# Проективная геометрия над частично упорядоченными телами*

**А. В. МИХАЛЁВ**
*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,*
*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*

**Е. Е. ШИРШОВА**
*Московский педагогический государственный университет,*
*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545+512.552

**Ключевые слова:** частично упорядоченное кольцо, частично упорядоченное тело, частично упорядоченное линейное пространство, направленная группа, выпуклая подгруппа.

**Аннотация**

Рассматриваются производные решётки, ассоциированные с частично упорядоченными линейными пространствами над частично упорядоченными телами. Исследуются свойства выпуклой проективной геометрии $\mathcal{L}$ частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$. Под выпуклостью линейного подпространства в линейном пространстве ${}_FV$ понимается абелева выпуклость (ab-выпуклость), опирающаяся на определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы. Показано, что ab-выпуклые линейные подпространства играют в теории частично упорядоченных линейных пространств ту же роль, что выпуклые подгруппы в теории частично упорядоченных групп. Получено поэлементное описание наименьшего ab-выпуклого направленного линейного подпространства, содержащего данный положительный элемент, в линейном пространстве над направленным телом $F$. Доказывается, что в случае интерполяционного линейного пространства ${}_FV$ над произвольным частично упорядоченным телом $F$ операция объединения в решётке $\mathcal{L}$ вполне дистрибутивна относительно операции пересечения. Изучаются свойства проективной геометрии в псевдо решёточно упорядоченном линейно пространстве ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$.

**Abstract**

*A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova, The projective geometry over partially ordered skew fields*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 2, pp. 231—245.

Derivative lattices associated with partially ordered linear spaces over partially ordered skew fields are considered. Properties of the convex projective geometry $\mathcal{L}$ for a partially ordered linear space ${}_FV$ over a partially ordered skew field $F$ are investigated. The convexity of linear subspaces for the linear space ${}_FV$ means the Abelian convexity (ab-convexity), which is based on the definition of a convex subgroup for a partially

*Работа финансово поддержана грантом «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем» Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

ordered group. It is shown that ab-convex directed linear subspaces plays for the theory of partially ordered linear spaces the same role as convex directed subgroups for the theory of partially ordered groups. We obtain the element-wise description of the smallest ab-convex directed linear subspace that contains a given positive element, for a linear space over a directed skew field. It is proved that if ${}_FV$ is an interpolation linear space over a partially ordered skew field $F$, then, in the lattice $\mathcal{L}$, the union operation is completely distributive with respect to intersection. Properties of the projective geometry for pseudo lattice-ordered linear spaces over partially ordered skew fields are investigated.

# 1. Введение

Пусть $F = \langle F, +, \cdot\rangle$ — тело. Напомним, что $F$ называется *частично упорядоченным телом*, если $\langle F, +, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию: если $a \leqslant b$ и $c > 0$ в $\langle F, +, \leqslant\rangle$, то $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$.

Если группа $\langle F, +, \leqslant\rangle$ является направленной (линейно или решёточно упорядоченной), то $F$ называется *направленным* (*линейно или решёточно упорядоченным*) *телом*.

Частично упорядоченная группа называется *направленной*, если любые два элемента имеют в этой группе верхнюю грань.

Будем далее считать, что $F$ — частично упорядоченное тело нулевой характеристики с положительной единицей (иначе порядок окажется тривиальным).

**Определение 1.** Левое линейное пространство ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ над частично упорядоченным телом $F$ называется частично упорядоченным линейным пространством, если $\langle V, +, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию: из $0 \leqslant v$ следует $0 \leqslant \alpha v$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из тела $F$.

Частично упорядоченное линейное пространство ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$ называют *направленным* (*линейно или решёточно упорядоченным*) *пространством*, если группа $\langle V, +, \leqslant\rangle$ является направленной (линейно или решёточно упорядоченной) группой.

В [1, гл. XV, § 1] данное определение даётся для линейных пространств над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Если абелева группа $\langle V, +, \leqslant\rangle$ является решёточно упорядоченной группой, то вещественное линейное пространство ${}_{\mathbb{R}}V$ принято называть *векторной решёткой*. Изучение векторных решёток началось с работ Л. В. Канторовича [3] и Ф. Риса [13]. Теория векторных решёток играет важную роль в функциональном анализе, в этом ключе различные авторы исследовали свойства действительных функциональных пространств (см. [4]). Большинство стандартных вещественных функциональных пространств являются векторными решётками.

Было замечено,что многие свойства наиболее важных функциональных пространств над полем действительных чисел можно выразить, опираясь только на сложение и упорядочение. Например, таким образом можно вывести целый ряд свойств, касающихся ограниченности, дуальных пространств, многих (внутренних) топологий. Также можно получить большую часть теории положительных линейных операторов.

В данной статье рассматриваются свойства частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами. Полученные результаты относятся к направлению, которое А. Г. Курош предлагал называть проективной алгеброй. В целом это направление восходит к Д. Гильберту. Его развивали Р. Бэр [2] и И. Капланский [12].

Цель работы — рассмотрение производных решёток, ассоциированных с частично упорядоченными линейными пространствами над частично упорядоченными телами.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных алгебраических систем (см. [1, 5, 7]).

В [1], кроме векторных решёток, рассматриваются некоторые свойства произвольных частично упорядоченных линейных пространств над полем действительных чисел. В частности, там доказывается, что множество положительных элементов пространства ${}_{\mathbb{R}}V$ является выпуклым конусом [1, гл. XV, § 1, лемма 1] (имеется в виду геометрическая выпуклость).

Существует много различных определений понятия выпуклости, в том числе аксиоматическое. Мы же предполагаем рассматривать абелеву выпуклость, которая опирается на следующее определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы.

Подгруппа $M$ частично упорядоченной группы $G$ называется *выпуклой*, если для всех $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ следует $g \in M$.

**Определение 2.** Линейное подпространство $M$ частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$ называется ab-выпуклым, если группа $\langle M, +, \leqslant\rangle$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной абелевой группы $\langle V, +, \leqslant\rangle$.

Теоремы второго раздела показывают, какую важную роль играют ab-выпуклые линейные подпространства в теории частично упорядоченных линейных пространств.

**Теорема 1.** *Пусть ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом $F$. Если $M$ — ab-выпуклое линейное подпространство в ${}_FV$, то фактор-пространство $V/M$ является частично упорядоченным линейным пространством над телом $F$.*

Пусть ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом $F$. Будем обозначать через ${}_FV^+$ множество $\{v \in V \mid 0 \leqslant v\}$ положительных элементов пространства ${}_FV$.

Пусть ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant_1\rangle$ и ${}_FU = \langle U, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant_2\rangle$ — частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченным телом $F$.

**Определение 3.** Отображение $f\colon {}_FV \to {}_FU$ называется $o$-гомоморфизмом линейных пространств, если выполняются следующие условия:

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ для всех $a, b \in V$;
2) $f(\alpha a) = \alpha \cdot f(a)$ для всех $a \in V$ и $\alpha \in F$;
3) $f({}_FV^+) \subseteq {}_FU^+$.

При этом $f$ называется строгим $o$-гомоморфизмом линейных пространств, если выполняется условие

4) $f({}_FV^+) = {}_FU^+ \cap \operatorname{Im} f$.

Если для $o$-гомоморфизма линейных пространств $f$ существует $o$-гомоморфизм линейных пространств $f^{-1}$, то $f$ называется $o$-изоморфизмом линейных пространств.

Некоторые свойства $o$-гомоморфизмов линейных пространств исследуются во втором разделе. В этом разделе приводятся доказательства следующих двух теорем.

**Теорема 2.** *Пусть* ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ *— частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом* $F$, $M$ *— ab-выпуклое линейное подпространство в* ${}_FV$. *Тогда сюръективный гомоморфизм* $\pi\colon {}_FV \to {}_F(V/M)$ *(по правилу* $\pi(v) = v + M$*) является строгим* $o$*-гомоморфизмом линейных пространств.*

**Теорема 3.** *Пусть*

$$ {}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant_1\rangle, \quad {}_FU = \langle U, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant_2\rangle \text{ —} $$

*частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченным телом* $F$, $f\colon {}_FV \to {}_FU$ *— строгий* $o$*-гомоморфизм линейных пространств. Тогда существует* $o$*-изоморфизм линейных пространств* $\varphi\colon {}_F(V/\ker f) \to {}_F(\operatorname{Im} f)$ *по правилу* $\varphi(v + \ker f) = f(v)$ *для всех* $v \in V$.

В третьем разделе статьи рассматриваются частично упорядоченные линейные пространства над направленными телами. Основным результатом раздела является следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть* ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ *— частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом* $F$ *и* $0 < u \in V$. *Тогда в пространстве* ${}_FV$ *существует ab-выпуклое направленное линейное подпространство* $I_u$, *в котором каждый положительный элемент* $v \in I_u$ *удовлетворяет неравенствам* $0 \leqslant v \leqslant \alpha u$ *для некоторых элементов* $\alpha > 0$ *из тела* $F$.

Теорема 4 показывает, что в частично упорядоченном линейном пространстве с нетривиальным порядком над направленным телом найдутся направленные подпространства. Очевидно, что $I_u$ — наименьшее ab-выпуклое линейное подпространство в пространстве ${}_FV$, содержащее элемент $u$.

Большинство результатов данной статьи указывают на сходство свойств ab-выпуклых направленных линейных подпространств частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами со свойствами выпуклых направленных подгрупп частично упорядоченных групп.

Далее $\mathcal{L} = \mathcal{L}({}_FV)$ — множество всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$, т. е. $\mathcal{L}$ — выпуклая проективная геометрия.

Напомним, что частично упорядоченная группа $G$ называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$.

**Определение 4.** Частично упорядоченное линейное пространство ${}_FV$, где ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$, над частично упорядоченным телом $F$ будем называть интерполяционным линейным пространством, если группа $\langle V, +, \leqslant\rangle$ является интерполяционной группой.

Свойства выпуклой проективной геометрии интерполяционных линейных пространств исследуются в четвёртом разделе статьи.

Пусть ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ — интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом $F$. Если $\{M_j \mid j \in J\}$ — семейство ab-выпуклых направленных линейных подпространств из ${}_FV$, то объединением $\bigvee\limits_{j \in J} M_j$ подпространств будем считать их сумму $\sum\limits_{j \in J} M_j$, а пересечением $M \wedge N$ подпространств $M$ и $N$ из $\mathcal{L}$ будем считать их теоретико-множественное пересечение $M \cap N$.

В случае интерполяционных линейных пространств справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** *Множество $\mathcal{L}$ всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств интерполяционного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$ образует подрешётку в решётке всех подпространств линейного пространства ${}_FV$. Кроме того,*

1) *$\mathcal{L}$ является полной решёткой сверху;*
2) *в решётке $\mathcal{L}$ операция объединения вполне дистрибутивна относительно операции пересечения, т. е.*

$$N \wedge \Big(\bigvee_{j \in J} M_j\Big) = \bigvee_{j \in J} (N \wedge M_j)$$

*для всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств $N$ и $M_j$ частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$.*

Положительные элементы $a$ и $b$ частично упорядоченной группы $G = \langle G, +, \leqslant\rangle$ называются *почти ортогональными* в $G$, если из неравенств $g \leqslant a, b$ следует верность неравенств $ng \leqslant a, b$ для всех элементов $g \in G$ и всех целых чисел $n > 0$. Частично упорядоченная группа $G = \langle G, +, \leqslant\rangle$ называется *группой с условием почти ортогональности*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов

$a$ и $b$ группы $G$. Интерполяционная группа с условием почти ортогональности называется *псевдо решёточно упорядоченной группой*.

**Определение 5.** Частично упорядоченное линейное пространство ${}_FV$, где ${}_FV = \langle, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ над частично упорядоченным телом $F$ будем называть псевдо решёточно упорядоченным линейным пространством, если группа $\langle V, +, \leqslant\rangle$ является псевдо решёточно упорядоченной группой.

Свойства проективной геометрии псевдо решёточно упорядоченных линейных пространств рассматриваются в пятом разделе статьи.

Пусть ${}_FV$ — псевдо решёточно упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом $F$. Если $\{M_j \mid j \in J\}$ — семейство ab-выпуклых направленных линейных подпространств из ${}_FV$, то пересечением $\bigwedge\limits_{j\in J} M_j$ подпространств будем считать их теоретико-множественное пересечение $\bigcap\limits_{j\in J} M_j$.

**Теорема 6.** *Множество $\mathcal{L}$ всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств псевдо решёточно упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$ — полная дистрибутивная решётка с единицей и нулём, являющаяся брауэровой решёткой.*

Решётку $S$ называют *брауэровой решёткой*, если для любых элементов $a$ и $b$ из $S$ множество $\{x \in S \mid a \wedge x \leqslant b\}$ содержит наибольший элемент.

## 2. Частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченными телами

Напомним некоторые свойства частично упорядоченных групп.

Будем обозначать через $G^+$ множество положительных элементов (положительный конус) частично упорядоченной группы $G$.

Доказательство следующей леммы можно найти, например, в [5, 7].

**Лемма 7.** *Пусть $G$ — аддитивная абелева группа, $M \subset G$. Тогда $M$ является положительным конусом группы $G$ относительно некоторого частичного порядка $\leqslant$ в том и только в том случае, когда $M$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $M + M \subseteq M$;
2) $M \cap -M = \{0\}$, где $-M = \{g \in G \mid -g \in M\}$.

**Лемма 8.** *Пусть $G$ — частично упорядоченная группа, $H$ — подгруппа группы $G$. $H$ является выпуклой подгруппой группы $G$ в том и только в том случае, когда положительный конус группы $H$ является выпуклым подмножеством группы $G$.*

**Доказательство** данного утверждения можно найти в [7, с. 32]. □

**Лемма 9.** *Пусть $f$ — строгий o-гомоморфизм частично упорядоченной аддитивной группы $G$ в частично упорядоченную группу $H$. Тогда изоморфизм $\varphi$ частично упорядоченной группы $G/\ker f$ на частично упорядоченную группу* $\operatorname{Im} f$ (где $\varphi(a + \ker f) = f(a)$ *для каждого* $a \in G$) *является o-изоморфизмом групп в том и только в том случае, когда $f$ — строгий o-гомоморфизм.*

**Доказательство** данного утверждения можно найти в [6, теорема 1]. □

Начнём с исследования свойств множества положительных элементов произвольного частично упорядоченного линейного пространства над частично упорядоченным телом.

**Теорема 10.** *Пусть ${}_FV$ — левое линейное пространство над частично упорядоченным телом $F$ и $P \subset V$. Тогда $P = {}_FV^+$ относительно некоторого частичного порядка $\leqslant$ в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия*:

1) $P + P \subseteq P$;
2) $P \cap -P = \{0\}$, *где* $-P = \{v \in V \mid -v \in P\}$;
3) $\alpha P \subseteq P$ *для всех* $\alpha > 0$ *из тела* $F$.

**Доказательство.** Пусть для подмножества $P$ линейного пространства ${}_FV$ выполняются условия 1)—3).

Согласно условиям 1) и 2) теоремы и лемме 7 множество $P$ является положительным конусом частично упорядоченной группы $\langle V, +\rangle$ относительно некоторого частичного порядка $\leqslant$.

Из условия 3) теоремы и определения 1 следует, что ${}_FV$ является частично упорядоченным линейным пространством относительно порядка $\leqslant$.

Обратное утверждение тривиально. □

**Доказательство теоремы 1.** По определению 2 группа $\langle M, +, \leqslant\rangle$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной группы $\langle V, +, \leqslant\rangle$. Следовательно, фактор-группа $\langle V/M, +\rangle$ является частично упорядоченной группой относительно порядка $\leqslant_1$, при котором $M \leqslant_1 K$ для класса $K \in V/M$, если найдётся элемент $v \in V$, для которого $0 \leqslant v$ и $K = v + M$ (см., например, [5, глава II, § 3, предложение 4]).

Если $\alpha > 0$ в теле $F$, то

$$\alpha K = \alpha(v + M) = \alpha v + M, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \alpha v.$$

Поэтому $M \leqslant_1 \alpha K$.

По определению 1 ${}_F(V/M)$ — частично упорядоченное линейное пространство над телом $F$.

Теорема 1 доказана. □

**Лемма 11.** *Пусть*

$${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant_1\rangle, \quad {}_FU = \langle U, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant_2\rangle \text{ —}$$

*частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченным телом $F$ и отображение $f\colon {}_FV \to {}_FU$ — $o$-гомоморфизм линейных пространств. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *ядро гомоморфизма $\ker f$ является ab-выпуклым линейным подпространством частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$;*
2) *образ гомоморфизма $\operatorname{Im} f$ является частично упорядоченным линейным пространством над телом $F$.*

**Доказательство.** Из условий 1) и 3) определения 3 следует, что $f$ является $o$-гомоморфизмом частично упорядоченной группы $\langle V, +, \leqslant_1\rangle$ в частично упорядоченную группу $\langle U, +, \leqslant_2\rangle$. В этом случае ядро гомоморфизма $\ker f$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной группы $\langle V, +, \leqslant_1\rangle$ (см., например, [5, гл. II, § 3, теорема 3]).

Если $\alpha \in F$ и $v \in \ker f$, то верны равенства $f(\alpha v) = \alpha\cdot f(v) = \alpha 0 = 0$. Значит, $\alpha v \in \ker f$. Поэтому $\ker f$ — линейное подпространство пространства ${}_FV$.

Из определения 2 следует справедливость утверждения 1) леммы.

Второе утверждение тривиально. □

**Доказательство теоремы 2.** Из определения отображения $\pi$ следует, что $\operatorname{Im}\pi = {}_F(V/M)$.

По теореме 1 множество $\operatorname{Im}\pi$ является частично упорядоченным линейным пространством над телом $F$.

С другой стороны, класс $K \in V/M$ является положительным в том и только в том случае, когда существует вектор $v \in V$, для которого $0 \leqslant v$ и $K = v + M$. Значит, $\pi({}_FV^+) = {}_F(V/M)^+ \cap \operatorname{Im}\pi$.

Утверждение теоремы 2 следует из определения строгого $o$-гомоморфизма линейных пространств. Теорема 2 доказана. □

**Доказательство теоремы 3.** Рассмотрим частично упорядоченные группы $V_1 = \langle V, +, \leqslant_1\rangle$ и $U_1 = \langle U, +, \leqslant_2\rangle$.

Из условия теоремы и определения 3 следует, что $f$ является $o$-гомоморфизмом частично упорядоченной группы $V_1$ в частично упорядоченную группу $U_1$.

По определению 1 множества $V_1^+$ и $U_1^+$ удовлетворяют условиям 1)—3) теоремы 10. Поэтому $V_1^+ = {}_FV^+$ и $U_1^+ = {}_FU^+$.

По условию теоремы имеет место равенство $f(V_1^+) = U_1^+ \cap f(V_1)$. Следовательно, $f$ — строгий $o$-гомоморфизм групп.

По лемме 9 существует $o$-изоморфизм $\varphi$ частично упорядоченной группы $V_1/\ker f$ на частично упорядоченную группу $f(V_1)$, при котором $\varphi(a + \ker f) = f(a)$ для каждого $a \in V_1$.

Остаётся доказать, что $\varphi$ — изоморфизм линейных пространств над телом $F$.

Пусть $K = v + \ker f$ для $v \in V$ и $\alpha \in F$. Тогда

$$\varphi(\alpha K) = \varphi\bigl(\alpha(v + \ker f)\bigr) = \varphi(\alpha a + \ker f) = \\ = f(\alpha a) = \alpha\cdot f(a) = \alpha\cdot\varphi(a + \ker f) = \alpha\cdot\varphi(K).$$

Теорема 3 доказана. □

## 3. Частично упорядоченные линейные пространства над направленными телами

Напомним свойство частично упорядоченных групп.

**Лемма 12.** *Если $G = \langle G, +, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа, то следующие условия равносильны:*

1) *$G$ является направленной группой;*
2) *для 0 группы $G$ и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань;*
3) *каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где $a$ и $b$ — положительные элементы группы $G$.*

**Доказательство** данного утверждения можно найти в [7, предложение 1, с. 23]. □

Пусть до конца раздела $V = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом $F$, $0 < u \in V$ и

$$S = \{v \in V \mid 0 \leqslant v \leqslant \alpha u \text{ для некоторых } \alpha > 0 \text{ из тела } F\}.$$

**Лемма 13.** *Множество $S$ является выпуклой подполугруппой в частично упорядоченной группе $\langle V, +, \leqslant \rangle$.*

**Доказательство.** Пусть $v_1, v_2 \in S$. Тогда $0 \leqslant v_1 \leqslant \alpha u$ и $0 \leqslant v_2 \leqslant \beta u$ для элементов $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ из тела $F$.

В линейном пространстве $V$ имеют место неравенства $0 \leqslant v_1 + v_2 \leqslant (\alpha + \beta) u$ для положительного элемента $\alpha + \beta$ из тела $F$. Значит, $\langle S, + \rangle$ — полугруппа с нулём.

Пусть $v_1 \leqslant w \leqslant v_2$ для $w \in V$. Тогда $0 \leqslant w \leqslant \beta u$ для $0 < \beta$ из тела $F$. Это означает, что $w \in S$. Следовательно, $S$ — выпуклое подмножество множества $V$. □

Рассмотрим множество

$$M = \{v \in V \mid v = u - w \text{ для некоторых } u, w \in S\}.$$

**Лемма 14.** *$M$ является выпуклой направленной подгруппой частично упорядоченной группы $V_1 = \langle V, +, \leqslant \rangle$ и $S$ — положительный конус частично упорядоченной группы $\langle M, +, \leqslant \rangle$.*

**Доказательство.** Пусть $v, w \in M$. Тогда $v = a - b$ и $w = c - d$ для некоторых элементов $a, b, c, d \in S$.

В линейном пространстве ${}_F V$ имеют место равенства

$$v - w = (a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c),$$

где по лемме 13 $a + d, b + c \in S$. Значит, $v - w \in M$, т. е. $M$ — подгруппа частично упорядоченной группы $V_1$. Поэтому $\langle M, +, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа относительно индуцированного порядка.

Из леммы 13 следует, что $S$ удовлетворяет условию 1) леммы 7.

Пусть далее $v \in S \cap -S$. Тогда из определения множества $S$ следует справедливость неравенств $0 \leqslant v$ и $v \leqslant 0$. Из последних неравенств следует, что $v = 0$. Таким образом, множество $S$ удовлетворяет условию 2) леммы 7. Следовательно, $S$ является положительным конусом группы $\langle M, +\rangle$ относительно некоторого частичного порядка $\leqslant_1$.

По определению множества $S$ любой элемент $a \in S$ является положительным элементом частично упорядоченной группы $\langle M, +, \leqslant\rangle$.

Рассмотрим элемент $0 \leqslant v \in M$. Тогда $v = a - b$ для некоторых элементов $a, b \in S$. Так как $0 \leqslant b$, то $-b \leqslant 0$, откуда следует верность неравенств $0 \leqslant v \leqslant a$ для элементов $0, a \in S$.

По лемме 13 $v \in S$, так как $S$ — выпуклое подмножество в группе $V_1$. Таким образом, $S$ — положительный конус группы $\langle M, +, \leqslant\rangle$.

Так как по лемме 13 $S$ — выпуклое подмножество в группе $V_1$, то по лемме 8 $M$ — выпуклая подгруппа частично упорядоченной группы $V_1$.

По условию 3) леммы 12 группа $\langle M, +, \leqslant\rangle$ является направленной. □

**Доказательство теоремы 4.** По лемме 14 для элемента $0 < u \in V$ существует выпуклая направленная подгруппа $M_1 = \langle M, +, \leqslant\rangle$ частично упорядоченной группы $V_1$ с положительным конусом $S$. Докажем, что множество $M_1$ является линейным подпространством линейного пространства ${}_FV$.

Пусть $\gamma \in F$ и $v \in M_1$, где $v = a - b$ для некоторых элементов $a, b \in S$. Тогда $0 \leqslant a \leqslant \alpha u$ и $0 \leqslant b \leqslant \beta u$ для $0 < \alpha, 0 < \beta \in F$.

Если $0 < \gamma$ в теле $F$, то следующие соотношения справедливы в линейном пространстве ${}_FV$:

$$0 \leqslant \gamma a \leqslant \gamma(\alpha u) = (\gamma\alpha)u \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \gamma b \leqslant \gamma(\beta u) = (\gamma\beta)u$$
$$\text{для} \quad 0 < \gamma\alpha \quad \text{и} \quad 0 < \gamma\beta \quad \text{из тела} \quad F.$$

Согласно лемме 13 элементы $\gamma a$ и $\gamma b$ принадлежат множеству $S$.

Так как в пространстве ${}_FV$ элемент $\gamma v = \gamma a - \gamma b$, то $\gamma v \in M_1$.

Если $\gamma\langle 0$, то $-\gamma\rangle 0$. В этом случае в линейном пространстве ${}_FV$ справедливы равенства

$$\gamma v = (-\gamma)(-v) = (-\gamma)(b - a) = (-\gamma)b - (-\gamma)a,$$

где по доказанному ранее $(-\gamma)a, (-\gamma)b \in M_1$. Значит, $\gamma v \in M_1$.

Если $\gamma \parallel 0$, то в направленном теле $F$ по условию 3) леммы 12 $\gamma = \delta - \tau$ для некоторых элементов $\delta > 0$ и $\tau > 0$ из тела $F$.

В линейном пространстве ${}_FV$ имеет место равенство $\gamma v = \delta v - \tau v$, где по доказанному ранее элементы $\delta v$ и $\tau v$ принадлежат подгруппе $M_1$. Таким образом, $\gamma v \in M_1$ для любого $\gamma \in F$. Следовательно, $M_1$ — подпространство векторного пространства ${}_FV$. Остаётся вспомнить определение 2. Теорема 4 доказана. □

## 4. Интерполяционные линейные пространства

Примером интерполяционных пространств могут служить векторные решётки. Рассмотрим пример интерполяционного пространства, не являющегося векторной решёткой.

**Пример 1.** Рассмотрим арифметическое линейное пространство

$$_{\mathbb{R}}V = \langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \{a \mid a \in \mathbb{R}\} \rangle$$

над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Элемент линейного пространства $(a, b)$ будем считать положительным, если $a = b = 0$ или $a > 0$ и $b \geqslant 0$. Тогда $_{\mathbb{R}}V$ — интерполяционное линейное пространство, не являющееся векторной решёткой.

Для множества всех выпуклых направленных подгрупп интерполяционной группы справедливо следующее утверждение.

**Лемма 15.** *Пусть $G$ — интерполяционная группа и $\{H_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы $G$. Если $H$ — подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп $H_i$, то $H$ является выпуклой направленной подгруппой группы $G$.*

**Доказательство** данного утверждения можно найти в [8, теорема 2; 10, лемма 9]. □

Напомним, что *суммой линейных подпространств линейного пространства над телом* называется линейная оболочка теоретико-множественного объединения этих подпространств.

**Лемма 16.** *Пусть $_FV$ — линейное пространство над телом $F$, $\{M_j \mid j \in J\}$ — семейство линейных подпространств пространства $_FV$, $M = \sum\limits_{j \in J} M_j$. Тогда группа $\langle M, + \rangle$ является группой, порождённой теоретико-множественным объединением групп $\bigcup\limits_{j \in J} \langle M_j, + \rangle$.*

**Доказательство.** Утверждение является очевидным следствием из определений линейной оболочки системы векторов и подгруппы, порождённой теоретико-множественным объединением подгрупп. □

**Теорема 17.** *Пусть $\{M_j \mid j \in J\}$ — семейство ab-выпуклых направленных линейных подпространств интерполяционного линейного пространства $_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant \rangle$ над частично упорядоченным телом $F$. Тогда сумма линейных подпространств $M = \sum\limits_{j \in J} M_j$ является ab-выпуклым направленным линейным подпространством частично упорядоченного линейного пространства $_FV$.*

**Доказательство.** Из определения суммы линейных подпространств следует, что $M$ — линейное подпространство в линейном пространстве $_FV$. По лемме 16 аддитивная группа $\langle M,+\rangle$ является группой, порождённой теоретико-множественным объединением групп $\bigcup\limits_{j\in J}\langle M_j,+\rangle$. По условию теоремы и определению 2 семейство групп $\{\langle M_j,+,\leqslant\rangle \mid j\in J\}$ является семейством выпуклых направленных подгрупп в частично упорядоченной группе $\langle V,+,\leqslant\rangle$. Так как по условию теоремы и определению 4 группа $\langle V,+,\leqslant\rangle$ является интерполяционной группой, то по лемме 15 подгруппа $\langle M,+,\leqslant\rangle$ является выпуклой направленной подгруппой в частично упорядоченной группе $\langle V,+,\leqslant\rangle$. Поэтому по определению 2 $M$ — ab-выпуклое направленное линейное подпространство частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$. □

Напомним свойство подгрупп интерполяционных групп.

**Лемма 18.** *Если $A$ и $B$ — выпуклые направленные подгруппы интерполяционной группы $G$, то $A\cap B$ — выпуклая направленная подгруппа группы $G$.*

**Доказательство** данного утверждения можно найти, например, в [11, лемма 10]. □

**Лемма 19.** *Пусть $M$ и $N$ — ab-выпуклые направленные линейные подпространства интерполяционного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$. Тогда множество $M\cap N$ также является ab-выпуклым направленным линейным подпространством частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$.*

**Доказательство.** Известно, что $M\cap N$ — линейное подпространство линейного пространства ${}_FV$.

Согласно условию леммы и определению 2 группы $\langle M,+\ \leqslant\rangle$ и $\langle N,+,\leqslant\rangle$ являются выпуклыми направленными подгруппами абелевой интерполяционной группы $\langle V,+,\leqslant\rangle$.

Из леммы 18 следует, что $\langle M\cap N,+,\leqslant\rangle$ — выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы $\langle V,+,\leqslant\rangle$. Значит, по определению 2 $M\cap N$ — ab-выпуклое направленное линейное подпространство частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$. □

**Лемма 20.** *Пусть $G$ — интерполяционная группа. Тогда множество всех выпуклых направленных подгрупп $L(G)$ — подрешётка с нулём в решётке всех подгрупп группы $G$, являющаяся полной подрешёткой сверху.*

*В решётке $L(G)$ операция объединения вполне дистрибутивна относительно пересечения, т. е.*

$$M\wedge\left(\bigvee_{i\in I}H_i\right)=\bigvee_{i\in I}(M\wedge H_i)$$

*для всех выпуклых направленных подгрупп $M$ и $H_i$ в группе $G$.*

**Доказательство.** Под пересечением выпуклых направленных подгрупп понимается их теоретико-множественное пересечение. Объединением подгрупп

$\bigvee\limits_{i\in I} H_i$ считается подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением $\bigcup\limits_{i\in I} H_i$. Доказательство данного утверждения можно найти в [11, теорема 1]. □

**Доказательство теоремы 5.** Пусть $\mathcal{T}$ — множество всех линейных подпространств линейного пространства ${}_FV$ над телом $F$. Известно, что $\mathcal{T}$ образует решётку относительно теоретико-множественных включений, где для произвольных подпространств $M$ и $N$ пространства ${}_FV$ считают

$$M \vee N = M + N, \quad M \wedge N = M \cap N.$$

Из теоремы 17 следует, что если $M$ и $N$ принадлежат $\mathcal{L}$, то $M \vee N \in \mathcal{L}$.

Из леммы 19 следует, что если $M$ и $N$ принадлежат $\mathcal{L}$, то $M \wedge N \in \mathcal{L}$. Значит, множество $\mathcal{L}$ является подрешёткой решётки $\mathcal{T}$.

Если $\{M_j \mid j \in J\}$ — семейство ab-выпуклых направленных линейных подпространств пространства ${}_FV$, то по теореме 17 объединение $\bigvee\limits_{j\in J} M_j$ этих подпространств принадлежит решётке $\mathcal{L}$. Таким образом, справедливо утверждение 1) теоремы.

Чтобы доказать утверждение 2), рассмотрим множества

$$R = \bigvee_{j\in J} (N \wedge M_j), \quad M = \bigvee_{j\in J} M_j.$$

По лемме 19 $N \wedge M_j \in \mathcal{L}$ для всех индексов $j \in J$.

По теореме 17 $R$ и $M$ — ab-выпуклые направленные линейные подпространства частично упорядоченного пространства ${}_FV$.

Для аддитивных групп линейных подпространств линейного пространства ${}_FV$ введём следующие обозначения:

$$\overline{R} = \langle R, +, \leqslant\rangle, \quad \overline{M} = \langle M, +, \leqslant\rangle, \quad \overline{N} = \langle N, +, \leqslant\rangle$$

и

$$\overline{M_j} = \langle M_j, +, \leqslant\rangle, \quad \overline{N \wedge M_j} = \langle N \cap M_j, +, \leqslant\rangle$$

для всех индексов $j \in J$.

По определению 4 группа $\langle V, +, \leqslant\rangle$ является интерполяционной группой, в которой по определению 2 группы $\overline{R}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{M_j}$, $\overline{N \wedge M_j}$ являются выпуклыми направленными подгруппами частично упорядоченной группы $\langle V, +, \leqslant\rangle$ для всех индексов $j \in J$. Тогда для указанных подгрупп в группе $\langle V, + \leqslant\rangle$ в силу определений пересечения и объединения подгрупп (см. лемму 20) справедливы равенства

$$\overline{N \wedge M_j} = \overline{N} \cap \overline{M_j} = \overline{N} \wedge \overline{M_j}$$

для всех индексов $j \in J$.

Из леммы 16 следует, что группа $\overline{R}$ является группой, порождённой теоретико-множественным объединением групп $\bigcup\limits_{j\in J} \overline{N \cap M_j}$, т. е.

$$\overline{R} = \bigvee_{j \in J} (\overline{N} \wedge \overline{M_j}).$$

По лемме 16 группа $\overline{M}$ порождена теоретико-множественным объединением групп $\bigcup\limits_{j \in J} \overline{M_j}$, т. е. $\overline{M} = \bigvee\limits_{j \in J} \overline{M_j}$. Тогда согласно лемме 20 $\overline{R} = \overline{N} \wedge \overline{M}$, откуда следует равенство групп $\overline{R} = \overline{N \wedge M}$. Таким образом, $\langle R, +, \leqslant \rangle = \langle N \wedge M, +, \leqslant \rangle$. Следовательно, справедливо равенство для подпространств $R = N \wedge M$. Теорема 5 доказана полностью. □

## 5. Псевдо решёточно упорядоченные линейные пространства

Любая векторная решётка является псевдо решёточно упорядоченным линейным пространством.

**Пример 2.** Рассмотрим арифметическое линейное пространство

$${}_{\mathbb{R}}V = \langle \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \{a \mid a \in \mathbb{R}\} \rangle$$

над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Допустим, что элемент $(a, b, c, d)$ пространства является положительным, если выполняется одно из следующих условий:

(i) $0 \leqslant a$ и $0 < b$;

(ii) $0 < a$ и $0 \leqslant b$;

(iii) $a = b = 0$ и $0 \leqslant c, d$.

В этом случае линейное пространство ${}_{\mathbb{R}}V$ является псевдо решёточно упорядоченным линейным пространством, но не является векторной решёткой.

**Лемма 21.** *Пусть $G$ — группа с условием почти ортогональности, $\{H_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы $G$, $H = \bigcap\limits_{i \in I} H_i$. Тогда $H$ — выпуклая направленная подгруппа группы $G$.*

**Доказательство** данного утверждения можно найти в [14, теорема 1]. □

**Лемма 22.** *Пусть ${}_FV$ — псевдо решёточно упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом $F$, $\{M_j \mid j \in J\}$ — семейство ab-выпуклых направленных линейных подпространств линейного пространства ${}_FV$, $M = \bigcap\limits_{j \in J} M_j$. Тогда $M$ — ab-выпуклое направленное линейное подпространство в частично упорядоченном пространстве ${}_FV$.*

**Доказательство.** По определению 5 из условия леммы следует, что абелева группа $\langle V, +, \leqslant \rangle$ является группой с условием почти ортогональности. По определению 2 группы $\langle M_j, +, \leqslant \rangle$ — выпуклые направленные подгруппы в частично упорядоченной группе $\langle V, +, \leqslant \rangle$ для всех индексов $j \in J$. Отсюда по лемме 21 заключаем, что $\langle M, +, \leqslant \rangle$ — выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы $\langle V, +, \leqslant \rangle$. Значит, по определению 2 $M$ — ab-выпуклое направленное линейное подпространство частично упорядоченного линейного пространства $_F V$. □

**Лемма 23.** *Полная решётка является брауэровой тогда и только тогда, когда операция объединения в ней вполне дистрибутивна относительно пересечения.*

**Доказательство** данного утверждения можно найти в [1, гл. V, § 10, теорема 24]. □

**Доказательство теоремы 6.** Так как по определению 5 пространство $_F V$ является интерполяционным линейным пространством, то по теореме 4 множество $\mathcal{L}$ является полной решёткой сверху. Кроме того, по теореме 4 в решётке $\mathcal{L}$ операция объединения вполне дистрибутивна относительно операции пересечения.

С другой стороны, из определения 5 следует, что аддитивная группа пространства $_F V$ является группой с условием почти ортогональности. Поэтому по лемме 22 решётка $\mathcal{L}$ является полной решёткой снизу, т. е. $\mathcal{L}$ — полная решётка.

По лемме 23 решётка $\mathcal{L}$ является брауэровой решёткой. Нулём решётки $\mathcal{L}$ является нулевое подпространство, а единицей решётки $\mathcal{L}$ — линейное пространство $_F V$. Теорема 6 доказана. □

## Литература


[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. — М.: Изд. иностр. лит., 1955.

[3] Канторович Л. В. Линейные полуупорядоченные пространства // Матем. сб. — 1937. — Т. 2. — С. 121—168.

[4] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.

[5] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[6] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 4. — С. 147—166.

[7] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[8] Ширшова Е. Е. О выпуклых подгруппах групп с интерполяционным условием // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 187—199.

[9] Ширшова Е. Е. О значениях элементов частично упорядоченных групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 199—212.

[10] Ширшова Е. Е. О свойствах интерполяционных групп // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 2. — С. 295—304.

[11] Ширшова Е. Е. О выпуклых направленных подгруппах псевдорешёточно упорядоченных групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 4. — С. 238—252.

[12] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1954 (1969).

[13] Riesz F. Sur la théorie générale des opérations linéaires // Ann. Math. — 1940. — Vol. 41. — P. 174—206.

[14] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.