_1)$, $d \in \mathrm{Roots}_{G_2}(\tilde{v}_1)$, $p, \bar{s}, \bar{t} \in \mathbb{Z}$, *такие что*

(T1) $0 \leqslant \bar{s} < s$, $0 \leqslant \bar{t} < t$, *где* $c^s = \tilde{v}_1$ *в* G_1, $d^t = \tilde{v}_1$ *в* G_2;
(T2) $\omega^{-l} c^{\bar{s}} d^{-\bar{t}} = \tilde{v}_1^p$ *в* G;
(T3) *верно одно из условий*

(T3$_1$) $[\beta_1 c \beta_1^{-1}, y_j] = 1$ *в* G_1 *и* $[\beta_1 d \beta_1^{-1}, y_j] = 1$ *в* G_2 *для всех* $j \in \{1, \ldots, k\}$;
(T3$_2$) $[\beta_1 c \beta_1^{-1}, y_j] = 1$ *в* G_1 *и* $\bar{t} = 0$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, k\}$;
(T3$_3$) $\bar{s} = 0$ *и* $[\beta_1 d \beta_1^{-1}, y_j] = 1$ *в* G_2 *для всех* $j \in \{1, \ldots, k\}$;
(T3$_4$) $\bar{s} = 0$, $\bar{t} = 0$, $p = 0$.

Доказательство. Допустим, существует $h \in F$, при котором система (1) верна в $F/N_1 \cap N_2$. Тогда при данном h система (1) верна и в F/N_1, и в F/N_2.

В $G_1 = F/N_1$ имеем следующее. Выполняется равенство $\nu_1 = 1$ в G_1. Таким образом, $\tilde{v}_1 = \omega^q \nu_2$ в G_1 и $u_1 = \alpha_1(\omega^q \omega^{-l} \nu_2 \omega^l)\alpha_2^{-1} = \alpha_1(\omega^{-l}\tilde{v}_1\omega^l)\alpha_2^{-1}$ в G_1. Применяя (C2$_u$) и (C2$_v$) к системе (1), получаем в G_1

$$\begin{cases} h^{-1}\alpha_1(\omega^{-l}\tilde{v}_1\omega^l)\alpha_2^{-1}h = \beta_1\tilde{v}_1\beta_2^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_2\alpha_3^{-1}h = \beta_2\beta_3^{-1}, \\ \quad\vdots \\ h^{-1}\alpha_{k-1}\alpha_k^{-1}h = \beta_{k-1}\beta_k^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_k\alpha_1^{-1}h = \beta_k\beta_1^{-1}. \end{cases}$$

Перемножая равенства со 2-го по k-е, получаем равенство $h^{-1}\alpha_2\alpha_1^{-1}h = \beta_2\beta_1^{-1}$ в G_1. Умножая это равенство на первое равенство, в G_1 получаем равенство $h^{-1}\alpha_1(\omega^{-l}\tilde{v}_1\omega^l)\alpha_1^{-1}h = \beta_1\tilde{v}_1\beta_1^{-1}$ и эквивалентную систему

$$\begin{cases} h^{-1}\alpha_1(\omega^{-l}\tilde{v}_1\omega^l)\alpha_1^{-1}h = \beta_1\tilde{v}_1\beta_1^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_1\alpha_2^{-1}h = \beta_1\beta_2^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_2\alpha_3^{-1}h = \beta_2\beta_3^{-1}, \\ \quad\vdots \\ h^{-1}\alpha_{k-1}\alpha_k^{-1}h = \beta_{k-1}\beta_k^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_k\alpha_1^{-1}h = \beta_k\beta_1^{-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Перепишем её следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{v}_1(\omega^l\alpha_1^{-1}h\beta_1) = (\omega^l\alpha_1^{-1}h\beta_1)\tilde{v}_1, \\ (\beta_1\beta_2^{-1})h^{-1}(\alpha_1\alpha_2^{-1})^{-1} = h^{-1}, \\ \quad\vdots \\ (\beta_{k-1}\beta_k^{-1})h^{-1}(\alpha_{k-1}\alpha_k^{-1})^{-1} = h^{-1}, \\ (\beta_k\beta_1^{-1})h^{-1}(\alpha_k\alpha_1^{-1})^{-1} = h^{-1}. \end{cases}$$

Умножая справа каждое уравнение вида

$$(\beta_j\beta_{j+1}^{-1})h^{-1}(\alpha_j\alpha_{j+1}^{-1})^{-1} = h^{-1}$$

на уравнение

$$(\alpha_j\alpha_{j+1}^{-1})(\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_j^{-1}) = (\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_j^{-1})(\beta_j\beta_{j+1}^{-1})$$

из (C2$_1$), получаем в G_1

$$\begin{cases} \tilde{v}_1(\omega^l\alpha_1^{-1}h\beta_1) = (\omega^l\alpha_1^{-1}h\beta_1)\tilde{v}_1, \\ (\beta_1\beta_2^{-1})h^{-1}(\alpha_2\omega^{-l}\beta_1^{-1}) = h^{-1}(\alpha_2\omega^{-l}\beta_1^{-1})(\beta_1\beta_2^{-1}), \\ \quad\vdots \\ (\beta_{k-1}\beta_k^{-1})h^{-1}(\alpha_k\omega^{-l}\beta_{k-1}^{-1}) = h^{-1}(\alpha_k\omega^{-l}\beta_{k-1}^{-1})(\beta_{k-1}\beta_k^{-1}), \\ (\beta_k\beta_1^{-1})h^{-1}(\alpha_1\omega^{-l}\beta_k^{-1}) = h^{-1}(\alpha_1\omega^{-l}\beta_k^{-1})(\beta_k\beta_1^{-1}). \end{cases}$$

Первое равенство системы означает, что $\tilde{v}_1$ и $(\omega^l\alpha_1^{-1}h\beta_1)$ перестановочны в G_1. По условию (D1$_1$) из этого следует, что существуют $c \in \mathrm{Roots}_{G_1}(\tilde{v}_1)$, $s, m \in \mathbb{Z}$, такие что $\tilde{v}_1 = c^s$ в G_1, $(\omega^l\alpha_1^{-1}h\beta_1) = c^m$ в G_1, т. е. $h = \alpha_1\omega^{-l}c^m\beta_1^{-1}$ в G_1.

Остальные равенства системы означают, что $h^{-1}(\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_j^{-1})$ и $y_j = \beta_j\beta_{j+1}^{-1}$ перестановочны в G_1 для всех $j \in \{1, \dots, k\}$. По условию (D3$_1$) из этого следует, что если $y_j \neq 1$ в G_1, то существуют $c_j \in \mathrm{Roots}_{G_1}(y_j)$, $s_j, m_j \in \mathbb{Z}$ такие, что $y_j = c_j^{s_j}$ в G_1, $h^{-1}(\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_j^{-1}) = c_j^{m_j}$ в G_1, т. е. $h = (\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_j^{-1})c_j^{-m_j}$ в G_1. Преобразуем h в G_1, используя (C2$_1$):

$$\begin{aligned} h = (\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_j^{-1})c_j^{-m_j} = (\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_{j+1}^{-1})(\beta_{j+1}\beta_j^{-1})c_j^{-m_j} = \\ = (\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_{j+1}^{-1})(c_j^{-s_j})c_j^{-m_j} = (\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_j^{\bar{m}_j}, \quad \bar{m}_j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Итого $\alpha_1\omega^{-l}c^m\beta_1^{-1} = h = (\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_j^{\bar{m}_j}$ в G_1, т. е. $\beta_1c^m\beta_1^{-1} = c_j^{\bar{m}_j}$ в G_1, для всех $j \in \{1, \dots, k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_1, где $c_j^{s_j} = y_j$ в G_1. Следовательно, $[\beta_1c^m\beta_1^{-1}, y_j] = 1$ в G_1 для всех j. Отсюда следует, что если $c^m \neq 1$ в G_1, то $[\beta_1c\beta_1^{-1}, y_j] = 1$ в G_1 для всех j по условию (D2$_1$).

В $G_2 = F/N_2$ имеем следующее. Выполняется равенство $\nu_2 = 1$ в G_2. Таким образом, $\tilde{v}_1 = \omega^q\nu_1$ в G_2. Применяя (C2$_u$) и (C2$_v$) к системе (1), получаем в G_2

$$\begin{cases} h^{-1}\alpha_1\tilde{v}_1\alpha_2^{-1}h = \beta_1\tilde{v}_1\beta_2^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_2\alpha_3^{-1}h = \beta_2\beta_3^{-1}, \\ \quad\vdots \\ h^{-1}\alpha_{k-1}\alpha_k^{-1}h = \beta_{k-1}\beta_k^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_k\alpha_1^{-1}h = \beta_k\beta_1^{-1}. \end{cases}$$

Перемножая равенства со 2-го по k-е, получаем равенство $h^{-1}\alpha_2\alpha_1^{-1}h = \beta_2\beta_1^{-1}$, которое умножаем на 1-е равенство, и в G_2 получаем $h^{-1}\alpha_1\tilde{v}_1\alpha_1^{-1}h = \beta_1\tilde{v}_1\beta_1^{-1}$ и эквивалентную систему

$$\begin{cases} h^{-1}\alpha_1\tilde{v}_1\alpha_1^{-1}h = \beta_1\tilde{v}_1\beta_1^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_1\alpha_2^{-1}h = \beta_1\beta_2^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_2\alpha_3^{-1}h = \beta_2\beta_3^{-1}, \\ \quad\vdots \\ h^{-1}\alpha_{k-1}\alpha_k^{-1}h = \beta_{k-1}\beta_k^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_k\alpha_1^{-1}h = \beta_k\beta_1^{-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{v}_1(\alpha_1^{-1}h\beta_1) = (\alpha_1^{-1}h\beta_1)\tilde{v}_1, \\ (\beta_1\beta_2^{-1})h^{-1}(\alpha_1\alpha_2^{-1})^{-1} = h^{-1}, \\ \quad\vdots \\ (\beta_{k-1}\beta_k^{-1})h^{-1}(\alpha_{k-1}\alpha_k^{-1})^{-1} = h^{-1}, \\ (\beta_k\beta_1^{-1})h^{-1}(\alpha_k\alpha_1^{-1})^{-1} = h^{-1}. \end{cases}$$

Умножая справа каждое уравнение вида $(\beta_j\beta_{j+1}^{-1})h^{-1}(\alpha_j\alpha_{j+1}^{-1})^{-1} = h^{-1}$ на уравнение $(\alpha_j\alpha_{j+1}^{-1})(\alpha_{j+1}\beta_j^{-1}) = (\alpha_{j+1}\beta_j^{-1})(\beta_j\beta_{j+1}^{-1})$ из условия (C2_2), получаем в G_2

$$\begin{cases} \tilde{v}_1(\alpha_1^{-1}h\beta_1) = (\alpha_1^{-1}h\beta_1)\tilde{v}_1, \\ (\beta_1\beta_2^{-1})h^{-1}(\alpha_2\beta_1^{-1}) = h^{-1}(\alpha_2\beta_1^{-1})(\beta_1\beta_2^{-1}), \\ \quad\vdots \\ (\beta_{k-1}\beta_k^{-1})h^{-1}(\alpha_k\beta_{k-1}^{-1}) = h^{-1}(\alpha_k\beta_{k-1}^{-1})(\beta_{k-1}\beta_k^{-1}), \\ (\beta_k\beta_1^{-1})h^{-1}(\alpha_1\beta_k^{-1}) = h^{-1}(\alpha_1\beta_k^{-1})(\beta_k\beta_1^{-1}). \end{cases}$$

Первое равенство системы означает, что $\tilde{v}_1$ и $\alpha_1^{-1}h\beta_1$ перестановочны в G_2. По условию (D1_2) из этого следует, что существуют $d \in \mathrm{Roots}_{G_2}(\tilde{v}_1)$, $t, n \in \mathbb{Z}$, такие что $\tilde{v}_1 = d^t$, $\alpha_1^{-1}h\beta_1 = d^n$ в G_2, т. е. $h = \alpha_1 d^n \beta_1^{-1}$ в G_2.

Остальные равенства означают, что $h^{-1}(\alpha_{j+1}\beta_j^{-1})$ и $y_j = \beta_j\beta_{j+1}^{-1}$ перестановочны в G_2 для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$. По условию (D3_2) из этого следует, что если $y_j \neq 1$ в G_2, то существуют $d_j \in \mathrm{Roots}_{G_2}(y_j)$, $t_j, n_j \in \mathbb{Z}$, такие что $y_j = d_j^{t_j}$, $h^{-1}(\alpha_{j+1}\beta_j^{-1}) = d_j^{n_j}$ в G_2, т. е. $h = (\alpha_{j+1}\beta_j^{-1})d_j^{-n_j}$ в G_2.

Преобразуем h в G_2, используя (C2_2):

$$h = (\alpha_{j+1}\beta_j^{-1})d_j^{-n_j} = (\alpha_{j+1}\beta_{j+1}^{-1})(\beta_{j+1}\beta_j^{-1})d_j^{-n_j} = \\ = (\alpha_{j+1}\beta_{j+1}^{-1})(d_j^{-t_j})d_j^{-n_j} = (\alpha_1\beta_1^{-1})d_j^{\bar{n}_j}, \quad \bar{n}_j \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, $(\alpha_1\beta_1^{-1})d_j^{\bar{n}_j} = h = \alpha_1 d^n \beta_1^{-1}$ в G_2, т. е. $\beta_1 d^n \beta_1^{-1} = d_j^{\bar{n}_j}$ в G_2, для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_2, где $y_j = d_j^{t_j}$ в G_2. Следовательно, $[\beta_1 d^n \beta_1^{-1}, y_j] = 1$ в G_2 для всех j. Если $d^n \neq 1$ в G_2, то $[\beta_1 d \beta_1^{-1}, y_j] = 1$ в G_2 для всех j по условию (D2_2).

Подытожим информацию, полученную для G_1 и G_2:

1) $h = \alpha_1\omega^{-l}c^m\beta_1^{-1}$ в G_1, $h = \alpha_1 d^n\beta_1^{-1}$ в G_2,
2) или $\beta_1 c\beta_1^{-1}$ и y_j коммутируют в G_1 для всех j, или $c^m = 1$ в G_1,
3) или $\beta_1 d\beta_1^{-1}$ и y_j коммутируют в G_2 для всех j, или $d^n = 1$ в G_2.

Отсюда следует, что $\omega^{-l}c^m d^{-n} = 1$ в G. Значит, $\omega^{-l}c^{\bar{s}}d^{-\bar{t}} = \tilde{v}_1^p$ в G для $p, \bar{s}, \bar{t} \in \mathbb{Z}$ с условием $0 \leqslant \bar{s} < s$, $0 \leqslant \bar{t} < t$, причём $\bar{s} = 0$ при $c^m = 1$ в G_1, $\bar{t} = 0$ при $d^n = 1$ в G_2, $\bar{s} = 0$, $\bar{t} = 0$, $p = 0$, когда $c^m = 1$ в G_1 и $d^n = 1$ в G_2.

Докажем обратное утверждение.

Так как $\omega^{-l}c^{\bar{s}}d^{-\bar{t}} = \tilde{v}_1^p$ в G, то $\omega^{-l}c^{\bar{s}}d^{-\bar{t}}\tilde{v}_1^{-p} = \omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\tilde{v}_1^{-p_2}d^{-\bar{t}} = 1$ в G, где $p_1 = -p$, $p_2 = 0$ в случаях (Т3_1) и (Т3_2); $p_1 = 0$, $p_2 = p$ в случаях (Т3_3) и (Т3_4).

Слово $\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\tilde{v}_1^{-p_2}d^{-\bar{t}}$ представляется в виде $\tilde{\nu_1}^{-1}\tilde{\nu_2}$ для некоторых слов $\tilde{\nu_1} \in N_1$, $\tilde{\nu_2} \in N_2$. Следовательно, $\tilde{\nu_1}\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1} = \tilde{\nu_2}d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}$ в F. Проверим, что в качестве h можно взять слово $\alpha_1\tilde{\nu_1}\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1}(= \alpha_1\tilde{\nu_2}d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1})$.

Действительно, в случае С2 система (1) в G_1 переписывается в виде

$$\begin{cases} \beta_1^{-1}h^{-1}\alpha_1\omega^{-l}\tilde{v}_1\omega^l\alpha_1^{-1}h\beta_1\tilde{v}_1^{-1} = 1, \\ \alpha_3^{-1}h\beta_3\beta_2^{-1}h^{-1}\alpha_2 = 1, \\ \quad\vdots \\ \alpha_k^{-1}h\beta_k\beta_{k-1}^{-1}h^{-1}\alpha_{k-1} = 1, \\ \alpha_1^{-1}h\beta_1\beta_k^{-1}h^{-1}\alpha_k = 1. \end{cases}$$

Проверим выполнение в G_1 равенств этой системы для $h = \alpha_1\tilde{\nu_1}\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1}$.

Рассмотрим первое равенство в G_1:

$$\begin{aligned} &\beta_1^{-1}h^{-1}\alpha_1\omega^{-l}\tilde{v}_1\omega^l\alpha_1^{-1}h\beta_1\tilde{v}_1^{-1} = \\ &\quad = \beta_1^{-1}(\alpha_1\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1})^{-1}\alpha_1\omega^{-l}\tilde{v}_1\omega^l\alpha_1^{-1}(\alpha_1\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1})\beta_1\tilde{v}_1^{-1} = \\ &\quad = (\tilde{v}_1^{-p_1}c^{-\bar{s}})\tilde{v}_1(c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1})\tilde{v}_1^{-1} = (c^{-p_1 s}c^{-\bar{s}})c^s(c^{\bar{s}}c^{p_1 s})c^{-s} = 1. \end{aligned}$$

Если $y_j = \beta_j\beta_{j+1}^{-1} = 1$ в G_1, т. е. $\beta_j = \beta_{j+1}$ в G_1, то из равенств С2_1 следует, что $\alpha_j = \alpha_{j+1}$ в G_1. Поэтому j-е равенство, $j > 1$, верно в G_1 для любого h, в частности для $h = \alpha_1\tilde{\nu_1}\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1}$.

Если $y_j \neq 1$ в G_1, $j > 1$, то, используя равенства (С2_1) и (Т3), получаем, что j-е равенство системы также верно в G_1 для $h = \alpha_1\tilde{\nu_1}\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1}$:

$$\begin{aligned} &\alpha_{j+1}^{-1}hy_j^{-1}h^{-1}\alpha_j = \alpha_{j+1}^{-1}(\alpha_1\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1})y_j^{-1}(\alpha_1\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1})^{-1}\alpha_j = \\ &\quad = \alpha_{j+1}^{-1}(\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})(\beta_1 c^{\bar{s}+sp_1}\beta_1^{-1})y_j^{-1}\big((\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})(\beta_1 c^{\bar{s}+sp_1}\beta_1^{-1})\big)^{-1}\alpha_j = \\ &\quad = \alpha_{j+1}^{-1}(\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_{j+1}^{-1})(\beta_1 c^{\bar{s}+sp_1}\beta_1^{-1})y_j^{-1}\big((\alpha_j\omega^{-l}\beta_j^{-1})(\beta_1 c^{\bar{s}+sp_1}\beta_1^{-1})\big)^{-1}\alpha_j = \\ &\quad = \omega^{-l}\beta_{j+1}^{-1}y_j^{-1}\beta_j\omega^l = \omega^{-l}\beta_{j+1}^{-1}\beta_{j+1}\beta_j^{-1}\beta_j\omega^l = 1. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим группу G_2. В случае С2 система (1) в G_2 переписывается в виде

$$\begin{cases} \beta_1^{-1}h^{-1}\alpha_1\tilde{v}_1\alpha_1^{-1}h\beta_1\tilde{v}_1^{-1} = 1, \\ \alpha_3^{-1}h\beta_3\beta_2^{-1}h^{-1}\alpha_2 = 1, \\ \quad\vdots \\ \alpha_k^{-1}h\beta_k\beta_{k-1}^{-1}h^{-1}\alpha_{k-1} = 1, \\ \alpha_1^{-1}h\beta_1\beta_k^{-1}h^{-1}\alpha_k = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Проверим выполнение в G_2 равенств этой системы для $h = \alpha_1\tilde{\nu_2}d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1}$.

Рассмотрим первое равенство:

$$\begin{aligned} &\beta_1^{-1}h^{-1}\alpha_1\tilde{v}_1\alpha_1^{-1}h\beta_1\tilde{v}_1^{-1} = \\ &= \beta_1^{-1}(\alpha_1 d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1})^{-1}\alpha_1\tilde{v}_1\alpha_1^{-1}(\alpha_1 d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1})\beta_1\tilde{v}_1^{-1} = \\ &= (d^{\bar{t}+tp_2})^{-1}d^t(d^{\bar{t}+tp_2})d^{-t} = 1. \end{aligned}$$

Если $y_j = \beta_j\beta_{j+1}^{-1} = 1$ в G_2, т. е. $\beta_j = \beta_{j+1}$ в G_2, то из равенств ($\mathrm{C2}_2$) следует, что $\alpha_j = \alpha_{j+1}$ в G_2. Поэтому j-е равенство, $j > 1$, верно в G_2 для любого h, в частности для $h = \alpha_1\tilde{\nu_2}d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1}$.

Если $y_j \neq 1$ в G_2, $j > 1$, то с учётом равенств ($\mathrm{C2}_2$) и (T3) j-е равенство системы также верно в G_2 для $h = \alpha_1\tilde{\nu_2}d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1}$:

$$\begin{aligned} &\alpha_{j+1}^{-1}hy_j^{-1}h^{-1}\alpha_j = \alpha_{j+1}^{-1}(\alpha_1 d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1})y_j^{-1}(\alpha_1 d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1})^{-1}\alpha_j = \\ &= \alpha_{j+1}^{-1}(\alpha_1\beta_1^{-1})(\beta_1 d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1})y_j^{-1}\big((\alpha_1\beta_1^{-1})(\beta_1 d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1})\big)^{-1}\alpha_j = \\ &= \alpha_{j+1}^{-1}(\alpha_{j+1}\beta_{j+1}^{-1})(\beta_1 d^{\bar{t}+tp_2}\beta_1^{-1})y_j^{-1}\big((\alpha_j\beta_j^{-1})(\beta_1 d^{\bar{t}+tp_2}\beta_1^{-1})\big)^{-1}\alpha_j = \\ &= \beta_{j+1}^{-1}y_j^{-1}\beta_j = \beta_{j+1}^{-1}\beta_{j+1}\beta_j^{-1}\beta_j = 1. \end{aligned}$$

Так как при $h = \alpha_1\tilde{\nu_1}\omega^{-l}c^{\bar{s}}\tilde{v}_1^{p_1}\beta_1^{-1} = \alpha_1\tilde{\nu_2}d^{\bar{t}}\tilde{v}_1^{p_2}\beta_1^{-1}$ система (1) верна как в G_1, так и в G_2, то при данном h система (1) верна и в $F/N_1 \cap N_2$. □

Лемма 3. *Пусть $\tilde{v}_1 = 1$ в G_1 и $\tilde{v}_1 = 1$ в G_2 и выполняются равенства случая* C2, *а также условия* (D3) *и* (D4). *Тогда существует $h \in F$, при котором система* (1) *верна в $F/N_1 \cap N_2$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) *$y_j = 1$ в G_i при всех $j \in \{1, \ldots, k\}$ и хотя бы при одном из $i \in \{1, 2\}$;*
2) *существуют $J_1, J_2 \in \{1, \ldots, k\}$, такие что $y_{J_1} \neq 1$ в G_1, $y_{J_2} \neq 1$ в G_2, для которых существуют $c_{J_1} \in \mathrm{Roots}_{G_1}(y_{J_1})$, $d_{J_2} \in \mathrm{Roots}_{G_2}(y_{J_2})$, $a \in \mathrm{Roots}_{G_1}(y_{J_1}) \cup \mathrm{Roots}_{G_2}(y_{J_2})$, $\bar{s}_{J_1}, \bar{t}_{J_2}, p \in \mathbb{Z}$, такие что*

   (T1′) $0 \leqslant \bar{s}_{J_1} < s_{J_1}$, $0 \leqslant \bar{t}_{J_2} < t_{J_2}$, *где* $c_{J_1}^{s_{J_1}} = y_{J_1}$ *в* G_1, $d_{J_2}^{t_{J_2}} = y_{J_2}$ *в* G_2;

   (T2′) $d_{J_2}^{-\bar{t}_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}} = a^p$ *в* G;

   (T3′) *для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$ выполняется одно из следующих условий:*

   (T3′₁) $a \in \mathrm{Roots}_{G_1}(y_{J_1})$ *и* $[y_j, c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}a^{-p}] = 1$ *в* G_1, $[y_j, d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}] = 1$ *в* G_2 *для всех* $j \in \{1, \ldots, k\}$;

   (T3′₂) $a \in \mathrm{Roots}_{G_2}(y_{J_2})$ *и* $[y_j, c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}] = 1$ *в* G_1, $[y_j, d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^p] = 1$ *в* G_2 *для всех* $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Доказательство. Допустим, что существует $h \in F$, при котором система (1) верна в $F/N_1 \cap N_2$. Тогда система (1) верна как в F/N_1, так и в F/N_2.

Так как $\tilde{v}_1 = 1$ в G_1 и $\tilde{v}_1 = 1$ в G_2, то в случае C2 система (1) в $F/N_1 \cap N_2$ примет вид

$$\begin{cases} h^{-1}\alpha_1\alpha_2^{-1}h = \beta_1\beta_2^{-1}, \\ \quad\vdots \\ h^{-1}\alpha_{k-1}\alpha_k^{-1}h = \beta_{k-1}\beta_k^{-1}, \\ h^{-1}\alpha_k\alpha_1^{-1}h = \beta_k\beta_1^{-1}. \end{cases}$$

Равенства этой системы аналогичны 2-му,..., $(k+1)$-му равенствам системы (2) для G_1 и системы (3) для G_2 из доказательства леммы 2.

Преобразуем эти равенства в G_1 так же, как 2-е,..., $(k+1)$-е равенства системы (2) в доказательстве леммы 2, используя (C2$_1$), (D3$_1$). Получаем, что $h = (\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_j^{\bar{m}_j}$ в G_1 для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_1. Следовательно, $c_{j_1}^{\bar{m}_{j_1}} = c_{j_2}^{\bar{m}_{j_2}}$ в G_1 для всех $j_1, j_2 \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_{j_1} \neq 1$ в G_1, $y_{j_2} \neq 1$ в G_1. Отсюда следует, что $c_{j_1}^{\bar{m}_{j_1}} y_{j_2} = y_{j_2} c_{j_1}^{\bar{m}_{j_1}}$ в G_1. Учитывая (D4$_1$), получаем, что или $c_j^{\bar{m}_j} = 1$ в G_1 для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_1, или $c_{j_1}y_{j_2} = y_{j_2}c_{j_1}$ в G_1 для всех $j_1, j_2 \in \{1,\dots,k\}$, таких, что $y_{j_1} \neq 1$ в G_1, $y_{j_2} \neq 1$ в G_1. Таким образом, или $c_j^{\bar{m}_j} = 1$ в G_1 для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_1, или $y_{j_1}y_{j_2} = y_{j_2}y_{j_1}$ в G_1 для любых $j_1, j_2 \in \{1,\dots,k\}$.

Преобразуем в G_2 равенства системы так же, как 2-е,..., $(k+1)$-е равенства системы (3) в доказательстве леммы 2, используя (C2$_2$), (D3$_2$). Получаем, что $h = (\alpha_1\beta_1^{-1})d_j^{\bar{n}_j}$ в G_2 для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_2. Следовательно, для всех $j_1, j_2 \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_{j_1} \neq 1$ в G_2, $y_{j_2} \neq 1$ в G_2, $d_{j_1}^{\bar{n}_{j_1}} = d_{j_2}^{\bar{n}_{j_2}}$ в G_2. Отсюда следует, что $d_{j_1}^{\bar{n}_{j_1}} y_{j_2} = y_{j_2} d_{j_1}^{\bar{n}_{j_1}}$ в G_2. По условию (D4$_2$) получаем, что или $d_j^{\bar{n}_j} = 1$ в G_2 для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_2, или $d_{j_1}y_{j_2} = y_{j_2}d_{j_1}$ в G_2 для всех $j_1, j_2 \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_{j_1} \neq 1$ в G_2, $y_{j_2} \neq 1$ в G_2. Таким образом, или $d_j^{\bar{n}_j} = 1$ в G_2 для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_2, или $y_{j_1}y_{j_2} = y_{j_2}y_{j_1}$ в G_2 для любых $j_1, j_2 \in \{1,\dots,k\}$.

Таким образом, для G_1 и G_2 имеем следующее:

1) для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_1, $h = (\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_j^{\bar{m}_j}$ в G_1, где $c_j^{\bar{s}_j} = y_j$ в G_1;
2) для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_2, $h = (\alpha_1\beta_1^{-1})d_j^{\bar{n}_j}$ в G_2, где $d_j^{\bar{t}_j} = y_j$ в G_2;
3) или $c_j^{\bar{m}_j} = 1$ в G_1 для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_1, или $y_{j_1}y_{j_2} = y_{j_2}y_{j_1}$ в G_1 для любых $j_1, j_2 \in \{1,\dots,k\}$;
4) или $d_j^{\bar{n}_j} = 1$ в G_2 для всех $j \in \{1,\dots,k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_2, или $y_{j_1}y_{j_2} = y_{j_2}y_{j_1}$ в G_2 для любых $j_1, j_2 \in \{1,\dots,k\}$.

Если найдутся $J_1, J_2 \in \{1,\dots,k\}$, такие что $y_{J_1} \neq 1$ в G_1, $y_{J_2} \neq 1$ в G_2, то $(\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar{n}_{J_2}} = h = (\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{m}_{J_1}}$ в G, т. е. $d_{J_2}^{-\bar{n}_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{m}_{J_1}} = 1$ в G.

Если $c_{J_1}^{\bar m_{J_1}} = 1$ в G_1 и $d_{J_2}^{\bar n_{J_2}} = 1$ в G_2, то условия (T2′) и (T3′) выполняются при $\bar s_{J_1} = 0$, $\bar t_{J_2} = 0$, $p = 0$ и любом $a \in \mathrm{Roots}_{G_1}(y_{J_1}) \cup \mathrm{Roots}_{G_2}(y_{J_2})$.

Если $c_{J_1}^{\bar m_{J_1}} = 1$ в G_1 и $d_{J_2}^{\bar n_{J_2}} \neq 1$ в G_2, то, учитывая, что $y_{J_2} = d_{J_2}^{t_{J_2}}$ в G_2, получаем, что $d_{J_2}^{-\bar t_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}} = y_{J_2}^{p_{J_2}}$ в G при $\bar s_{J_1} = 0$ и некоторых $\bar t_{J_2}, p_{J_2} \in \mathbb{Z}$, где $0 \leqslant \bar t_{J_2} < t_{J_2}$. В этом случае $a = y_{J_2} \in \mathrm{Roots}_{G_2}(y_{J_2})$, $p = p_{J_2}$. Так как $d_{J_2}^{\bar n_{J_2}} \neq 1$ в G_2, $[y_j, y_{J_2}] = 1$ в G_2 для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, а значит, $[y_j, a] = 1$ в G_2 и $[y_j, d_{J_2}] = 1$ в G_2 по условию (D4$_2$). В этом случае выполняется условие (T3$'_2$).

Если $c_{J_1}^{\bar m_{J_1}} \neq 1$ в G_1 и $d_{J_2}^{\bar n_{J_2}} = 1$ в G_2, то, учитывая, что $y_{J_1} = c_{J_1}^{s_{J_1}}$ в G_1, получаем, что $d_{J_2}^{-\bar t_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}} = y_{J_1}^{p_{J_1}}$ в G при $\bar t_{J_2} = 0$ и некоторых $\bar s_{J_1}, p_{J_1} \in \mathbb{Z}$, где $0 \leqslant \bar s_{J_1} < s_{J_1}$. В этом случае $a = y_{J_1}$, $p = p_{J_1}$. Так как $c_{J_1}^{\bar m_{J_1}} \neq 1$ в G_1, то $[y_{J_1}, y_j] = 1$ в G_1 для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, а значит, $[a, y_j] = 1$ в G_1 и $[c_{J_1}, y_j] = 1$ в G_1 по условию (D4$_1$). В этом случае выполняется условие (T3$'_1$).

Если $c_{J_1}^{\bar m_{J_1}} \neq 1$ в G_1 и $d_{J_2}^{\bar n_{J_2}} \neq 1$ в G_2, то, учитывая, что $y_{J_1} = c_{J_1}^{s_{J_1}}$ в G_1, $y_{J_2} = d_{J_2}^{t_{J_2}}$ в G_2, получаем, что $d_{J_2}^{-\bar t_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}} = y_{J_2}^{p_{J_2}} y_{J_1}^{p_{J_1}}$ в G для некоторых $\bar s_{J_1}, \bar t_{J_2}, p_{J_1}, p_{J_2} \in \mathbb{Z}$, где $0 \leqslant \bar s_{J_1} < s_{J_1}$, $0 \leqslant \bar t_{J_2} < t_{J_2}$. Так как $c_{J_1}^{\bar m_{J_1}} \neq 1$ в G_1, то $[y_{J_1}, y_{J_2}] = 1$ в G_1. Следовательно, по условию (D3$_1$) y_{J_1} и y_{J_2} принадлежат одной циклической подгруппе в G_1, т. е. существуют $a \in \mathrm{Roots}_{G_1}(y_{J_1})$, $p \in \mathbb{Z}$, такие что $d_{J_2}^{-\bar t_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}} = a^p$ в G. Так как $c_{J_1}^{\bar m_{J_1}} \neq 1$ в G_1, то $[y_{J_1}, y_j] = 1$ в G_1 для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, а значит, по (D4$_1$) $[c_{J_1}, y_j] = 1$ в G_1 и $[a, y_j] = 1$ в G_1. Так как $d_{J_2}^{\bar n_{J_2}} \neq 1$ в G_2, то $[y_j, y_{J_2}] = 1$ в G_2 для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, а значит, $[y_j, d_{J_2}] = 1$ в G_2 по условию (D4$_2$). Следовательно, выполняется условие (T3$'_1$).

Докажем обратное утверждение.

Пусть $y_j = \beta_j\beta_{j+1}^{-1} = 1$ в G_1 (G_2) для всех j, т. е. $\beta_1 = \ldots = \beta_k$ в G_1 (G_2). Из равенств (C2$_1$) ((C2$_2$)) следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k$ в G_1 (соответственно в G_2). Поэтому система (1) верна в G_1 (соответственно в G_2) для любого h, в частности для $h = \alpha_1\beta_1^{-1}$ (соответственно $h = \alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1}$), при котором система (1) верна в G_2 (соответственно в G_1).

Рассмотрим случай, когда найдутся $J_1, J_2 \in \{1, \ldots, k\}$, такие что $y_{J_1} \neq 1$ в G_1 и $y_{J_2} \neq 1$ в G_2.

Условие (T2′) перепишем в виде $a^{-p_2}d_{J_2}^{-\bar t_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}}a^{-p_1} = 1$ в G, предполагая, что $p_1 = p$, $p_2 = 0$ при (T3$'_1$) и $p_1 = 0$, $p_2 = p$ при (T3$'_2$).

Так как $a^{-p_2}d_{J_2}^{-\bar t_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}}a^{-p_1} = 1$ в G, слово

$$a^{-p_2}d_{J_2}^{-\bar t_{J_2}}(\beta_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}}a^{-p_1}$$

представляется в виде $\tilde\nu_2\tilde\nu_1^{-1}$ для некоторых слов $\tilde\nu_1 \in N_1$, $\tilde\nu_2 \in N_2$. Тогда $(\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}}a^{-p_1}\tilde\nu_1 = (\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar t_{J_2}}a^{p_2}\tilde\nu_2$ в F. Проверим, что система (1) верна в $F/N_1 \cap N_2$ при $h = (\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar s_{J_1}}a^{-p_1}\tilde\nu_1 = (\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar t_{J_2}}a^{p_2}\tilde\nu_2$.

Система (1) в $F/N_1\cap N_2$ переписывается в виде

$$\begin{cases}\alpha_2^{-1}hy_1^{-1}h^{-1}\alpha_1=1,\\ \quad\vdots\\ \alpha_k^{-1}hy_{k-1}^{-1}h^{-1}\alpha_{k-1}=1,\\ \alpha_1^{-1}hy_k^{-1}h^{-1}\alpha_k=1.\end{cases}\tag{5}$$

Проверим выполнение в G_1 равенств системы (5) для

$$h=(\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}a^{-p_1}\tilde{\nu_1}.$$

Если $y_j=\beta_j\beta_{j+1}^{-1}=1$ в G_1, т. е. $\beta_j=\beta_{j+1}$ в G_1, то из равенств $(\mathrm{C2}_1)$ следует, что $\alpha_j=\alpha_{j+1}$ в G_1. Поэтому j-е равенство верно в G_1 для любого h, в частности для $h=(\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}a^{-p_1}\tilde{\nu_1}$.

Если $y_j\neq 1$ в G_1, то благодаря равенствам $(\mathrm{C2}_1)$ и условию $(\mathrm{T3}')$ j-е равенство также верно в G_1 для $h=(\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}a^{-p_1}\tilde{\nu_1}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1}^{-1}hy_j^{-1}h^{-1}\alpha_j&=\alpha_{j+1}^{-1}\big((\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}a^{-p_1}\big)y_j^{-1}\big((\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}a^{-p_1}\big)^{-1}\alpha_j=\\ &=\alpha_{j+1}^{-1}(\alpha_{j+1}\omega^{-l}\beta_{j+1}^{-1})(c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}a^{-p_1})y_j^{-1}(a^{p_1}c_{J_1}^{-\bar{s}_{J_1}})(\alpha_j\omega^{-l}\beta_j^{-1})^{-1}\alpha_j=\\ &=\omega^{-l}\beta_{j+1}^{-1}y_j^{-1}\beta_j\omega^l=\omega^{-l}\beta_{j+1}^{-1}\beta_{j+1}\beta_j^{-1}\beta_j\omega^l=1.\end{aligned}$$

Проверим выполнение в G_2 равенств системы (5) для

$$h=(\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^{p_2}\tilde{\nu_2}.$$

Если $y_j=\beta_j\beta_{j+1}^{-1}=1$ в G_2, т. е. $\beta_j=\beta_{j+1}$ в G_2, то из равенств $(\mathrm{C2}_2)$ следует, что $\alpha_j=\alpha_{j+1}$ в G_2. Поэтому j-е равенство верно в G_2 для любого h, в частности для $h=(\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^{p_2}\tilde{\nu_2}$.

Если $y_j\neq 1$ в G_2, то благодаря равенствам $(\mathrm{C2}_2)$ и условию $(\mathrm{T3}')$, j-е равенство также верно в G_2 для $h=(\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^{p_2}\tilde{\nu_2}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1}^{-1}hy_j^{-1}h^{-1}\alpha_j&=\alpha_{j+1}^{-1}\big((\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^{p_2}\big)y_j^{-1}\big((\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^{p_2})^{-1}\alpha_j=\\ &=\alpha_{j+1}^{-1}(\alpha_{j+1}\beta_{j+1}^{-1})(d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^{p_2})y_j^{-1}(d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^{p_2})^{-1}(\alpha_j\beta_j^{-1})^{-1}\alpha_j=\\ &=\beta_{j+1}^{-1}y_j^{-1}\beta_j=\beta_{j+1}^{-1}\beta_{j+1}\beta_j^{-1}\beta_j=1.\end{aligned}$$

Так как при $h=(\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_{J_1}^{\bar{s}_{J_1}}a^{-p_1}\tilde{\nu_1}=(\alpha_1\beta_1^{-1})d_{J_2}^{\bar{t}_{J_2}}a^{p_2}\tilde{\nu_2}$ система (1) верна как в G_1, так и в G_2, то при данном h система (1) верна в $F/N_1\cap N_2$. □

Лемма 4. *Пусть $\tilde{v}_1=1$ в G_1, но $\tilde{v}_1\neq 1$ в G_2 и выполняются равенства случая* C2, *а также условия* $(\mathrm{D1}_2)$, $(\mathrm{D2}_2)$, (D3), (D4). *Тогда существует $h\in F$, при котором система* (1) *верна в $F/N_1\cap N_2$, тогда и только тогда, когда верно одно из следующих условий*:

1) $y_j=1$ *в G_1 для всех $j\in\{1,\dots,k\}$*;

2) *найдётся* $J \in \{1, \ldots, k\}$, *такой что* $y_J \neq 1$ *в* G_1, *для которого найдутся* $c_J \in \mathrm{Roots}_{G_1}(y_J)$, $d \in \mathrm{Roots}_{G_2}(\tilde{v}_1)$, $\bar{s}_J, \bar{t}, p_J \in \mathbb{Z}$, *такие что*

(T1″) $0 \leqslant \bar{s}_J < s_J$, $0 \leqslant \bar{t} < t$, *где* $c_J^{s_J} = y_J$ *в* G_1, $d^t = \tilde{v}_1$ *в* G_2;

(T2″) $(\beta_1 d^{-\bar{t}} \omega^{-l} \beta_1^{-1}) c_J^{\bar{s}_J} = y_J^{p_J}$ *в* G;

(T3″) $[y_j, c_J^{\bar{s}_J} y_J^{-p_J}] = 1$ *в* G_1, $[y_j, \beta_1 d^{\bar{t}} \beta_1^{-1}] = 1$ *в* G_2 *для любого* $j \in \in \{1, \ldots, k\}$.

Доказательство. Допустим, существует такое $h \in F$, что система (1) верна в $F/N_1 \cap N_2$. Тогда система (1) верна как в F/N_1, так и в F/N_2.

Как и в доказательстве леммы 3 для G_1, используя (C2$_1$), (D3$_1$), (D4$_1$), получаем, что

1) для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_1, $h = (\alpha_1 \omega^{-l} \beta_1^{-1}) c_j^{\bar{m}_j}$ в G_1, где $y_j = c_j^{s_j}$ в G_1;
2) или $c_j^{\bar{m}_j} = 1$ в G_1 для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_1, или $y_{j_1} y_{j_2} = y_{j_2} y_{j_1}$ в G_1 для любых $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, k\}$.

Как и в доказательствах лемм 2 и 3 для G_2, используя (C2$_2$), (D1$_2$), (D2$_2$), (D3$_2$), (D4$_2$), получаем, что

1) для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_2, $h = (\alpha_1 \beta_1^{-1}) d_j^{\bar{n}_j}$ в G_2, где $y_j = d_j^{t_j}$ в G_2;
2) или $d_j^{\bar{n}_j} = 1$ в G_2 для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$, таких что $y_j \neq 1$ в G_2, или $y_{j_1} y_{j_2} = y_{j_2} y_{j_1}$ в G_2 для любых $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, k\}$;
3) $h = \alpha_1 d^n \beta_1^{-1}$ в G_2, где $\tilde{v}_1 = d^t$ в G_2;
4) если $d_j^{\bar{n}_j} = 1$ в G_2 при $y_j \neq 1$ в G_2, то $d^n = 1$ в G_2, иначе $[\beta_1 d \beta_1^{-1}, y_j] = 1$ в G_2 для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Вместе эти свойства групп G_1 и G_2 дают следующее.

Так как $\tilde{v}_1 = 1$ в G_1, из (3) следует, что $d^t = 1$ в G и $h = \alpha_1 d^{\bar{t}} \beta_1^{-1}$ в G, где $0 \leqslant \bar{t} < t$, причём если $d^n = 1$ в G_2, то $\bar{t} = 0$. В любом случае $[y_j, \beta_1 d^{\bar{t}} \beta_1^{-1}] = 1$ в G_2 для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Если найдётся $J \in \{1, \ldots, k\}$, такой что $y_J \neq 1$ в G_1, то $(\alpha_1 \omega^{-l} \beta_1^{-1}) c_J^{\bar{m}_J} = h = \alpha_1 d^{\bar{t}} \beta_1^{-1}$ в G, т. е., учитывая, что $y_J = c_J^{s_J}$ в G_1, $\beta_1 d^{-\bar{t}} \alpha_1^{-1} (\alpha_1 \omega^{-l} \beta_1^{-1}) c_J^{\bar{s}_J} = y_J^{p_J}$ в G, где $0 \leqslant \bar{s}_J < s_J$. Если $c_J^{\bar{m}_J} = 1$ в G_1, то $c_J^{\bar{s}_J} y_J^{-p_J} = 1$ в G_1. Иначе $[y_j, y_J] = 1$ в G_1 для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$. Значит, по условию (D4$_1$) $[y_j, c_J] = 1$ в G_1. В любом случае $[y_j, c_J^{\bar{s}_J} y_J^{-p_J}] = 1$ в G_1 для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Докажем обратное утверждение.

Пусть $y_j = \beta_j \beta_{j+1}^{-1} = 1$ в G_1 для всех j, т. е. $\beta_1 = \ldots = \beta_k$ в G_1. Из (C2$_1$) следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k$ в G_1. Поэтому система (1) верна в G_1 для любого h, в частности для $h = \alpha_1 \beta_1^{-1}$, при котором система (1) верна в G_2.

Пусть теперь $y_J \neq 1$ в G_1 и $\beta_1 d^{-\bar{t}} \omega^{-l} \beta_1^{-1} c_J^{\bar{s}_J} = y_J^{p_J}$ в G. Тогда слово $(\beta_1 d^{-\bar{t}} \alpha_1^{-1})(\alpha_1 \omega^{-l} \beta_1^{-1}) c_J^{\bar{s}_J} y_J^{-p_J}$ представляется в виде $\tilde{\nu_2} \tilde{\nu_1}^{-1}$ для некоторых слов $\tilde{\nu_1} \in N_1$, $\tilde{\nu_2} \in N_2$, т. е. $(\alpha_1 \omega^{-l} \beta_1^{-1}) c_J^{\bar{s}_J} y_J^{-p_J} \tilde{\nu_1} = \alpha_1 d^{\bar{t}} \beta_1^{-1} \tilde{\nu_2}$ в F. Проверим, что система (1) верна в $F/N_1 \cap N_2$ при $h = (\alpha_1 \omega^{-l} \beta_1^{-1}) c_J^{\bar{s}_J} y_J^{-p_J} \tilde{\nu_1} = \alpha_1 d^{\bar{t}} \beta_1^{-1} \tilde{\nu_2}$.

В G_1, применяя равенства случая C2 к системе (1), получаем систему (5). Система (5) выполняется в G_1 для $h = (\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_J^{\bar{s}_J}y_J^{-p_J}\tilde{\nu}_1$. Проверка этого аналогична проверке из доказательства леммы 3.

В G_2, применяя равенства случая C2 к системе (1), получаем систему (4). Система (4) выполняется в G_2 для $h = \alpha_1 d^{\bar{t}}\beta_1^{-1}\tilde{\nu_2}$. Проверка этого аналогична проверке из доказательства леммы 2.

Так как при $h = (\alpha_1\omega^{-l}\beta_1^{-1})c_J^{\bar{s}_J}y_J^{-p_J}\tilde{\nu}_1 = \alpha_1 d^{\bar{t}}\beta_1^{-1}\tilde{\nu_2}$ система (1) верна как в G_1, так и в G_2, то при данном h система (1) верна и в $F/N_1 \cap N_2$. □

Лемма 5. *Пусть $\tilde{v}_1 \neq 1$ в G_1, $\tilde{v}_1 = 1$ в G_2 и выполняются равенства случая* C2, *а также условия* $(\mathrm{D1}_1)$, $(\mathrm{D2}_1)$, (D3), (D4). *Тогда существует $h \in F$, при котором система* (1) *верна в $F/N_1 \cap N_2$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $y_j = 1$ *в* G_2 *для всех* $j \in \{1, \ldots, k\}$;
2) *найдётся* $J \in \{1, \ldots, k\}$, *такой что* $y_J \neq 1$ *в* G_2, *для которого найдутся* $c \in \mathrm{Roots}_{G_1}(\tilde{v}_1)$, $d_J \in \mathrm{Roots}_{G_2}(y_J)$, $\bar{s}, \bar{t}_J, p_J \in \mathbb{Z}$, *такие что*

(T1‴) $0 \leqslant \bar{s} < s$, $0 \leqslant \bar{t}_J < t_J$, *где* $d_J^{t_J} = y_J$ *в* G_2, $c^s = \tilde{v}_1$ *в* G_1;

(T2‴) $(\beta_1 c^{-\bar{s}}\omega^l\beta_1^{-1})d_J^{\bar{t}_J} = y_J^{p_J}$ *в* G;

(T3‴) $[y_j, \beta_1 c^{\bar{s}}\beta_1^{-1}] = 1$ *в* G_1, $[y_j, d_J^{\bar{t}_J}y_J^{-p_J}] = 1$ *в* G_2 *для любых* $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4. □

Окончим доказательство теоремы 1. Как отмечалось выше, в случае C1 при $h = \alpha_1\beta_1^{-1}$ верно равенство $h^{-1}u_jh = v_j$ в $F/N_1 \cap N_2$ для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$. В случае C2 благодаря условию 1.3 теоремы 1 верны леммы 2—5. Из достаточных условий этих лемм получаем алгоритм проверки на обобщённую сопряжённость в случае C2, так как по условию 1.2 теоремы 1 множества $\mathrm{Roots}_{G_1}(\tilde{v}_1)$, $\mathrm{Roots}_{G_1}(y_j)$ ($\mathrm{Roots}_{G_2}(\tilde{v}_1)$, $\mathrm{Roots}_{G_2}(y_j)$) конечны в G_1 (соответственно в G_2), а из условий 1.1 и 2.1 теоремы 1 следует разрешимость в группах G, G_1 и G_2 проблемы равенства. По ходу доказательств каждой из лемм 2—5 предъявлялось сопрягающее слово h.

Литература

[1] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщённой сопряжённости слов в группах Кокстера большого типа // Дискрет. матем. — 2005. — Т. 17, № 3. — С. 123—145.

[2] Громов М. Гиперболические группы. — Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.

[3] Куликова О. В. О проблеме сопряжённости в группе $F/N_1 \cap N_2$ // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 6. — С. 853—868.

[4] Куликова О. В., Ольшанский А. Ю. О конечной определённости группы $F/[M, N]$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2006. — № 6. — С. 19—21.

[5] Лысенок И. Г. О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1989. — Т. 53, № 4. — С. 814—832.

[6] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.

[7] Саркисян Р. А. Проблема сопряжённости для наборов целочисленных матриц // Матем. заметки. — 1979. — Т. 25, № 6. — С. 811—824.

[8] Baumslag G., Bridson M. R., Miller C. F., III, Short H. Fibre products, non-positive curvature and decision problems // Comm. Math. Helv. — 2000. — Vol. 75. — P. 457—477.

[9] Bogley W. A., Pride S. J. Aspherical relative presentations // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1992. — Vol. 35, No. 1. — P. 1—39.

[10] Bridson M. R., Howie J. Conjugacy of finite subsets in hyperbolic groups // Int. J. Algebra Comput. — 2005. — Vol. 15, no. 4. — P. 725—756.

[11] Bridson M. R., Howie J., Miller C. F., III, Short H. On the finite presentation of subdirect products and the nature of residually free groups // Amer. J. Math. — 2013. — Vol. 135. — P. 891—933.

[12] Bridson M. R., Miller C. F., III. Structure and finiteness properties of subdirect products of groups // Proc. London Math. Soc. — 2009. — Vol. 98, no. 3. — P. 631—651.

[13] Collins D. J. Conjugacy and the Higman embedding theorem // Word Problems II / S. I. Adian, W. W. Boone, G. Higman, eds. — Amsterdam: North-Holland, 1980. — (Stud. Logic Foundations Math.; Vol. 95). — P. 81—85.

[14] Gersten S. M., Short H. B. Rational subgroups of biautomatic groups // Ann. Math. — 1991. — Vol. 134. — P. 125—158.

[15] Gersten S. M., Short H. B. Small cancellation theory and automatic groups // Invent. Math. — 1990. — Vol. 102. — P. 305—334.

[16] Gutiérrez M. A., Ratcliffe J. G. On the second homotopy group // Quart. J. Math. Oxford (2). — 1981. — Vol. 32. — P. 45—55.

[17] Kassabov M., Matucci F. The simultaneous conjugacy problem in groups of piecewise linear functions // Groups, Geometry, Dynamics. — 2012. — Vol. 6. — P. 279-315.

[18] Kulikova O. V. On intersections of normal subgroups in free groups // Algebra Discrete Math. — 2003. — No. 1. — P. 36—67.

[19] Lindon R. S., Schupp P. E. Combinatorial Group Theory. — Berlin: Springer, 1977.

[20] Miller C. F., III. On Group-Theoretic Decision Problems and Their Classification. — Princeton Univ. Press, 1971. — (Ann. Math. Stud.; Vol. 68).

[21] Truiffault B. Centralisateurs des éléments dans les groupes de Greendlinger // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. — 1974. — Vol. 279. — P. 317—319.

[22] Truiffault B. Centralisateurs des éléments d'ordre fini dans les groupes de Greendlinger // Math. Z. — 1974. — B. 136. — S. 7—11.