

Связь между производящей функцией косых таблиц домино и квазисимметрическими функциями типа B^*

А. Р. МАЙОРОВА

Московский центр
фундаментальной и прикладной математики
e-mail: alina.r.m@yandex.ru

УДК 519.117

Ключевые слова: квазисимметрические функции, косые таблицы домино.

Аннотация

В работе рассмотрены производящая функция косых таблиц домино и условия её разложения на фундаментальные квазисимметрические функции. Данный вопрос, как показано ранее А. Р. Майоровой и Е. А. Васильевой, связан с такой характеристикой элементов групп Кокстера и таблиц для групп Кокстера, как множество спусков. В статье приведены оценки на количество диаграмм, подходящих под данные условия.

Abstract

A. R. Mayorova, A link between the generating function of skew domino tableaux and quasisymmetric functions of type B, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 2, pp. 185–208.

In this paper, we consider the generating function of skew domino tableaux and conditions of decomposing it using fundamental quasisymmetric functions of type B. This question, as showed earlier by Mayorova and Vassilieva, is related to the descent statistics for elements of Coxeter groups and tableaux for Coxeter groups. In this paper, we obtain estimates of the number of diagrams that fit the conditions.

1. Введение и основные определения

Определение 1. Диаграмму Юнга из n клеток, заполненную целыми неотрицательными числами, назовём *полустандартной таблицей Юнга*, если

- каждая строка представляет собой неубывающую последовательность;
- каждый столбец представляет собой возрастающую последовательность.

Полустандартную таблицу Юнга назовём *стандартной*, если в ней встречаются все числа $[n] = \{1, \dots, n\}$ ровно по одному разу.

*Работа финансово поддержана грантом «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем» Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

У стандартной таблицы Юнга T можно определить характеристику, называемую множеством спусков. Назовём *множеством спусков* $\text{Des}(T)$ множество тех индексов $i \in [n - 1]$, у которых клетка $i + 1$ находится ниже, чем клетка i . Множество спусков для стандартных таблиц Юнга связано с аналогичной характеристикой перестановок симметрической группы:

$$\text{Des}(\pi) = \{i \in \{1, 2, \dots, n - 1\} \mid \pi(i) > \pi(i + 1)\} \text{ для любой } \pi \in S_n.$$

В частности, они связаны при помощи *алгоритма Робинсона—Шенстеда—Кнута*, устанавливающего сохраняющую множество спусков биекцию между перестановками и парами стандартных таблиц Юнга одинаковой формы.

Рассмотрим производящие функции полустандартных таблиц Юнга, также известные как многочлены Шура:

$$s_\lambda = \sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda)} X^T,$$

где для таблицы T , заполненной числами $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, через X^T обозначается моном $x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_n}$.

Хорошо известно, что многочлены Шура выражаются при помощи квазисимметрических функций F_I следующим образом:

$$s_\lambda = \sum_I d_{\lambda I} F_I, \quad (1)$$

где $d_{\lambda I}$ — количество стандартных таблиц Юнга формы λ и множества спусков I .

В [8] множество спусков определено для всех типов групп Кокстера. В данной статье нас интересует случай группы Кокстера типа В.

Элементами группы Кокстера типа В являются биекции из множества

$$\{-n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$$

в себя, удовлетворяющие свойству $\pi(-i) = -\pi(i)$. Также можно рассматривать её элементы как перестановки со знаками. Л. Соломон [8] определяет *множество спусков* $\text{Des}(\pi)$ как множество

$$\{i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \mid \pi(i) > \pi(i + 1)\}.$$

Таким образом, главное отличие от случая симметрической группы — возможный спуск в позиции 0.

Группа Кокстера типа В связана с таблицами типа В (называемыми также *таблицами домино*) аналогом алгоритма Робинсона—Шенстеда—Кнута и через них — с квазисимметрическими функциями типа В.

Определение 2. Диаграмму Юнга, разбитую на домино и заполненную неотрицательными целыми числами, назовём *полустандартной таблицей домино*, если выполнены следующие условия:

- каждая строка является неубывающей последовательностью;

- каждый столбец является возрастающей последовательностью;
- верхнее левое домино не может быть заполнено нулём, если оно вертикальное.

Таблица называется *стандартной*, если каждое число из интервала $[1, n]$ использовалось ровно один раз. Мы рассматриваем множество $\mathcal{P}^0(n)$ разбиений $\lambda \vdash 2n$, у которых диаграмма Юнга допускает разбиение на домино.

Для стандартной таблицы домино T определим множество $\text{Des}(T)$ — множество индексов $i \in [1, n-1]$, таких что $i+1$ расположено выше i и дополнительно ноль лежит в $\text{Des}(T)$, если домино с индексом 1 расположено вертикально. Обозначим через $d_{\lambda I}^B$ количество таблиц домино формы λ и множества спусков I .

Ч. О. Чау [3] определил семейство квазисимметрических функций типа В и, в частности, фундаментальные квазисимметрические функции следующим образом:

$$F_I^B(X) = \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \\ j \in I \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}.$$

В [7] автором совместно с Е. А. Васильевой показано, что производящая функция полустандартных таблиц домино допускает аналогичное (1) разложение через фундаментальные функции Чау.

Теорема 1. Пусть $\lambda \in \mathcal{P}^0(n)$. Тогда

$$\mathcal{G}_\lambda(X) = \sum_{\text{shape}(T)=\lambda} X^T = \sum_{I \subseteq \{0\} \cup [n-1]} d_{\lambda I}^B F_I^B.$$

Это разложение можно использовать чтобы установить связь между структурными константами алгебры спусков типа В и таблицами домино. Также оно полезно при изучении Шур-положительных множеств в типе В (подробнее см. [6, 7]).

Перейдём теперь от обычных диаграмм к косым диаграммам. Разница двух диаграмм Юнга λ и μ ($\mu_i \leq \lambda_i$ для всех i) называется *косой диаграммой Юнга* формы λ/μ . Аналогично случаю обычных диаграмм определяются и косые (полу-)стандартные таблицы Юнга. Разложение (1) оказывается верным для косых диаграмм Юнга λ/μ :

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)} X^T = \sum_I d_{\lambda/\mu I} F_I.$$

Определение 3. Пусть $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$ (т. е. $\mu \in \mathcal{P}^0(m)$, $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n-m)$). Косая функция домино $\mathcal{G}_{\lambda/\mu}$ — это производящая функция полустандартных косых таблиц формы λ/μ :

$$\mathcal{G}_{\lambda/\mu}(X) = \sum_{T \in \text{SSDT}(\lambda/\mu)} X^T.$$

Строгое определение косой таблицы домино будет дано далее, так как оно опирается на биекцию Стэнтона—Уайта.

В случае типа В аналогичное (1) разложение для косых диаграмм является верным не всегда. Диаграммы, для которых такое разложение верно, мы называем *допустимыми* (точное определение дано далее), множество таких диаграмм λ/μ обозначим $\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)}$ (причём $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n - m)$, $\mu \in \mathcal{P}^0(m)$). Основным результатом данной работы является следующая оценка количества допустимых диаграмм.

Теорема 2. Пусть n, m — натуральные числа, такие что $m < n$. Рассмотрим отношение

$$\frac{|\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)}|}{|\mathcal{P}^0(n, m)|}$$

для фиксированного $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)}|}{|\mathcal{P}^0(n, m)|} = 0.$$

2. Биекция Стэнтона—Уайта

2.1. Би-таблицы

Существует ещё один способ, помимо таблиц домино, чтобы обобщить понятие таблиц Юнга на случай типа В — это би-таблицы. Они связаны с таблицами домино при помощи биекции Стэнтона—Уайта.

Определение 4. Назовём пару диаграмм (λ^-, λ^+) *би-диаграммой* из n клеток, если $|\lambda^-| + |\lambda^+| = n$. *Стандартной би-таблицей* формы (λ^-, λ^+) называется пара таблиц Юнга (T^-, T^+) формы $\text{shape}(T^-) = \lambda^-$ и $\text{shape}(T^+) = \lambda^+$, заполненная числами из $[n]$ так, что строки и столбцы являются возрастающей последовательностью.

Пример 1. Следующая стандартная би-таблица имеет форму $((3), (2, 2, 2))$:

$$\left(T^- = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}, T^+ = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 8 \\ \hline 7 & 9 \\ \hline \end{array} \right).$$

Определение 5. Полустандартная би-таблица (T^-, T^+) — это пара полустандартных таблиц Юнга форм λ^- и λ^+ соответственно с дополнительным условием, что нули могут появляться только в T^+ .

Пример 2. Следующая полустандартная би-таблица имеет форму $((3), (2, 2, 2))$:

$$\left(T^- = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}, T^+ = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline 5 & 7 \\ \hline \end{array} \right).$$

Биекция Стэнтона—Уайта представляет для каждой (полу-)стандартной таблицы домино соответствующую ей (полу-)стандартную би-таблицу.

2.2. Описание биекции

В [2] К. Карре и Б. Леклерк изучали биекцию Стэнтона—Уайта [9]. Они предложили более простое описание биекции между полустандартными таблицами из n домино (без нулей) и парами полустандартных таблиц Юнга из n клеток, которое мы и приведём в этом разделе. Эта биекция может быть ограничена на диаграммы Юнга, так как она не зависит от разбиения на домино и чисел в клетках. Таким образом,

$$|\mathcal{P}^0(n)| = \sum_{0 \leq k \leq n} p(k)p(n - k),$$

где $p(n)$ — число разбиений $\lambda \vdash n$.

Пусть T — таблица домино. Рассмотрим её диагонали

$$d_l = \{(i, j) \in \mathbb{R}^2 \mid i = j - 2l\}.$$

Диагональ может пересекать домино четырьмя различными способами (рис. 1), причём каждое домино пересекается ровно с одной из диагоналей.

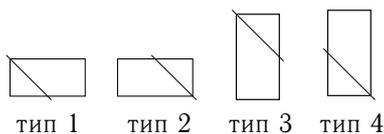


Рис. 1. Четыре возможных расположения домино на диагонали

Обозначим также через d_l^+ и d_l^- диагонали $\{(i, j) \mid i = j - l\}$ би-таблицы Юнга. Рассмотрим домино типов 1 и 4 на диагонали d_l . Назовём их положительными и поставим клетку с их содержимым в таблицу T^+ на диагональ d_l^+ . Остальные назовём отрицательными, их отправим в T^- на диагональ d_l^- . Согласно [2] такое соответствие является биекцией.

Пример 3. На рис. 2 показано разбиение на домино диаграммы Юнга и соответствующая ей пара диаграмм.

На самом деле есть простой способ определить, является ли домино положительным или отрицательным. Мы ставим «-» и «+» в клетки в шахматном

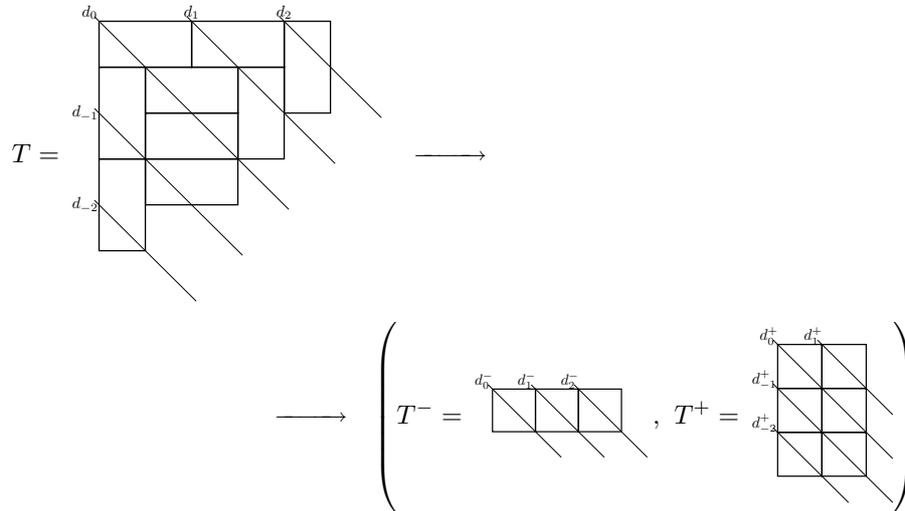


Рис. 2. Разбиение на домино диаграммы Юнга и соответствующая ей пара диаграмм

порядке. В случае горизонтального домино знак домино определяется знаком в правой клетке, в случае вертикального — знаком в верхней клетке. Таким образом, биекция посылает положительные домино в T^+ , а отрицательные — в T^- (рис. 3).

Пример 4. На рис. 3 дана таблица домино и соответствующая ей пара таблиц Юнга.

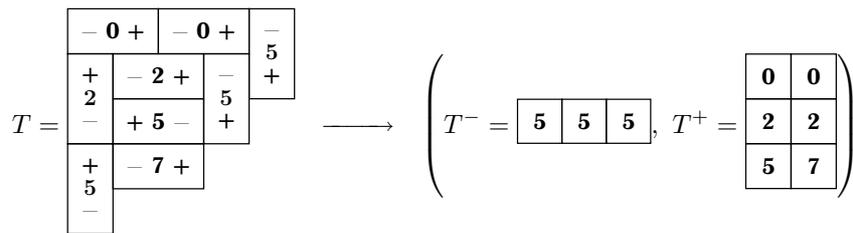


Рис. 3. Полустандартная таблица домино и соответствующая ей пара таблиц Юнга

Замечание 1. Если верхнее левое домино полустандартной таблицы домино T вертикальное (горизонтальное), то оно соответствует клетке в T^- (T^+ соответственно). Несложно заметить, что только таблица T^+ может содержать нули и, наоборот, любую би-таблицу, где нули содержит только T^+ , можно получить

из какой-то полустандартной таблицы домино. Таким образом, в нашем случае алгоритм задаёт биекцию между полустандартными таблицами домино (с нулями) и парами полустандартных таблиц Юнга, заполненными числами $\{1, 2, \dots\}$ и $\{0, 1, 2, \dots\}$.

3. Формула для производящей функции полустандартных косых таблиц домино

Теперь мы можем строго определить, что такое косая таблица домино.

Определение 6. Пусть λ и μ — два разбиения, такие что их разность λ/μ — косая диаграмма, $|\lambda| - |\mu| = 2n$, и пусть диаграммы μ и λ/μ (и, следовательно, λ тоже) могут быть замощены вертикальными и горизонтальными домино. В этом случае мы говорим, что λ/μ лежит в множестве $\mathcal{P}^0(|\lambda|/2, |\mu|/2)$.

Стандартная косая таблица домино — это разбиение косой диаграммы Юнга формы λ/μ на домино, заполненные числами из множества $[n]$ так, что числа возрастают в каждой строке и каждом столбце.

Полустандартная косая таблица домино — это разбиение косой диаграммы Юнга формы λ/μ на домино, заполненные числами из множества $\{0, 1, 2, \dots\}$ так, что числа не убывают в каждой строке и строго возрастают в каждом столбце, кроме того, в отрицательных домино не могут находиться нули.

Формула разложения косой функции домино на квазисимметрические функции требует дополнительного условия на форму диаграммы. Для того чтобы его описать, нам потребуются следующие определения.

Определение 7. Домино d в (полу-)стандартной таблице домино T называется *верхним*, если выполнены два условия:

- над ним нет домино;
- если имеется соседнее слева домино, то оно верхнее.

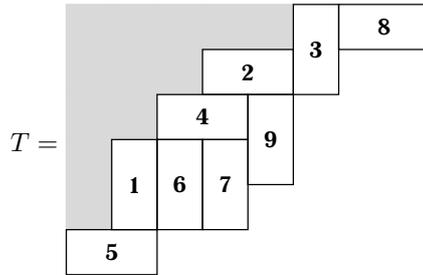
Данное определение корректно, так как статус домино зависит только от домино, расположенных левее или выше. Таким образом, при определении статуса домино процесс не заклинивается.

Замечание 2. Пусть $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$ — косая диаграмма Юнга. Тогда число верхних домино ν , таких что $\mu + \nu$ — диаграмма Юнга, будет равно $O(m)$. В самом деле, в каждом столбце может быть только два возможных положения для домино: вертикальное и горизонтальное, плюс два положения в конце первой строки. Максимальное возможное число столбцов — $2m$, т. е. число положений не более $4m + 2$.

Мы называем верхнее домино d *минимальным положительным*, если d — самое левое нижнее из положительных верхних домино в T , таких что слева от него нет соседнего (отрицательного) верхнего домино.

Может оказаться, что минимального положительного домино нет. К примеру, когда таблица состоит только из отрицательных домино.

Пример 5. В таблице ниже домино 1, 2, 3 и 8 являются верхними и домино 2 минимальным положительным:



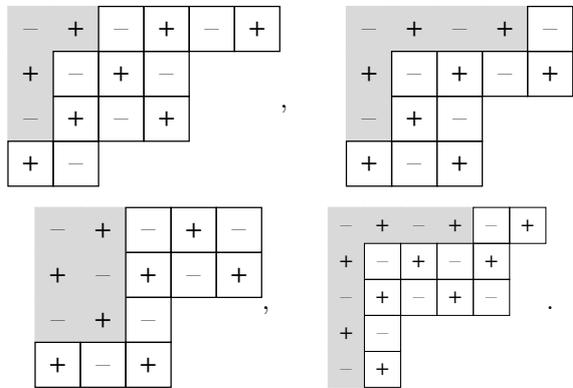
Мы рассматриваем диаграммы со следующим свойством.

Определение 8. Косая диаграмма $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$ называется *допустимой*, если она не может быть разбита на домино таким образом, что

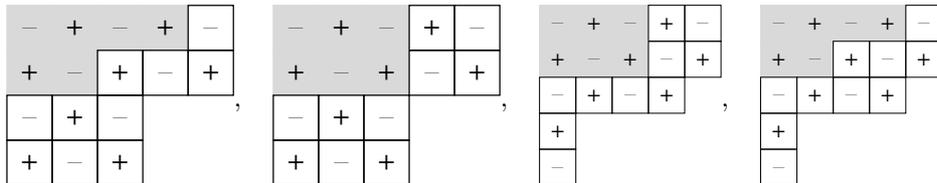
- 1) существует минимальное положительное (верхнее) домино d ;
- 2) существует отрицательное верхнее домино, расположенное правее и выше минимального положительного.

Обозначим через $\mathcal{P}^0(\widetilde{n-m})$ ($\mathcal{P}^0(\widetilde{n, m})$) множество допустимых диаграмм домино, таких что $|\lambda| - |\mu| = 2n - 2m$ ($|\lambda| = 2n, |\mu| = 2m$).

Пример 6. Диаграмма из примера 5 допустима, как и следующие диаграммы:



Примеры недопустимых косых диаграмм:



В [7] автором доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\lambda/\mu \in \widetilde{\mathcal{P}^0(n)}$. Тогда для функции домино $\mathcal{G}_{\lambda/\mu}$ верно следующее:

$$\mathcal{G}_{\lambda/\mu} = \sum_{T \in \text{SSDT}(\lambda/\mu)} X^T = \sum_{I \subseteq \{0\} \cup [n-1]} d_{\lambda/\mu I}^B F_I^B.$$

Замечание 3. На самом деле теорема 3 верна и в обратную сторону. Так, если

$$\mathcal{G}_{\lambda/\mu} = \sum_{I \subseteq \{0\} \cup [n-1]} d_{\lambda/\mu I}^B F_I^B,$$

то косая диаграмма λ/μ допустима.

4. Подходящие диаграммы и строго подходящие последовательности

Данный раздел посвящён описанию подходящих диаграмм. После этого мы сможем доказать основной результат данной статьи: асимптотически имеется мало подходящих диаграмм.

Рассмотрим образ верхнего домино при биекции Стэнтона—Уайта. Определим верхнюю клетку следующим образом.

Определение 9. Клетка d в косой таблице Юнга T называется *верхней*, если над ней не находится ни одна клетка таблицы.

Замечание 4. Биекция Стэнтона—Уайта переводит верхнее домино в верхнюю клетку.

Пусть $\mathcal{P}^0(n, m)$ — косая диаграмма домино. Обозначим через $\delta(\lambda/\mu)$ её границу. Она состоит из четырёх частей: μ -грань, λ -грань и две соединяющие их прямые. Рассмотрим $\delta(\lambda/\mu)$ без λ -границы. Её можно представить как последовательность углов $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ (расположенных снизу вверх), как на рис. 4. Очевидно, что может оказаться так, что две косые диаграммы имеют одну и ту же последовательность углов. Последовательность диаграммы λ/μ зависит только от диаграммы μ и числа клеток в первой строке и первом столбце диаграммы λ .

Каждый угол определяется длинами его рёбер a и b и знаком s в левой верхней клетке. Мы делим все углы на девять типов.

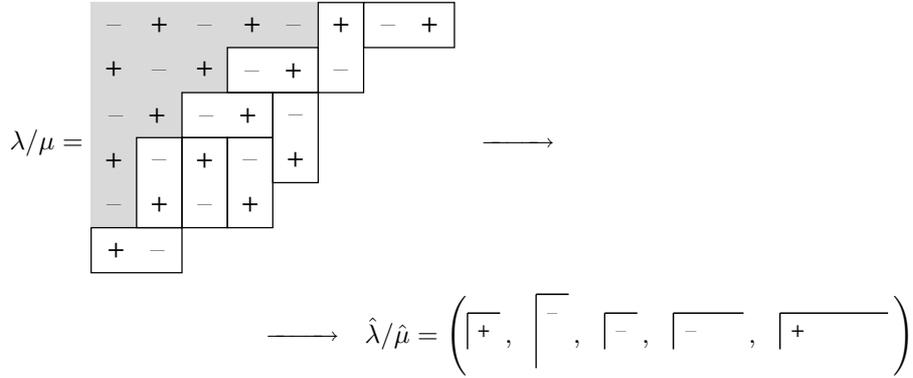


Рис. 4. Косая диаграмма и соответствующая последовательность углов

Типы углов	
тип 0	$a = 0$ или $b = 0$
тип 1	$a \geq 2, b \geq 2, s = \langle + \rangle$
тип 2	$a = 1, b \geq 2, s = \langle - \rangle$
тип 3	$a \geq 2, b = 1, s = \langle + \rangle$
тип 4	$a = 1, b = 1, s = \langle + \rangle$
тип 5	$a = 1, b = 1, s = \langle - \rangle$
тип 6	$a \geq 2, b \geq 2, s = \langle - \rangle$
тип 7	$a = 1, b \geq 2, s = \langle + \rangle$
тип 8	$a \geq 2, b = 1, s = \langle - \rangle$

Заметим, что тип 0 может встретиться только в начале или конце последовательности $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$.

Определение 10. Назовём последовательность $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ *открытой справа (снизу)*, если в первой строке (столбце) содержится как минимум две клетки. Это свойство зависит от последовательности углов диаграммы $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ (точнее, определяется первым и последним углом последовательности) и не зависит от точного

вида самой диаграммы λ/μ . Если последовательность открыта и справа и снизу, называем её *открытой*.

Заметим, что если в $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ встречается угол типа 0, то последовательность закрытая (т. е. не открытая) с соответствующей стороны.

Определение 11. Мы говорим, что последовательность $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ является *строго подходящей* ($\hat{\lambda}/\hat{\mu} \in \widetilde{\mathcal{SP}}^0$), если для любой диаграммы $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$ со структурой углов $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ косая диаграмма λ/μ является подходящей. Диаграмма μ строго подходящая, если соответствующая ей открытая последовательность строго подходящая.

Замечание 5. Если последовательность $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ является строго подходящей, то любая диаграмма $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$ с данной структурой углов является подходящей. В обратную сторону: рассмотрим любую диаграмму $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$. Существует две возможности:

- последовательность $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ является строго подходящей;
- последовательность $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ не является строго подходящей.

Рассмотрим расширение диаграммы μ двумя верхними домино, одно из которых положительное, другое отрицательное (обозначим их ν), причём положительное верхнее домино расположено ниже и левее отрицательного верхнего домино. Согласно определениям если λ/μ подходящее, то для любого расширения ν , удовлетворяющего условиям выше, диаграмма λ не может быть получена из диаграммы $\mu + \nu$ при помощи добавления домино, т. е. $\lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0$.

При помощи замечания выше мы переходим от изучения подходящих диаграмм к изучению строго подходящих последовательностей. Далее мы опишем структуру строго подходящих последовательностей.

Предложение 1. Пусть $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ — последовательность углов, соответствующая некоторой диаграмме $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n - m)$, — является строго подходящей. Тогда

- углы типа 0 разрешены, они могут встречаться в начале или конце последовательности;
- углы типа 1 запрещены, они не встречаются в последовательности;
- углы типов 2—5 разрешены, они могут появляться без дополнительных условий;
- углы типов 6—8 запрещены, если они появляются после углов типа 1, 2, 3, 6 в последовательности.

Доказательство. Углы типа 0 не влияют на статус последовательности (является последовательность строго подходящей или нет). Заметим, что каждое верхнее домино лежит в каком-либо углу. Угол типа 1 может содержать отрицательное домино справа от положительного, поэтому диаграмма с таким углом не может быть строго подходящей. Углы типов 2—5 либо содержат положительное верхнее домино, либо не содержат верхних домино вообще. Углы типов 6—8 могут содержать отрицательное верхнее домино, поэтому в последовательности

они не могут находиться после типов 1, 2, 3, 6, так как они могут содержать положительное верхнее домино. \square

Лемма 1. *Не существует строго подходящих диаграмм из $\mathcal{P}^0(m)$.*

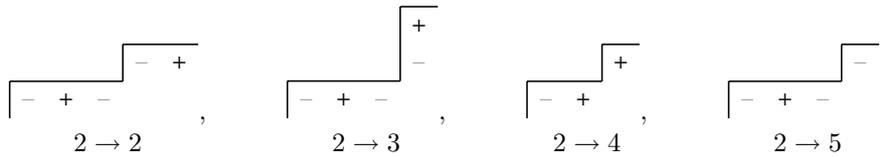
Следующие несколько разделов посвящены доказательству леммы. План доказательства:

- 1) выяснить для каждого типа, какие типы домино могут стоять по соседству в последовательности;
- 2) найти все возможные паттерны, начинающиеся с открытых снизу типов (3, 6, 8) и заканчивающиеся открытыми справа типами (2, 6, 7), такие что соответствующая последовательность углов может оказаться строго подходящей, т. е. подходит под условия из предложения выше;
- 3) показать, что все такие паттерны не дают диаграмму из \mathcal{P}^0 .

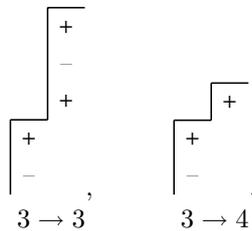
4.1. Допустимые переходы в последовательности

Заметим для начала, что углы типа 0 могут появляться в начале или конце последовательности, перед/после любого угла без каких-либо дополнительных ограничений. Далее в этом разделе мы не будем рассматривать данный тип угла.

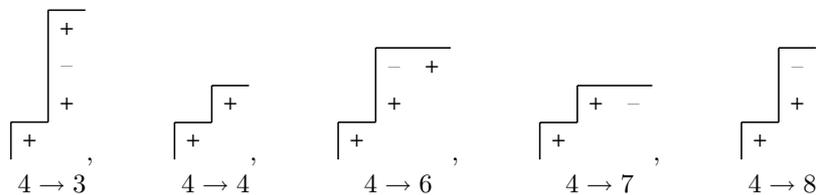
Лемма 2. *После угла типа 2 могут находиться углы типов 2, 3, 4, 5. Ниже приведены примеры для каждого перехода:*



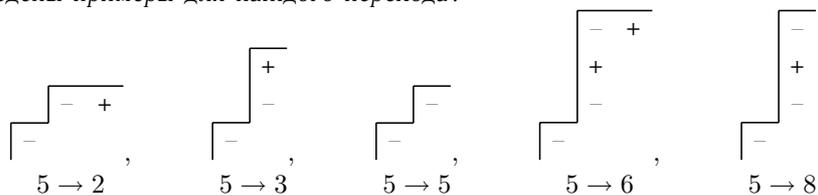
Лемма 3. *После угла типа 3 могут находиться углы типов 3, 4. Ниже приведены примеры для каждого перехода:*



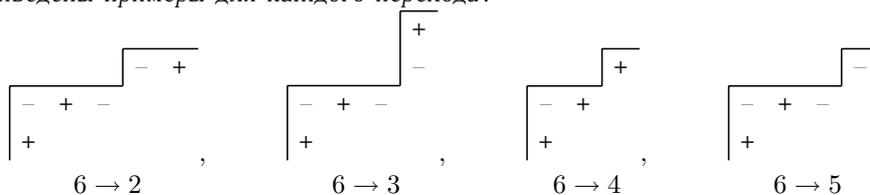
Лемма 4. *После угла типа 4 могут находиться углы типов 3, 4, 6, 7, 8. Ниже приведены примеры для каждого перехода:*



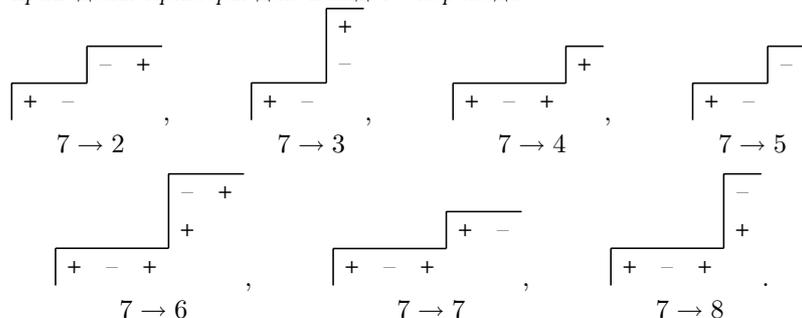
Лемма 5. После угла типа 5 могут находиться углы типов 2, 3, 5, 6, 8. Ниже приведены примеры для каждого перехода:



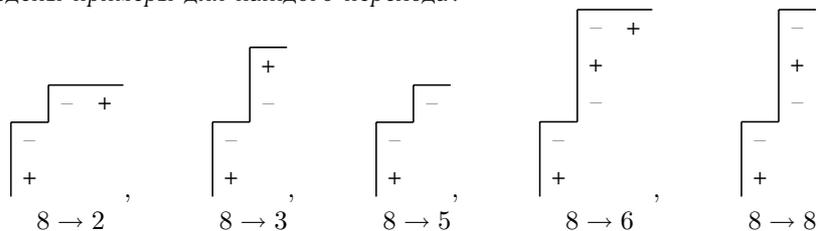
Лемма 6. После угла типа 6 могут находиться углы типов 2, 3, 4, 5. Ниже приведены примеры для каждого перехода:



Лемма 7. После угла типа 7 могут находиться углы типов 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ниже приведены примеры для каждого перехода:



Лемма 8. После угла типа 8 могут находиться углы типов 2, 3, 5, 6, 8. Ниже приведены примеры для каждого перехода:



4.2. Паттерны

В данном разделе мы представим все возможные паттерны для последовательности, начинающиеся с открытых снизу типов углов (3, 6, 8) и заканчивающиеся открытыми справа типами (2, 6, 7), такие что условия предложения 1 выполнены (далее будем называть такие последовательности *правильными*). Переберём все случаи. Начнём с типа 3.

Лемма 9. *Не существует правильной последовательности $\hat{\mu} = \hat{\lambda}/\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_r)$, начинающейся с угла типа 3 и заканчивающейся углом открытого справа типа (2, 6, 7).*

Доказательство. Заметим, что после угла типа 3 не могут появляться углы типов 6, 7, 8. На втором месте после типа 3 в последовательности могут стоять только типы 3 и 4. После 4 могут идти типы 3, 4, 6, 7, 8, но типы 6, 7 и 8 уже запрещены. Таким образом, типы 3 и 4 единственные, которые могут появиться в последовательности, следовательно, последовательность не может заканчиваться открытыми справа типами. \square

В описании последовательности углов мы будем использовать следующие обозначения. Круглые скобки (...) обозначают необязательную часть последовательности, квадратные скобки [...] обозначают часть последовательности, которую следует повторить i раз.

Лемма 10. *Паттерн $6 (\rightarrow [2, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 2)$ описывает все правильные последовательности $\hat{\mu} = \hat{\lambda}/\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_r)$, начинающиеся с угла типа 6 и заканчивающиеся углом открытого справа типа (2, 6, 7).*

Доказательство. Начнём строить последовательность с $\text{type}(\hat{\mu}_1) = 6$. Можно на нём и закончить или же продолжить последовательность далее.

Аналогично лемме 9 типы 6, 7, 8 запрещены после угла типа 6, поэтому закончить последовательность мы можем только углом типа 2. На втором месте могут стоять типы 2, 3, 4 и 5. Доказательство леммы 9 показывает, что последовательность $\hat{\mu}$ не может содержать типов 3 и 4, так как тогда она не может заканчиваться на нужные типы. Таким образом, на втором месте могут стоять типы 2 или 5.

После 2 можно получить типы 2 и 5 (3 и 4 запрещены). После 5 — тоже типы 2 и 5 (3, 6, 8 запрещены). Таким образом, последовательность начинается с угла типа 6, затем идёт некоторое неотрицательное число углов типов 2 и 5 и заканчивается она на угле типа 2:

$$6 (\rightarrow [2, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 2). \quad \square$$

Обозначим далее меткой * позицию в последовательности, начиная с которой углы типов 6, 7, 8 становятся запрещены.

Лемма 11. *Следующие два паттерна описывают все правильные последовательности $\hat{\mu} = \hat{\lambda}/\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_r)$, начинающиеся с угла типа 8 и заканчивающиеся углом открытого справа типа (2, 6, 7):*

$$\begin{aligned} 8 &\rightarrow [8, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 6_* (\rightarrow [2, 5]_{j \geq 0} \rightarrow 2), \\ 8 &\rightarrow [8, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 2_* (\rightarrow [2, 5]_{j \geq 0} \rightarrow 2). \end{aligned}$$

Доказательство. Углы типов 6, 7, 8 разрешены до тех пор, пока мы не используем углы типов 2, 3 или 6. Рассмотрим для начала часть последовательности до их использования.

Начинаем последовательность углов с $\text{type}(\hat{\mu}_1) = 8$. На втором месте могут быть типы 2, 3, 5, 6 и 8. Лемма 9 показывает, что последовательность $\hat{\mu}$ не может содержать угол типа 3. Если $\text{type}(\hat{\mu}_2) = 5$, на третьем месте мы можем получить всё те же типы 2, 3, 5, 6 и 8. Таким образом, 5 и 8 могут повторяться неограниченное число раз, перед тем как мы перейдём к углу типа 2 или 6. Эта часть последовательности отвечает паттерну

$$8 \rightarrow [8, 5]_{i \geq 0}.$$

После получения угла типа 2 или 6 мы можем либо завершить последовательность, либо продолжить её строить. С этого момента типы 6, 7, 8 запрещены. Типы 2 и 6 имеют одинаковые множества последующих элементов. Все последовательности, начинающиеся с типов 2 и 6 и заканчивающиеся на открытые справа типы углов, уже описаны в лемме 10. \square

В следующем разделе рассмотрим более детально паттерны, представленные выше.

4.3. Более детальное рассмотрение возможных паттернов

Начнём с паттерна из леммы 10. Рассмотрим последовательность $\hat{\mu}$, имеющую паттерн

$$6 (\rightarrow [2, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 2).$$

Если мы не используем опциональную часть паттерна, то диаграмма состоит из одного угла типа 6, т. е. на самом деле является обычной, а не косой диаграммой.

Покажем теперь, что последовательность углов $\hat{\mu} = \hat{\lambda}/\hat{\mu}$, имеющая паттерн $6 \rightarrow [2, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 2$, не соответствует диаграмме из $\mathcal{P}^0(m)$.

Лемма 12. Паттерн $6 \rightarrow [2, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 2$ соответствует диаграммам μ , не лежащим в $\mathcal{P}^0(m)$.

Доказательство. Будем рассматривать последовательность углов как последовательность шагов вправо и вверх. Заметим, что она содержит шаги направо длины один и шаги вверх на нечётное количество клеток. Будем пытаться разбить эту диаграмму на домино, делая единственно возможные ходы. Рисунок 5 показывает пример такого разбиения.

Заметим, что завершить разбиение мы не можем по соображениям чётности. Значит, μ не лежит в $\mathcal{P}^0(m)$. \square

Рассмотрим теперь паттерн $8 \rightarrow [8, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 6 (\rightarrow [2, 5]_{j \geq 0} \rightarrow 2)$.

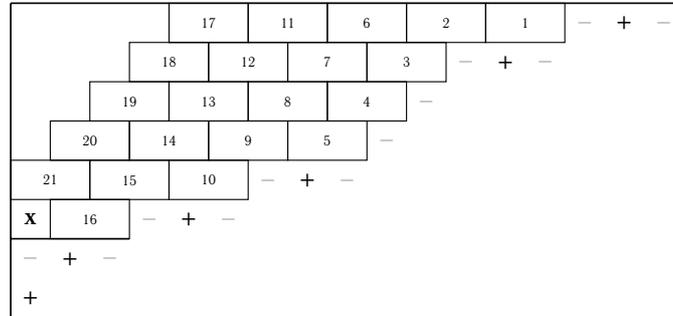


Рис. 5. Диаграмма, соответствующая последовательности $\hat{\mu} = 6 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 2$, и её единственное возможное незавершённое разбиение на домино. Числа определяют последовательность добавления домино в диаграмму

Лемма 13. Паттерн $8 \rightarrow [8, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 6 (\rightarrow [2, 5]_{j \geq 0} \rightarrow 2)$ соответствует диаграммам μ , не лежащим в $\mathcal{P}^0(m)$.

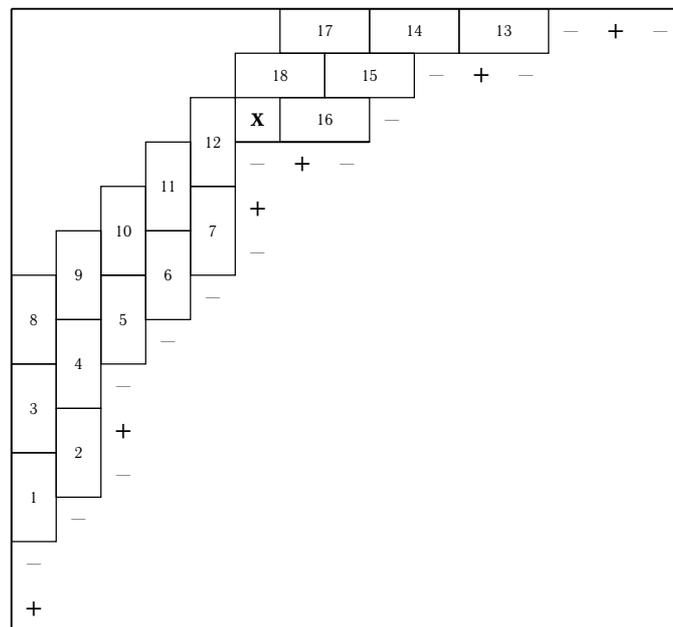


Рис. 6. Диаграмма, соответствующая последовательности $\hat{\mu} = 8 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 6_* \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 2$, и её единственное возможное незавершённое разбиение на домино. Числа определяют последовательность добавления домино в диаграмму

Доказательство. Несложно заметить, что $\hat{\mu}$ разделена (углом типа 6) на две части. Первую часть можно рассматривать как путь с шагами вверх на одну клетку и шагами вправо на нечётное число клеток. Во второй, опциональной, части наоборот.

Заполним первую часть диаграммы единственным возможным способом (вертикальными домино). В случае если нам надо заполнить опциональную часть, заполняем её как в лемме 12. На рис. 6 показан пример такого разбиения.

Заметим, что без опциональной части мы не можем заполнить левый верхний угол. С опциональной же частью возникает проблема около угла типа 6. Значит, μ не из $\mathcal{P}^0(m)$. \square

Лемма 14. Паттерн $8 \rightarrow [8, 5]_{i \geq 0} \rightarrow 2 (\rightarrow [2, 5]_{j \geq 0} \rightarrow 2)$ соответствует диаграммам μ , не лежащим в $\mathcal{P}^0(m)$.

Доказательство аналогично лемме 13 (рис. 7). \square

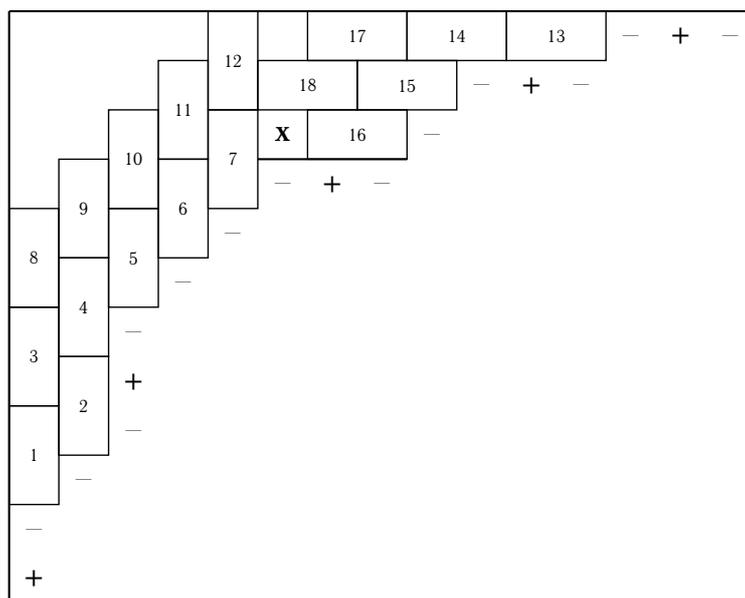


Рис. 7. Диаграмма, соответствующая последовательности $\hat{\mu} = 8 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 2_* \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 2$, и её единственное возможное незавершённое разбиение на домино. Числа определяют последовательность добавления домино в диаграмму

Вместе эти три леммы завершают доказательство леммы 1.

5. Оценки

В данном разделе мы оценим число подходящих диаграмм относительно числа всех диаграмм из \mathcal{P}^0 . Используя структуру строго подходящих последовательностей и замечание 5, мы перейдём к изучению подходящих диаграмм.

А именно, мы уже показали, что строго подходящие последовательности не могут быть открытыми. Это значит, что ширина данной диаграммы (измеренная в самой узкой части) довольно мала. Количество же таких диаграмм также мало. Замечание 5 позволит нам оценить количество подходящих диаграмм, соответствующих нестрого подходящим последовательностям.

Уточним сейчас, что мы будем иметь в виду под шириной косоугольной диаграммы λ/μ . Есть несколько способов, как определить данную величину. Во-первых, можно рассмотреть минимальное число клеток, необходимое, чтобы соединить одну из клеток диаграммы μ с одной из внешних клеток диаграммы λ . Предложение 2 ниже будет верно для такого определения. Однако далее нам потребуются, чтобы ширина таблицы домино была связана с шириной соответствующей би-таблицы. Поэтому лучше использовать несколько менее естественное определение ширины для всех типов косоугольных диаграмм.

Определение 12. Пусть $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$ — косоугольная диаграмма таблицы домино. Определим $\text{wd}(\lambda/\mu)$ — *ширину* диаграммы — как минимальное число клеток на диагоналях d_l , таких что d_l пересекает и λ -грань, и μ -грань. Напомним, что d_l — диагональ $\{(i, j) : i = j - 2l\}$ в таблице домино. Обозначим через $\mathcal{R}_k^0(n, m)$ множество диаграмм из $\mathcal{P}^0(n, m)$ ширины как минимум k .

Определение 13. Определим *ширину* диаграммы Юнга λ/μ как минимальное число клеток на диагоналях d_l , таких что d_l пересекает и λ -грань, и μ -грань. На этот раз диагональ d_l — это линия $\{(i, j) : i = j - l\}$.

Определение 14. Пусть $(\lambda^+/\mu^+, \lambda^-/\mu^-)$ — би-диаграмма. Мы определяем *ширину* для каждой части по отдельности как для диаграммы Юнга:

$$\text{wd}(\lambda^+/\mu^+, \lambda^-/\mu^-) = (\text{wd}(\lambda^+/\mu^+), \text{wd}(\lambda^-/\mu^-)).$$

В этих терминах если последовательность $\hat{\lambda}/\hat{\mu}$ имеет угол типа 0, то $\text{wd}(\lambda/\mu) = 0$. Закрытые с какой-либо стороны последовательности имеют ширину $\text{wd}(\lambda/\mu) \leq 1$.

Предложение ниже утверждает, что число диаграмм с большой шириной гораздо больше, чем число диаграмм с малой шириной.

Предложение 2. Зафиксируем значение m . Тогда для любого неотрицательного целого k верно

$$|\bar{\mathcal{R}}_k^0(n, m)| = |\mathcal{P}^0(n, m)| - |\mathcal{R}_k^0(n, m)| = o(|\mathcal{R}_k^0(n, m)|)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Начнём с оценки сверху числа $|\bar{\mathcal{R}}_k^0(n, m)|$. Будем считать, что $2n$ много больше $2m + k$. Рассмотрим любую диаграмму $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$.

Диаграмма $\mu \vdash 2m$ расположена в квадрате $2m \times 2m$, а $\lambda \vdash 2n$ — в квадрате $2n \times 2n$. Таким образом, в случае если $\lambda/\mu \in \bar{\mathcal{R}}_k^0(n, m)$, диаграмма λ пересекается с квадратом $(2m+k) \times (2m+k)$. Будем рассматривать диаграммы λ как пути из левого нижнего угла квадрата $2n \times 2n$ в правый верхний. Количество путей, пересекающихся с квадратом $(2m+k) \times (2m+k)$, даст нам оценку. Будут посчитаны и лишние пути, не дающие косую диаграмму из $\bar{\mathcal{R}}_k^0(n, m)$, но это не повлияет на результат, нам нужна оценка сверху.

Каждый путь состоит из трёх частей (рис. 8):

- от начала до первого пересечения с квадратом $(2m+k) \times (2m+k)$;
- часть пути, лежащая внутри квадрата $(2m+k) \times (2m+k)$;
- от последнего пересечения с квадратом $(2m+k) \times (2m+k)$ до правого верхнего угла.

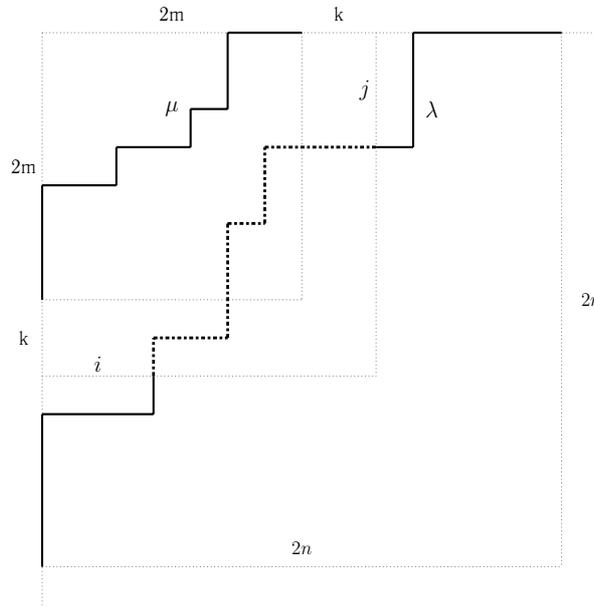
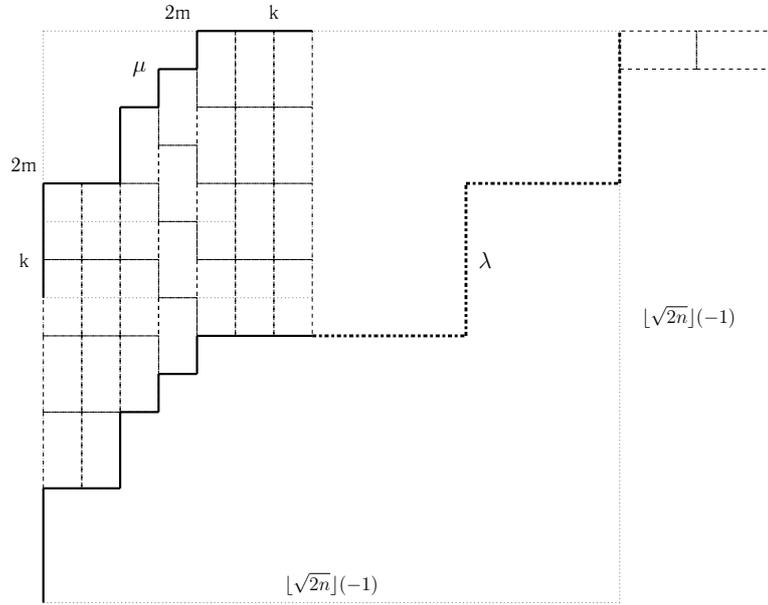


Рис. 8. Диаграмма ширины менее чем k

Пусть $(i, 2m+k)$ и $(2m+k, j)$ — координаты первого и последнего пересечения с квадратом $(2m+k) \times (2m+k)$. Тогда первая часть λ — это путь от $(0, 2n)$ до $(i, 2m+k)$. Число путей из $(0, 2n)$ в $(i, 2m+k)$ равно $\binom{2n-(2m+k)+i}{i}$. Аналогично число путей из $(2m+k, j)$ в $(2n, 0)$ равно $\binom{2n-(2m+k)+j}{j}$. Вторая часть пути содержит $2m+k-i$ шагов вправо и $2m+k-j$ шагов вверх, это $\binom{4m+2k-i-j}{2m+k-j}$ способов.

Число способов выбрать μ равно $|\mathcal{P}^0(m)|$, это константа при любом фиксированном m . Тогда

Рис. 9. Построение подходящего λ

$$|\bar{\mathcal{R}}_k^0(n, m)| \leq |\mathcal{P}^0(m)| \cdot \sum_{i,j=0}^{2m+k} \binom{2n-(2m+k)+i}{i} \binom{4m+2k-i-j}{2m+k-j} \binom{2n-(2m+k)+j}{j}.$$

Применяем формулу Стирлинга, чтобы оценить биномиальные коэффициенты, а также используем то, что $2n$ много больше $2m+k$:

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{R}}_k^0(n, m)| &\leq |\mathcal{P}^0(m)| \cdot (2m+k+1)^2 \binom{2n}{2m+k} \binom{4m+2k}{2m+k} \binom{2n}{2m+k} \sim \\ &\sim \text{Const}_1(m) \times \\ &\times \left[\frac{(2n)^{2n} \sqrt{2\pi(2n)}}{(2m+k)^{2m+k} \sqrt{2\pi(2m+k)} (2n-(2m+k))^{2n-(2m+k)} \sqrt{2\pi(2n-(2m+k))}} \right]^2 \sim \\ &\sim \text{Const}_2(m) \left[\frac{(2n)^{2n}}{(2n)^{2n-(2m+k)} (1-(2m+k)/(2n))^{2n-(2m+k)}} \right]^2 \sim \\ &\sim \text{Const}_3(m) \cdot (2n)^{4m+2k}. \end{aligned}$$

Оценим теперь $|\mathcal{R}_k^0(n, m)|$ снизу.

Зафиксируем диаграмму μ и будем считать, что $2n$ много больше $2m + k$. Будем строить λ , такие что $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$, по процедуре ниже. Алгоритм работает для чётного k , но его несложно модифицировать и для нечётного.

1. Рассмотрим квадрат $[\sqrt{2n}] \times [\sqrt{2n}]$. Все пути из левого нижнего угла в правый верхний соответствуют диаграмме из не более чем $2n$ клеток.
2. Либо $[\sqrt{2n}]$, либо $[\sqrt{2n}] - 1$ чётно, обозначим это число через t . Добавим по $t/2 - m$ вертикальных домино к диаграмме μ в каждый из $2m + k$ первых столбцов. Они будут образовывать первые $2m + k$ столбцов λ/μ .
3. Продолжаем λ до правого верхнего угла, используя либо шаг вверх на две клетки, либо шаг вправо, тоже на две клетки. Таким образом, столбцы λ/μ будут иметь чётное число клеток и могут быть разбиты на домино. Число домино в диаграмме λ на данном этапе не более чем n .
4. Добавляем дополнительные домино в первую строку, чтобы получилось ровно n домино в диаграмме λ .

Обозначим $2k' = k$ и $2t' = t$. На третьем шаге мы делаем $t' - m$ шагов вверх и $t' - m - k'$ шагов вправо, длина каждого шага равна двум. Посчитаем количество таких диаграмм:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{R}_k^0(n, m)| &\geq |\mathcal{P}^0(m)| \cdot \binom{2t' - (2m + k')}{t' - m} \sim \\
 &\sim |\mathcal{P}^0(m)| \times \\
 &\quad \frac{(2t' - (2m + k'))^{2t' - (2m + k')} \sqrt{2\pi(2t' - (2m + k'))}}{(t' - m)^{(t' - m)} \sqrt{2\pi(t' - m)} \cdot (t' - (m + k'))^{t' - (m + k')} \sqrt{2\pi(t' - (m + k'))}} \sim \\
 &\sim \text{Const}_4(m) \times \\
 &\quad \frac{(2\sqrt{n/2} - (2m + k'))^{2\sqrt{n/2} - (2m + k')}}{(\sqrt{n/2} - m)^{\sqrt{n/2} - m} \sqrt{2\pi(\sqrt{n/2} - m)} \cdot (\sqrt{n/2} - (m + k'))^{\sqrt{n/2} - (m + k')}} \sim \\
 &\sim \frac{\text{Const}_4(m)}{\sqrt{2\pi(\sqrt{n/2} - m)} (1 - (m + k')/\sqrt{n/2})^{\sqrt{n/2} - (m + k')}} \times \\
 &\quad \frac{(2\sqrt{n/2})^{2\sqrt{n/2} - (2m + k')} (1 - (2m + k')/(2\sqrt{n/2}))^{2\sqrt{n/2} - (2m + k')}}{(\sqrt{n/2})^{\sqrt{n/2} - m} (1 - m/\sqrt{n/2})^{\sqrt{n/2} - m} (\sqrt{n/2})^{\sqrt{n/2} - (m + k')}} \sim \\
 &\sim \frac{\text{Const}_5(m)}{\sqrt[4]{n}} \frac{(2\sqrt{n/2})^{2\sqrt{n/2} - (2m + k')}}{(\sqrt{n/2})^{\sqrt{n/2} - m} (\sqrt{n/2})^{\sqrt{n/2} - (m + k')}} \sim \frac{\text{Const}_6(m)}{\sqrt[4]{n}} \cdot 2^{\sqrt{2n}}.
 \end{aligned}$$

Наконец, несложно видеть, что $|\bar{\mathcal{R}}_k^0(n, m)| = o(|\mathcal{R}_k^0(n, m)|)$. □

Замечание 6. Доказательство легко переносится и на случай диаграмм Юнга.

Предложение 3. Пусть $\mu \in P^0(m)$. Зафиксируем также некоторое ν — расширение μ на одно положительное и одно отрицательное домино. Тогда для всех $k > 2$

$$\#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m), \lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0(n, m + 2)\} = o(\#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\}),$$

где $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим биекцию между диаграммами из $\mathcal{P}^0(n, m)$ и парами диаграмм Юнга. Если $\lambda \geq \mu$, то $\lambda^- \geq \mu^-$ и $\lambda^+ \geq \mu^+$. Как уже сказано выше, верхние домино λ/μ переходят в верхние клетки. Тогда если $\lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0(n, m + 2)$, то одна из верхних клеток образа ν на самом деле не лежит в λ^+ или λ^- , т. е. $\text{wd}(\lambda^-/\mu^-) = 0$ или $\text{wd}(\lambda^+/\mu^+) = 0$. Заметим, что если $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$ и $\text{wd}(\lambda^-/\mu^-) + \text{wd}(\lambda^+/\mu^+) \geq k$, то $\lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)$. Таким образом,

$$\#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m) \text{ и } \text{wd}(\lambda^-/\mu^-) + \text{wd}(\lambda^+/\mu^+) \geq k\} \leq \#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\}.$$

Теперь несложно видеть, что

$$\begin{aligned} & \#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m), \lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0(n, m + 2)\} \leq \\ & \leq \#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m), \text{wd}(\lambda^-/\mu^-) = 0 \text{ or } \text{wd}(\lambda^+/\mu^+) = 0\} \leq \\ & \leq \#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m), \text{wd}(\lambda^-/\mu^-) = 0 \text{ or } \text{wd}(\lambda^+/\mu^+) = 0\} \leq \\ & \leq \#\{\lambda: \lambda^- \geq \mu^-, \lambda^+ \geq \mu^+, \text{wd}(\lambda^-/\mu^-) = 0\} + \\ & + \#\{\lambda: \lambda^- \geq \mu^- \text{ and } \lambda^+ \geq \mu^+, \text{wd}(\lambda^+/\mu^+) = 0\} = \\ & = o(\#\{\lambda^-: \lambda^- \geq \mu^-, \text{wd}(\lambda^-/\mu^-) \geq k\}) \cdot (\#\{\lambda^+: \lambda^+ \geq \mu^+\}) + \\ & + o(\#\{\lambda^+: \lambda^+ \geq \mu^+, \text{wd}(\lambda^+/\mu^+) \geq k\}) \cdot (\#\{\lambda^-: \lambda^- \geq \mu^-\}) = \\ & = o(\#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m) \text{ и } \text{wd}(\lambda^-/\mu^-) + \text{wd}(\lambda^+/\mu^+) \geq k\}) = \\ & = o(\#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\}). \quad \square \end{aligned}$$

Теперь мы готовы доказать теорему 2.

Доказательство. Зафиксируем $k > 2$. Ограничим наше множество на диаграммы с большой шириной, используя лемму 1:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)}|}{|\mathcal{P}^0(n, m)|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[|\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)}| - o(|\mathcal{R}_k^0(n, m)|)] + o(|\mathcal{R}_k^0(n, m)|)}{|\mathcal{R}_k^0(n, m)| + o(|\mathcal{R}_k^0(n, m)|)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[|\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)}| - |\mathcal{P}^0(n, m) \cap \overline{\mathcal{R}_k^0(n, m)}|]}{|\mathcal{R}_k^0(n, m)|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[|\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)} \cap \mathcal{R}_k^0(n, m)|]}{|\mathcal{R}_k^0(n, m)|}. \end{aligned}$$

Предложение 3 утверждает, что

$$\#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m), \lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0(n, m + 2)\} = o(\#\{\lambda: \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\}).$$

Просуммируем формулу выше по всем $\mu \in \mathcal{P}^0(m)$ и их расширениям ν . Будем обозначать через (μ, λ) пару диаграмм, удовлетворяющих условию $\mu \leq \lambda$; тройка (ν, μ, λ) обозначает косую диаграмму с расширением. Количество расширений не превосходит $\binom{4(m+2)+2}{2}$, из чего следует

$$\begin{aligned} \#\{(\nu, \mu, \lambda) : \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m), \lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0(n, m + 2)\} = \\ = o(\#\{(\mu, \lambda) : \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\}). \end{aligned}$$

Рассмотрим числитель дроби, $|\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)} \cap \mathcal{R}_k^0(n, m)|$. Он равен числу пар (μ, λ) , таких что наименьшая ширина равна k и $\lambda/\mu \in \mathcal{P}^0(n, m)$. Замечание 5 утверждает, что в этом случае или $\hat{\lambda}/\hat{\mu} \in \widetilde{\mathcal{SP}^0(m)}$, или для какого-то расширения ν диаграммы μ верно, что $\lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathcal{P}^0(n, m)} \cap \mathcal{R}_k^0(n, m)| &= \\ &= \sum_{\hat{\lambda}/\hat{\mu} \in \widetilde{\mathcal{SP}^0(m)}} \#\{(\mu, \lambda) : \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\} + \\ &+ \sum_{\hat{\lambda}/\hat{\mu} \notin \widetilde{\mathcal{SP}^0(m)}} \#\{(\mu, \lambda) : \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\} = \\ &= 0 + \#\{(\mu, \lambda) : \hat{\lambda}/\hat{\mu} \notin \widetilde{\mathcal{SP}^0(m)}, \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\} = \\ &= \#\{(\mu, \lambda) : \exists \nu, |\nu| = 2, \lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0(n, m + 2), \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\} \leq \\ &\leq \#\{(\nu, \mu, \lambda) : \lambda/(\mu + \nu) \notin \mathcal{P}^0(n, m + 2), \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\} = \\ &= o(\#\{(\mu, \lambda) : \lambda/\mu \in \mathcal{R}_k^0(n, m)\}) = o(|\mathcal{R}_k^0(n, m)|). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы 2. □

Автор благодарна Е. А. Васильевой и Е. И. Буниной за ценные обсуждения и критические замечания, а также А. В. Михалёву за полезные советы.

Литература

- [1] Adin R. M., Athanasiadis C. A., Elizalde S., Roichman Y. Character formulas and descents for the hyperoctahedral group. — 2015. — [arXiv:1504.01283](#).
- [2] Carré C., Leclerc B. Splitting the square of a Schur function into its symmetric and antisymmetric parts // J. Algebraic Combin. — 1995. — Vol. 4. — P. 201–231.
- [3] Chow C. O. Non Commutative Symmetric Functions of Type B: PhD thesis. — MIT, 2001.
- [4] Elizalde S., Roichman Y. Arc permutations // J. Algebraic Combin. — 2014. — Vol. 39. — P. 301–334.
- [5] Gessel I. Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions // Contemp. Math. — 1984. — Vol. 34. — P. 289–317.

- [6] Mayorova A. R., Vassilieva E. A. A domino tableau-based view on type B Schur-positivity // Proc. of the 16th Int. Permutation Patterns Conf. — 2018. — P. 174—181.
- [7] Mayorova A. R., Vassilieva E. A. A new link between the descent algebra of type B, domino tableaux and Chow's quasisymmetric functions // Discrete Math. — 2019. — Vol. 342, no. 6. — P. 1658—1673.
- [8] Solomon L. A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group // J. Algebra. — 1976. — Vol. 41. — P. 255—264.
- [9] Stanton D. W., White D. E. A Schensted algorithm for rim hook tableaux // J. Combin. Theory Ser. A. — 1985. — Vol. 40, no. 2. — P. 211—247.