Сети доказательства для исчисления Ламбека с одним делением и модальностью для ослабления, используемой только при отрицательной полярности*

А. Е. ПЕНТУС
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: anna.pentus@math.msu.ru

М. Р. ПЕНТУС
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Российский государственный гуманитарный университет

УДК 510.64

Ключевые слова: исчисление Ламбека, сеть доказательства.

Аннотация

В статье вводится вариант исчисления Ламбека, допускающего пустые антецеденты секвенций. В этом варианте используются две связки: левое деление и одноместная модальность, которая встречается только с отрицательной полярностью и разрешает ослабление в антецеденте секвенции. Определяется понятие сети доказательства для этого исчисления, подобное аналогичным сетям для обычного исчисления Ламбека и линейной логики. Доказывается, что произвольная заданная секвенция выводится в рассматриваемом исчислении тогда и только тогда, когда для неё существует сеть доказательства. Тем самым устанавливается критерий для проверки выводимости в этом исчислении в терминах существования графа с определёнными свойствами (при этом размер графа ограничен длиной секвенции).

Abstract

A. E. Pentus, M. R. Pentus, Proof nets for the Lambek calculus with one division and a negative-polarity modality for weakening, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 2, pp. 247—257.

In this paper, we introduce a variant of the Lambek calculus allowing empty antecedents. This variant uses two connectives: the left division and a unary modality that occurs only with negative polarity and allows weakening in antecedents of sequents. We define the notion of a proof net for this calculus, which is similar to those for the ordinary Lambek calculus and multiplicative linear logic. We prove that a sequent is derivable in the calculus under consideration if and only if there exists a proof net for it. Thus, we establish a derivability criterion for this calculus in terms of the existence of a graph with certain properties. The size of the graph is bounded by the length of the sequent.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00100).

Введение

Цель статьи — найти критерий выводимости в исчислении Ламбека с левым делением и модальностью ослабления, допускающем пустые антецеденты, где модальность встречается только при отрицательной полярности.

В разделе 1 вводится исчисление $\mathrm{L}^*(\backslash, !)$ — исчисление Ламбека с левым делением и модальностью ослабления, допускающее пустые антецеденты. В разделе 2 доказывается критерий выводимости для исчисления $\mathrm{L}^*(\backslash, !)$, основанный на графах специального вида.

1. Исчисление

Исчисление Ламбека была введена в [1]. Рассмотрим исчисление Ламбека, допускающее пустые антецеденты, обозначаемое L^*. Добавим одноместную модальность ослабления, обозначаемую !. Рассмотрим фрагмент, где разрешены только левое деление и модальность !. *Типы* этого исчисления строятся из примитивных типов $p_1, p_2, \ldots$ с помощью бинарной связки \ и унарной связки !. Будем считать, что у связки ! приоритет выше. Другими словами, запись $!A\backslash B$ означает $(!A)\backslash B$, а не $!(A\backslash B)$.

Обозначим множество всех типов, построенных таким образом, через $\mathrm{Tp}(\backslash, !)$. Прописные буквы латинского алфавита будем использовать для обозначения типов, а прописные греческие буквы — для обозначения конечных последовательностей типов. Множество всех конечных последовательностей типов обозначается $\mathrm{Tp}(\backslash, !)^*$. Пустая последовательность обозначается Λ.

Если

$$\Gamma = A_1 \, \ldots \, A_n,$$

то через $!\Gamma$ обозначается последовательность

$$(!A_1) \, \ldots \, (!A_n).$$

Через $!^n A$ обозначим тип

$$\underbrace{! \ldots !}_{n \text{ раз}} A.$$

Выводимыми объектами исчисления Ламбека с левым делением и модальностью ослабления, допускающего пустые антецеденты, являются *секвенции* вида $\Gamma \to A$ (при этом Γ называется *антецедентом*, а A — *сукцедентом* данной секвенции). Аксиомы имеют вид $p_i \to p_i$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{A\Pi \to B}{\Pi \to A\backslash B}\ (\to \backslash), \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma \Pi (A\backslash B) \Delta \to C}\ (\backslash \to),$$

$$\frac{\Gamma A \Delta \to B}{\Gamma !A \Delta \to B}\ (! \to), \qquad \frac{\Gamma \Delta \to B}{\Gamma !A \Delta \to B}\ (\mathrm{W}! \to).$$

Рассматриваемое исчисление Ламбека с левым делением и модальностью ослабления, допускающее пустые антецеденты, будем обозначать $\mathrm{L}^*(\backslash, !)$.

Пример 1.1. Вывод

$$\dfrac{\dfrac{p_1 \to p_1}{\to p_1\backslash p_1}\,(\to\backslash) \qquad \dfrac{p_2 \to p_2}{!p_2 \to p_2}\,(!\to)}{(p_1\backslash p_1)\backslash !p_2 \to p_2}\,(\backslash\to)$$

показывает, что $\mathrm{L}^*(\backslash, !) \vdash (p_1\backslash p_1)\backslash !p_2 \to p_2$.

Пример 1.2. Вывод

$$\dfrac{\dfrac{p_2 \to p_2}{!(p_1\backslash p_1)\, p_2 \to p_2}\,(\mathrm{W}!\to)}{p_2 \to !(p_1\backslash p_1)\backslash p_2}\,(\to\backslash)$$

показывает, что $\mathrm{L}^*(\backslash, !) \vdash p_2 \to !(p_1\backslash p_1)\backslash p_2$.

Сформулируем критерий выводимости в исчислении $\mathrm{L}^*(\backslash, !)$, аналогичный критериям для исчислений $\mathrm{L}(\backslash)$ и $\mathrm{L}^*(\backslash)$, открытым Ю. В. Саватеевым (см. [3,4]), и критерию для исчисления $\mathrm{LM}^*(\backslash)$ из [2].

2. Сети

Сформулируем критерий выводимости для исчисления $\mathrm{L}^*(\backslash, !)$, основанный на графах специального вида. Следуя традиции, принятой в линейной логике, такой граф будем называть *сетью доказательства* (или, для краткости, просто *сетью*). В конце этого раздела будет доказано, что секвенция выводится в $\mathrm{L}^*(\backslash, !)$ тогда и только тогда, когда существует сеть, соответствующая данной секвенции.

Формально говоря, сеть доказательства состоит из ориентированного дерева $\langle V, O\rangle$ с множеством листьев W, разметки листьев $\mathrm{label}\colon W \to \{p_1, p_2, \ldots\}$, разметки дуг $\mathrm{op}\colon O \to \{-1, 1, 2\}$, строгого линейного порядка $<$ на множестве V, множества $U \subseteq V$ и бинарного отношения $S \subseteq W \times W$. Обозначим корень дерева $\langle V, O\rangle$ через $\overset{0}{g}$. Здесь дерево $\langle V, O\rangle$ задаётся множеством вершин V и множеством дуг O, при этом дуги направлены в сторону корня дерева, т. е. бинарное отношение O является графиком функции из множества $V \diagdown \{\overset{0}{g}\}$ в множество V (эту функцию будем также обозначать через O) и для любого элемента $a \in V$ найдётся такое натуральное число n, что

$$\underbrace{O(\ldots O}_{n\ \text{раз}}(a)\ldots) = \overset{0}{g}.$$

Отметим, что функция label может не быть инъективной.

Первые четыре компоненты (дерево $\langle V, O\rangle$, две разметки и линейный порядок $<$) образуют *структуру доказательства*. Структура доказательства строится по секвенции (однозначно) следующим образом. Структура доказательства для секвенции

$$A_1 \, \ldots \, A_{n-1} \, A_n \to B$$

совпадает со структурой доказательства для типа

$$A_n \backslash (A_{n-1} \backslash \ldots \backslash (A_1 \backslash B) \ldots),$$

а структуры доказательства для типов строятся индукцией по построению типа. Примитивному типу соответствует структура доказательства с одной вершиной (она помечена этим примитивным типом).

Структура доказательства для типа $!A$ получается из структуры доказательства для A добавлением нового корня и дуги, ведущей из корня сети для A в новый корень (у этой дуги метка 2). Порядок тот же, что в сети для A, но новый корень добавлен в порядок как минимальный элемент.

Структура доказательства для типа $A \backslash B$ получается из дизъюнктного объединения структур доказательства для A и B добавлением нового корня и двух дуг, ведущих из корня структуры доказательства для A в новый корень (у этой дуги метка -1) и из корня структуры доказательства для B в новый корень (у этой дуги метка 1). Порядок определяется как сумма перевёрнутого порядка из структуры доказательства для A, тривиального порядка на новом корне (как одноэлементном множестве) и (неперевёрнутого) порядка из структуры доказательства для B.

Индуктивное определение размеченного дерева и линейного порядка для произвольного типа завершено. Прежде чем сформулировать условия на последние две компоненты сети, введём необходимые обозначения и докажем несколько лемм.

Число дуг с меткой -1 на пути из вершины a до корня обозначим через $\mathrm{d}(a)$. Например, $\mathrm{d}(\overset{0}{g}) = 0$.

Через $\leqslant$ обозначим рефлексивное замыкание отношения $<$. Через O^+ обозначим транзитивное замыкание отношения O. Через O^* обозначим рефлексивно-транзитивное замыкание отношения O.

Для каждой вершины a через $H(a)$ обозначим тот (единственный) лист, от которого к вершине a ведёт путь без отрицательных меток дуг. Из определения d очевидно, что $\mathrm{d}\big(H(a)\big) = \mathrm{d}(a)$.

Лемма 2.1. *Если* $\mathrm{d}(a) = 0$, *то* $H(a) = H(\overset{0}{g})$.

Легко проверить (индукцией по построению типа), что в любой сети истинны следующие утверждения.

D1. Если $a \leqslant b \leqslant c$, $a \, O^* \, d$ и $c \, O^* \, d$, то $b \, O^* \, d$.
D2. Если $a \, O^* \, b$ и $\mathrm{d}(b) = 2n$, то $a \leqslant H(b)$.
D3. Если $a \, O^* \, b$ и $\mathrm{d}(b) = 2n+1$, то $H(b) \leqslant a$.

Лемма 2.2.

1. *Если* $a \, O^* \, b$ *и* $\mathrm{d}(a) \neq \mathrm{d}(b) = 2n$, *то* $a < H(b)$.
2. *Если* $a \, O^* \, b$ *и* $\mathrm{d}(a) \neq \mathrm{d}(b) = 2n+1$, *то* $H(b) < a$.

Обозначим через $\mathrm{pr}_1(S)$ первую проекцию бинарного отношения S. Формально

$$\mathrm{pr}_1(S) = \{a \mid \exists b\ (a, b) \in S\}.$$

В качестве последних двух компонент сети можно взять любые множества $U \subseteq V$ и $S \subseteq W \times W$, удовлетворяющие следующим условиям.

PN1. Если $(a, b) \in S$, то $(b, a) \in S$ (отношение S симметрично).
PN2. Если $(a, b) \in S$ и $(a, c) \in S$, то $b = c$ (отношение S функционально).
PN3. Если $(a, b) \in S$, $(c, d) \in S$ и $a < c < b$, то $a < d < b$.
PN4. Если $(a, b) \in S$, то $\mathrm{label}(a) = \mathrm{label}(b)$.
PN5. Если $(a, b) \in S$ и $a < b$, то $\mathrm{d}(a) = \mathrm{d}(b) + 1$.
PN6. Если $a\ O^*\ c$, $H(c) = b$, $a \in \mathrm{pr}_1(S)$ и $a < S(b) < b$, то найдётся такой элемент d, что $S(a)\ O^*\ d$ и $H(d) = b$.
PN7. $S \neq \varnothing$.
PN8. $\mathrm{pr}_1(S) = W \cap U$.
PN9. Если $a\ O\ b$ и $b \notin U$, то $a \notin U$.
PN10. Если $a\ O\ b$, $a \notin U$ и $\mathrm{op}(a, b) \neq 2$, то $b \notin U$.
PN11. Если $a\ O\ b$ и $\mathrm{d}(b) = 2n$, то $\mathrm{op}(a, b) \neq 2$.

Лемма 2.3. *Если $S(a)$ определено, то $H\big(S(a)\big) = S(a)$.*

Лемма 2.4. *Если $\mathrm{d}(a) = 2n$ и $a \in U$, то $H(a) \in U$.*

Доказательство. Допустим, от противного, что $H(a) \notin U$. Согласно PN11 для всех вершин b на пути от $H(a)$ к a имеем $\mathrm{d}(b) = 2n$. Согласно PN11 ни одна из этих вершин не принадлежит множеству U. $\square$

Лемма 2.5. *Если $a \in U$ и не существует такого элемента $b \in U \cap W$, что $b\ O^*\ a$, то найдётся такой элемент c, что $O(c) = a$ и $\mathrm{op}(c, a) = 2$.*

Согласно PN2 отношение S является графиком частичной функции. Эту частичную функцию будем также обозначать через S.

Для минимума, максимума, интервала, отрезка и открытого справа полуинтервала относительно линейного порядка $<$ будем использовать обозначения $\min$, $\max$, $(a; b)$, $[a; b]$ и $[a; b)$. Если $a \in V$ и $\beta \subseteq V$, то запись $a < \beta$ означает, что для всех $b \in \beta$ имеет место $a < b$.

На диаграммах будем располагать вершины дерева на плоскости так, чтобы движение слева направо соответствовало линейному порядку $<$ (если $a < b$, то a левее, чем b), а дуги дерева вели бы снизу вверх. На диаграмме лист a представляется примитивным типом $\mathrm{label}(a)$ (с чёрточкой сверху, если число $\mathrm{d}(a)$ нечётное). Бинарное отношение O изображается прямыми стрелками, а отношение S — трёхзвенными ломаными линиями.

Лемма 2.6. *Каждая сеть для секвенции $\Pi \to A\backslash B$ является сетью также для секвенции $A\,\Pi \to B$, и наоборот.*

Теорема 2.7. *Пусть* $\mathrm{L}^*(\backslash, !) \vdash \Phi \to D$. *Тогда существует сеть, соответствующая секвенции* $\Phi \to D$.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по длине вывода. Рассмотрим в шаге индукции случай правила

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma \Pi (A \backslash B) \Delta \to C}\ (\backslash \to).$$

Пусть для секвенции $\Pi \to A$ предположение индукции даёт множество U' и бинарное отношение S', а для секвенции $\Gamma B \Delta \to C$ множество U'' и бинарное отношение S''. Если корень поддерева, соответствующего типу B, принадлежит U'', то зададим множество U и отношение S для $\Gamma \Pi (A \backslash B) \Delta \to C$ как естественные образы множества U'' и отношения S'', иначе зададим множество U как объединение естественных образов множеств U' и U'', а отношение S как объединение естественных образов отношений S' и S''.

Остальные случаи в шаге индукции доказываются легко. □

Теорема 2.8. *Пусть существует сеть, соответствующая секвенции* $\Phi \to D$. *Тогда* $\mathrm{L}^*(\backslash, !) \vdash \Phi \to D$.

Теорема 2.8 доказывается индукцией по суммарному количеству связок в Φ и D. Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству шага индукции. Согласно лемме 2.6 достаточно ограничиться секвенциями, где сукцедент D является примитивным типом. Рассмотрим произвольную секвенцию $\Phi \to p_i$ и произвольную соответствующую ей сеть $\langle V, O, \mathrm{label}, \mathrm{op}, <, U, S \rangle$ и предположим, что для всех секвенций с меньшим количеством связок теорема уже доказана.

Лемма 2.9. *Если* $\mathrm{d}(a) > 0$, *то* $a < H(\overset{0}{g})$.

Доказательство. В силу леммы 2.2 из $a\, O^*\, \overset{0}{g}$ и $\mathrm{d}(a) > 0 = \mathrm{d}(\overset{0}{g})$ получаем $a < H(\overset{0}{g})$. □

Лемма 2.10. $H(\overset{0}{g}) \in \mathrm{pr}_1(S)$.

Доказательство. Допустим, от противного, что $H(\overset{0}{g}) \notin \mathrm{pr}_1(S)$. Очевидно, $H(\overset{0}{g}) \notin W$. Согласно PN8 $H(\overset{0}{g}) \notin U$. Согласно лемме 2.4 получаем $\overset{0}{g} \notin U$. Из PN9 индукцией по длине пути получаем, что ни один элемент множества V не принадлежит множеству U. Согласно PN8 $\mathrm{pr}_1(S) = \varnothing$. Это противоречит PN7. □

Лемма 2.11. $\mathrm{d}\big(S\big(H(\overset{0}{g})\big)\big) = 1$.

Лемма 2.12. *Если* $a\, O^+\, c$, $\mathrm{d}(a) > \mathrm{d}(c)$ *и* $a < H(c) < S(a)$, *то* $H(c) \in \mathrm{pr}_1(S)$ *и* $H(c) < S\big(H(c)\big) < S(a)$.

Доказательство. Если $\mathrm{d}(c)$ нечётно, то согласно D3 из $a\, O^*\, c$ получаем $H(c) \leqslant a$, т. е. $H(c) \leqslant a$, что противоречит условию $a < H(c)$. Следовательно, $\mathrm{d}(c)$ чётно. Согласно D2 из $c\, O^*\, c$ получаем $c \leqslant H(c)$.

Согласно PN9 из $a\ O^*\ c$ и $a \in U$ следует $c \in U$. Согласно лемме 2.4 $H(c) \in U$, откуда получаем $H(c) \in \mathrm{pr}_1(S)$. Согласно PN3 имеем, что $a < S\big(H(c)\big) < S(a)$. Если $H(c) < S\big(H(c)\big)$, то лемма доказана. Ввиду PN5 случай $S\big(H(c)\big) = H(c)$ невозможен. Осталось рассмотреть случай $S\big(H(c)\big) < H(c)$.

Из $a\ O^*\ c$, $a \in \mathrm{pr}_1(S)$ и $a < S\big(H(c)\big) < H(c)$ согласно PN6 получаем, что найдётся такой элемент d, что $S(a)\ O^*\ d$ и $H(d) = H(c)$. Так как $H(d) = H(c)$, то $\mathrm{d}(d) = \mathrm{d}(c)$. Следовательно, $\mathrm{d}(d)$ чётно. Согласно D2 из $S(a)\ O^*\ d$ получаем $S(a) \leqslant H(d) = H(c)$, что противоречит неравенству $H(c) < S(a)$. □

Обозначим

$$\delta = \big\{a \mid \mathrm{d}(a) = 2 \wedge a \in U \wedge \mathrm{op}\big(a, O(a)\big) = -1 \wedge \\ \wedge \big(H\big(O(a)\big) = S\big(H(\overset{0}{g})\big) \vee H\big(O(a)\big) \notin U\big)\big\}.$$

Лемма 2.13. *Пусть множество δ пусто. Тогда исходная секвенция $\Phi \to p_i$ имеет вид $!\Theta\, !^n p_i\, !\Xi \to p_i$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{label}\big(H(\overset{0}{g})\big) = p_i$. Согласно условиям PN4 и PN5 имеем, что $\mathrm{label}\big(S\big(H(\overset{0}{g})\big)\big) = p_i$ и $\mathrm{d}\big(S\big(H(\overset{0}{g})\big)\big) = 1$. Обозначим через D тип из антецедента, содержащий вершину $S\big(H(\overset{0}{g})\big)$. Рассмотрим случай, когда D содержит деление и, следовательно, имеет вид $!^n(A\backslash B)$. Обозначим через a корень поддерева, соответствующего типу A. Тогда $O(a)$ является корнем поддерева, соответствующего типу $A\backslash B$. Очевидно, $\mathrm{d}\big(O(a)\big) = 1$ и $\mathrm{op}\big(a, O(a)\big) = -1$, откуда получаем $\mathrm{d}(a) = 2$. Так как $\mathrm{d}\big(H\big(O(a)\big)\big) = \mathrm{d}\big(O(a)\big) = 1$ и в поддереве, соответствующем типу $A\backslash B$, только один лист с единицей в качестве значения функции d, то $H\big(O(a)\big) = S\big(H(\overset{0}{g})\big)$. Поэтому $a \in \delta$, что противоречит условиям леммы.

Осталось рассмотреть случай, когда D не содержит деления и, следовательно, имеет вид $!^n p_i$. Единственным листом в D является $S\big(H(\overset{0}{g})\big)$. Если $U \cap W = \big\{H(\overset{0}{g}), S\big(H(\overset{0}{g})\big)\big\}$, то согласно лемме 2.5 все типы антецедента, кроме D, начинаются с !, и следовательно, лемма доказана. Иначе обозначим $b = \min\big((U \cap W) \diagdown \big\{H(\overset{0}{g}), S\big(H(\overset{0}{g})\big)\big\}\big)$. Обозначим через c элемент, удовлетворяющий условиям $b\ O^*\ c$ и $H\big(O(c)\big) = H(\overset{0}{g})$. Ввиду PN9 из $b \in U$ получаем $c \in U$.

Рассмотрим сначала случай, когда $H(c) \in U$. Очевидно, $\mathrm{d}\big(H(c)\big) = \mathrm{d}(c) = 1$. Согласно PN8 определено значение $S\big(H(c)\big)$. Если $S\big(H(c)\big) < H(c)$, то невозможно $S\big(H(c)\big)\ O^*\ c$, поэтому $S\big(H(c)\big)$ принадлежит поддереву какого-то другого типа и этот тип не может быть D, а это противоречит выбору c. Пусть $H(c) < S\big(H(c)\big)$. Тогда $\mathrm{d}\big(S\big(H(c)\big)\big) = 0$. Согласно лемме 2.3 имеем $S\big(H(c)\big) = H\big(S\big(H(c)\big)\big) = H(\overset{0}{g})$. В силу симметричности S имеем $H(c) = S\big(H(\overset{0}{g})\big)$. Тогда $H(c)$ принадлежат поддереву, соответствующему типу D, что противоречит выбору c.

Теперь рассмотрим случай, когда $H(c) \notin U$. Тогда тип антецедента, соответствующий вершине c, имеет вид $A \backslash B$. Обозначим корень поддерева, соответствующего типу A, через a. Из $\mathrm{d}(c) = 1$ получаем $\mathrm{d}(a) = 2$. Согласно PN10 имеем $a \in U$. Из $H\big(O(a)\big) = H(c) \notin U$ и $\mathrm{op}\big(a, O(a)\big) = -1$ получаем $a \in \delta$, что противоречит условию леммы. $\square$

Осталось рассмотреть случай, когда $\delta \neq \varnothing$. Обозначим

$$\overset{2}{e} = \max\big\{a \mid O(a) = \min\{O(b) \mid b \in \delta\}\big\}.$$

В следующих леммах предполагается, что $\delta \neq \varnothing$.

Лемма 2.14. $\mathrm{d}(\overset{2}{e}) = 2$.

Доказательство. Утверждение следует из определения δ. $\square$

Обозначим

$$\alpha = \{a \mid a\ O^*\ \overset{2}{e}\}, \quad \varphi = \{b \in \mathrm{pr}_1(S) \mid H(\overset{2}{e}) < b \wedge (S(b) = H(\overset{0}{g}) \vee S(b) < \alpha)\}.$$

Лемма 2.15. *Пусть* $S\big(H(\overset{0}{g})\big) < \overset{2}{e}$ *и* $a \in \alpha$. *Тогда* $S\big(H(\overset{0}{g})\big) < a$.

Доказательство. Допустим, от противного, что $a \leqslant S\big(H(\overset{0}{g})\big)$. Условие $a \in \alpha$ означает, что $a\ O^*\ \overset{2}{e}$. Так как $a \leqslant S\big(H(\overset{0}{g})\big) \leqslant \overset{2}{e}$, из D1 получаем $S\big(H(\overset{0}{g})\big)\ O^*\ \overset{2}{e}$. Это противоречит неравенству $\mathrm{d}\big(S\big(H(\overset{0}{g})\big)\big) = 1 < 2 = \mathrm{d}(\overset{2}{e})$. $\square$

Лемма 2.16. *Множество* φ *непусто.*

Доказательство. Если $\overset{2}{e} < S\big(H(\overset{0}{g})\big)$, то $S\big(H(\overset{0}{g})\big) \in \varphi$.

Случай $\overset{2}{e} = S\big(H(\overset{0}{g})\big)$ невозможен, так как $\mathrm{d}(\overset{2}{e}) = 2 \neq 1 = \mathrm{d}\big(S\big(H(\overset{0}{g})\big)\big)$.

Пусть теперь $S\big(H(\overset{0}{g})\big) < \overset{2}{e}$. Докажем, что $H(\overset{0}{g}) \in \varphi$. Утверждение $H(\overset{0}{g}) \in \in \mathrm{pr}_1(S)$ доказано в лемме 2.10. Из лемм 2.14 и 2.9 получаем, что $\overset{2}{e} < H(\overset{0}{g})$. Согласно лемме 2.15 имеем, что $S\big(H(\overset{0}{g})\big) < \alpha$. $\square$

Обозначим

$$f = \min \varphi, \quad \pi = (H(\overset{2}{e}); f).$$

Лемма 2.17. $\mathrm{d}(f) \leqslant 1$.

Доказательство. По построению множества φ из $f \in \varphi$ следует $S(f) = H(\overset{0}{g})$ или $S(f) < \alpha$. В первом случае $\mathrm{d}(f) = 1$ в силу леммы 2.11.

Осталось рассмотреть случай $S(f) < \alpha$. Тогда из $S(f) < H(\overset{2}{e})$ и $H(\overset{2}{e}) < f$ получаем $S(f) < f$.

Допустим, от противного, что $\mathrm{d}(f) \geqslant 2$. Согласно PN5 имеем, что $\mathrm{d}\big(S(f)\big) \geqslant 3$. Обозначим через $\overset{2}{c}$ элемент, удовлетворяющий условиям $S(f)\ O^+\ \overset{2}{c}$, $\mathrm{d}(\overset{2}{c}) = 2$ и $\mathrm{d}\big(O(\overset{2}{c})\big) = 1$. Из того, что $S(f) < H(\overset{2}{e})$, $S(f)\ O^+\ \overset{2}{c}$ и $\mathrm{d}(\overset{2}{c}) = \mathrm{d}\big(H(\overset{2}{e})\big)$ получаем, что $\overset{2}{c} \leqslant \overset{2}{e}$. Из того, что $S(f) \notin \alpha$, получаем, что $\overset{2}{c} \neq \overset{2}{e}$. Следовательно, $\overset{2}{c} < \overset{2}{e}$, и даже $H(\overset{2}{c}) < \alpha$.

Согласно лемме 2.2 имеем $S(f) < \overset{2}{c}$. Согласно лемме 2.12 имеем $H(\overset{2}{c}) < S\big(H(\overset{2}{c})\big)$. Из D1 получаем, что $H(\overset{2}{e}) < S\big(H(\overset{2}{c})\big)$.

Мы доказали, что $S\big(H(\overset{2}{c})\big) \in \varphi$. Следовательно, $f \leqslant S\big(H(\overset{2}{c})\big)$. Имеем

$$S(f) < H(\overset{2}{c}) < f \leqslant S\big(H(\overset{2}{c})\big),$$

что противоречит PN3. □

Лемма 2.18. *Пусть $a \in \alpha \cup \pi$. Тогда $a < f$.*

Доказательство. Случай $a \in \pi$ очевиден. Пусть $a \in \alpha$, т. е. $a\ O^*\ \overset{2}{e}$. По лемме 2.14 согласно D2 получаем, что $a \leqslant H(\overset{2}{e})$. Так как $f \in \varphi$, то $H(\overset{2}{e}) < f$, что влечёт $a < f$. □

Лемма 2.19. *Пусть $a \leqslant b \leqslant c$, $a \in \alpha \cup \pi$ и $c \in \alpha \cup \pi$. Тогда $b \in \alpha \cup \pi$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $b \leqslant H(\overset{2}{e})$. Так как $a \notin \pi$, имеем $a \in \alpha$. По D1 из $a\ O^*\ \overset{2}{e}$ и $H(\overset{2}{e})\ O^*\ \overset{2}{e}$ получаем, что $b\ O^*\ \overset{2}{e}$, т. е. $b \in \alpha$.

Теперь рассмотрим случай $H(\overset{2}{e}) < b$. Согласно лемме 2.18 имеем $c < f$. Получаем, что $H(\overset{2}{e}) < b < f$, т. е. $b \in \pi$. □

Лемма 2.20. *Пусть $(a, b) \in S$ и $a \in \alpha \cup \pi$. Тогда $b \in \alpha \cup \pi$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $a < b$. Если $b < f$, то из того, что $a < b \leqslant \max[H(\overset{2}{e}); f)$, согласно лемме 2.19 получаем, что $b \in \alpha \cup \pi$. Пусть $f \leqslant b$. Согласно PN3 имеем $a \leqslant S(f) < b$. Так как $f \in \varphi$, имеем $S(f) < H(\overset{2}{e})$. Следовательно, $a < H(\overset{2}{e})$, что влечёт $a \notin \pi$ и $a \in \alpha$, т. е. $a\ O^*\ \overset{2}{e}$. По D1 из $a \leqslant S(f) < H(\overset{2}{e})$ получаем, что $S(f)\ O^*\ \overset{2}{e}$, т. е. $S(f) \in \alpha$. С другой стороны, $f \in \varphi$ влечёт $S(f) < \alpha$, противоречие.

Теперь рассмотрим случай $b < a$. Допустим, от противного, что $b \notin \alpha \cup \pi$. Согласно лемме 2.19 имеем, что $b < \alpha$.

Если $H(\overset{2}{e}) < a$, то $a \in \varphi$, что влечёт $f \leqslant a$, а это противоречит лемме 2.18. Осталось рассмотреть случай $a \leqslant H(\overset{2}{e})$. Очевидно, $a \in \alpha$, т. е. $a\ O^*\ \overset{2}{e}$. Согласно лемме 2.14 имеем, что $\mathrm{d}(a) \geqslant 2$. По PN5 получаем, что $\mathrm{d}(b) \geqslant 3$. Обозначим через c элемент, удовлетворяющий условиям $b\ O^+\ c$ и $\mathrm{d}(c) = 2$. Из $b < H(\overset{2}{e})$ по D1 получаем, что $H(c) \leqslant H(\overset{2}{e})$. Из $b \notin \alpha$ следует, что $H(c) \neq H(\overset{2}{e})$. Из $H(c) < H(\overset{2}{e})$ и $\mathrm{d}\big(H(c)\big) = \mathrm{d}(\overset{2}{e})$ получаем, что $H(c) < \alpha$ и, в частности, $H(c) < a$. Из D2 получаем, что $b \leqslant H(c)$. Из того, что $b \leqslant H(c) < a = S(b)$ и $b\ O^+\ c$, по лемме 2.12 получаем, что $H(c) \in \mathrm{pr}_1(S)$ и $H(c) < S(H(c)) < a$. По PN5 имеем $\mathrm{d}\big(S\big(H(c)\big)\big) = 1$. Из леммы 2.15 по PN3 получаем, что $S\big(H(\overset{0}{g})\big) < b$. Следовательно, $S\big(H(\overset{0}{g})\big) < S\big(H(c)\big)$. Из того, что $S\big(H(\overset{0}{g})\big) < S\big(H(c)\big) < H(\overset{2}{e})$, согласно D1 получаем, что $S\big(H(c)\big)\ O^*\ S\big(H(\overset{0}{g})\big)$. Так как $\mathrm{d}\big(S\big(H(c)\big)\big) = \mathrm{d}\big(S\big(H(\overset{0}{g})\big)\big)$, получаем, что $S\big(H(c)\big) = S\big(H(\overset{0}{g})\big)$, противоречие. □

Лемма 2.21. *Пусть $b\ O^+\ a$ и $\mathrm{d}(a)=1$. Тогда условия $a\in\pi$ и $b\in\pi$ равносильны.*

Доказательство. В силу леммы 2.2 имеем, что $a<b$.

Сначала допустим, от противного, что $a\in\pi$, но $b\notin\pi$. Очевидно, $f\leqslant b$. Согласно условию леммы $\mathrm{d}(b)\neq 0$, т. е. $b\neq H(\overset{0}{g})$. Следовательно, $b<H(\overset{0}{g})$. Получаем, что $f\neq H(\overset{0}{g})$, т. е. $\mathrm{d}(f)\neq 0$. Согласно лемме 2.17 имеем $\mathrm{d}(f)=1$. Из $f\leqslant b$, $b\ O^+\ a$ и $\mathrm{d}(f)=\mathrm{d}(a)$ согласно D1 выводим, что $f\leqslant a$, что противоречит условию $a\in\pi$.

Теперь допустим, от противного, что $b\in\pi$, но $a\notin\pi$. Очевидно, $a\leqslant H(\overset{2}{e})<b$. По D1 получаем, что $H(\overset{2}{e})\ O^*\ a$. Из леммы 2.14 и того, что $\mathrm{d}(a)=1$, получаем, что $a=O(\overset{2}{e})=S\big(H(\overset{0}{g})\big)$. Обозначим через c элемент, удовлетворяющий условиям $b\ O^*\ c$ и $O(c)=a$. Очевидно, $c\in\delta$. Следовательно, $c\leqslant H(\overset{2}{e})<b$. Так как $\mathrm{d}(c)=2$, то $c<b$ противоречит D2. $\square$

Лемма 2.22. *Ограничение сети*

$$\langle V,O,\mathrm{label},\mathrm{op},<,U,S\rangle$$

на множество $V\diagdown(\alpha\cup\pi)$ является сетью для некоторой секвенции.

Доказательство. Согласно построению вершина $S\big(H(\overset{0}{g})\big)$ является корнем некоторого поддерева, соответствующего некоторому типу вида $A\backslash B$ из антецедента. При этом множество α соответствует типу A. Согласно лемме 2.21 исходная секвенция имеет вид $\Gamma\,\Pi\,(A\backslash B)\,\Delta\to p_i$, где множество π соответствует последовательности Π. Следовательно, множество $V\diagdown(\alpha\cup\pi)$ соответствует секвенции $\Gamma\,B\,\Delta\to p_i$. Для ограничения сети $\langle V,O,\mathrm{label},\mathrm{op},<,U,S\rangle$ на множество $V\diagdown(\alpha\cup\pi)$ легко проверить условия PN1—PN11. $\square$

Лемма 2.23. *Найдутся такие типы A и B и последовательности Γ и Π, что*

$$\Phi=\Gamma\,\Pi\,(A\backslash B)\,\Delta$$

и существуют сети для секвенций $\Pi\to A$ и $\Gamma\,B\,\Delta\to p_i$.

Доказательство. Определим A и Π как в доказательстве леммы 2.22, где предъявлена сеть для секвенции $\Gamma\,B\,\Delta\to p_i$. Сеть для секвенции $\Pi\to A$ получается из ограничения сети $\langle V,O,\mathrm{label},\mathrm{op},<,U,S\rangle$ на множество $\alpha\cup\pi$ очевидными преобразованиями: перестановкой двух частей (α и π) в смысле отношения $<$ и объявлением вершины $\overset{2}{e}$ корнем всего дерева, что приводит к уменьшению глубины каждой вершины из α на 2.

Формально говоря, пусть секвенции $\Pi\to A$ соответствуют дерево $\langle V',O'\rangle$, разметки label' и op' и линейный порядок $<'$. Число дуг с меткой -1 на пути из вершины a до корня в дереве $\langle V',O'\rangle$ обозначим через $\mathrm{d}'(a)$. Легко доказать, что существует биекция $\mathfrak{h}\colon V'\to\alpha\cup\pi$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned}a\ O'\ b\Leftrightarrow{}&(\mathfrak{h}(a)\ O\ \mathfrak{h}(b)\wedge\mathfrak{h}(a)\in\alpha\wedge\mathfrak{h}(b)\in\alpha)\vee\\&\vee(\mathfrak{h}(a)\ O\ \mathfrak{h}(b)\wedge\mathfrak{h}(a)\in\pi\wedge\mathfrak{h}(b)\in\pi)\vee(\mathfrak{h}(a)\ O\ H(\overset{0}{g})\wedge\mathfrak{h}(b)=\overset{2}{e}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{label}'(a) = \mathrm{label}\big(\mathfrak{h}(a)\big),\\
&\mathrm{op}'(a,b) = \mathrm{label}\big(\mathfrak{h}(a),\mathfrak{h}(b)\big),\\
&a <' b \Leftrightarrow (\mathfrak{h}(a) < \mathfrak{h}(b) \wedge \mathfrak{h}(a) \in \alpha \wedge \mathfrak{h}(b) \in \alpha) \vee\\
&\quad \vee (\mathfrak{h}(a) < \mathfrak{h}(b) \wedge \mathfrak{h}(a) \in \pi \wedge \mathfrak{h}(b) \in \pi) \vee (\mathfrak{h}(a) \in \pi \wedge \mathfrak{h}(b) \in \alpha),\\
&\mathrm{d}'(a) = \begin{cases} \mathrm{d}\big(\mathfrak{h}(a)\big) - 2, & \text{если } \mathfrak{h}(a) \in \alpha,\\ \mathrm{d}\big(\mathfrak{h}(a)\big), & \text{если } \mathfrak{h}(a) \in \pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

Искомая сеть для секвенции $\Pi \to A$ задаётся множеством

$$U' = \{a \mid \mathfrak{h}(a) \in U\}$$

и бинарным отношением

$$S' = \big\{(a,b) \mid \big(\mathfrak{h}(a),\mathfrak{h}(b)\big) \in S\big\}.$$

Осталось проверить условия PN1—PN11 для S'.

Докажем PN9 для U'. Пусть $a \in U'$. Если $\mathfrak{h}(a) \in \alpha$ и $\mathfrak{h}\big(O'(a)\big) \in \alpha$, то $O'(a) \in U'$ следует из условия PN9 для S. Аналогично если $\mathfrak{h}(a) \in \pi$ и $\mathfrak{h}\big(O'(a)\big) \in \pi$, то $O'(a) \in U'$ следует из условия PN9 для S. Если же $\mathfrak{h}(a) \in \pi$ и $\mathfrak{h}\big(O'(a)\big) \in \alpha$, то $\mathfrak{h}\big(O'(a)\big) = \overset{2}{e} \in \mathrm{pr}_1(S)$, что влечёт $O'(a) \in U'$.

Условие PN7, т. е. $S' \neq \varnothing$, следует из того, что $\overset{2}{e} \in \alpha$ и $\overset{2}{e} \in \mathrm{pr}_1(S)$.

Остальные условия из определения сети проверяются легко. □

Для завершения доказательства теоремы 2.8 достаточно заметить, что шаг индукции следует из лемм 2.13 и 2.23. В первом случае исходная секвенция $\Phi \to D$ выводится из аксиомы многократным применением правил $(! \to)$ и $(\mathrm{W}! \to)$, во втором случае секвенция $\Phi \to D$ получается по правилу $(\backslash \to)$ из двух более коротких секвенций, к которым применимо предположение индукции. Теорема 2.8 доказана.

Литература

[1] Ламбек И. Математическое исследование структуры предложения // Математическая лингвистика: Сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47—68.

[2] Пентус А. Е., Пентус М. Р. Атомарная теория левого деления двусторонних идеалов полуколец с единицей // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 5. — С. 129—146.

[3] Саватеев Ю. В. Распознавание выводимости для исчисления Ламбека с одним делением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2009. — № 2. — С. 59—62.

[4] Саватеев Ю. В. Применение сетей доказательств для исследования фрагментов исчисления Ламбека // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 189—222.