Свойства обобщённо нильпотентных элементов псевдонормированных коммутативных колец

С. А. АЛЕЩЕНКО
Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
e-mail: alesch.svet@gmail.com

В. И. АРНАУТОВ
Институт математики и информатики Академии наук Молдовы
e-mail: arnautov@mat.md

С. Т. ГЛАВАЦКИЙ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: glavatsky_st@mail.ru

УДК 512.711

Ключевые слова: псевдонормированное кольцо, фактор-кольцо псевдонормированного кольца по замкнутому идеалу, обобщённо нильпотентный элемент псевдонормированного коммутативного кольца, полуизометрический изоморфизм псевдонормированных колец.

Аннотация

Множество I всех обобщённо нильпотентных элементов псевдонормированного коммутативного кольца (R, ξ) является замкнутым идеалом, и фактор-кольцо $(R, \xi)/I$ не содержит ненулевых обобщённо нильпотентных элементов.

Abstract

S. A. Aleschenko, V. I. Arnautov, S. T. Glavatsky, Properties of generalized nilpotent elements of pseudo-normed commutative rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 3—11.

The set I of all generalized nilpotent elements of a pseudo-normed commutative ring (R, ξ) is a closed ideal, and the factor ring $(R, \xi)/I$ does not contain nonzero generalized nilpotent elements.

Введение

Настоящая статья посвящена изучению свойств обобщённо нильпотентных элементов псевдонормированного коммутативного кольца (в [1] для коммутативных псевдонормированных алгебр над полем комплексных чисел такие элементы назывались обобщённо нульстепенными элементами).

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 3, с. 3—11.

Основной результат статьи — теорема 2, в которой доказывается, что множество I всех обобщённо нильпотентных элементов псевдонормированного коммутативного кольца (R,ξ) является замкнутым идеалом и фактор-кольцо $(R,\xi)/I$ не содержит ненулевых обобщённо нильпотентных элементов.

1. Основные определения и предварительные сведения

Определение 1. Как обычно, действительнозначная функция ξ на кольце R называется *псевдонормой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$\xi(r) \geqslant 0$ для $r \in R$, и $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;
$\xi(r) = \xi(-r)$ и $\xi(a+b) \leqslant \xi(a) + \xi(b)$ для любых $r, a, b \in R$;
$\xi(a \cdot b) \leqslant \xi(a) \cdot \xi(b)$ для любых $a, b \in R$.

Определение 2. Если на кольце R задана некоторая псевдонорма ξ, то такое кольцо называется *псевдонормированным кольцом*, и мы будем обозначать его через (R,ξ).

Определение 3. Пусть в псевдонормированном кольце (R,ξ) задан замкнутый идеал I (в топологии, которая определяется псевдонормой ξ). Пусть $\bar{R} = R/I$ — фактор-кольцо кольца R и $f\colon R \to \bar{R}$ — канонический кольцевой гомоморфизм. Тогда действительнозначная функция $\bar{\xi}$, для которой $\bar{\xi}(\bar{r}) = \inf\{\xi(r+a) \mid a \in I\}$ для любого элемента $\bar{r} = f(r) \in \bar{R}$, является псевдонормой на кольце $\bar{R}$.

Псевдонормированное кольцо $(\bar{R},\bar{\xi})$ будем называть *фактор-кольцом псевдонормированного кольца* (R,ξ) *по идеалу* I и обозначать его через $(R,\xi)/I$; гомоморфизм $f\colon (R,\xi) \to (\bar{R},\bar{\xi})$ будем называть *изометрическим гомоморфизмом*.

Замечание 1. Легко проверить, что если на кольце R заданы псевдонормы ξ_1 и ξ_2 и $\xi(r) = \xi_1(r) + \xi_2(r)$ для любого элемента $r \in R$, то ξ тоже является псевдонормой на кольце R.

Определение 4 (см. [2])**.** Пусть (R,ξ) и $(\bar{R},\bar{\xi})$ — псевдонормированные кольца. Тогда кольцевой изоморфизм $f\colon (R,\xi) \to (\bar{R},\bar{\xi})$ называется *полуизометрическим изоморфизмом*, если существует такое псевдонормированное кольцо $(\tilde{R},\tilde{\xi})$, что R является идеалом в кольце $\tilde{R}$, $\xi(r) = \tilde{\xi}(r)$ для любого элемента $r \in R$ и f продолжается до изометрического гомоморфизма $\tilde{f}\colon (\tilde{R},\tilde{\xi}) \to (\bar{R},\bar{\xi})$.

Теорема 1 (см. [2])**.** *Пусть (R,ξ) и $(\bar{R},\bar{\xi})$ — псевдонормированные кольца. Изоморфизм $f\colon R \to \bar{R}$ является* полуизометрическим изоморфизмом *тогда и только тогда, когда $\bar{\xi}\big(f(r)\big) \leqslant \xi(r)$ для любого элемента $r \in R$, $\xi(a \cdot b) \leqslant \bar{\xi}\big(f(a)\big) \cdot \xi(b)$ и $\xi(a \cdot b) \leqslant \xi(a) \cdot \bar{\xi}\big(f(b)\big)$ для любых элементов $a, b \in R$.*

Определение 5. Как обычно, элемент a кольца R называется *нильпотентным*, если $a^n = 0$ для некоторого натурального числа n.

Определение 6. Элемент a псевдонормированного кольца (R, ξ) называется *топологически нильпотентным*, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число n, что $\xi(a^i) < \varepsilon$ для любого натурального числа $i \geqslant n$.

Определение 7 (см. [1]). Элемент a псевдонормированного кольца (R, ξ) будем называть *обобщённо нильпотентным*, если

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\xi(a^k)} = 0,$$

т. е. если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число n, что $\sqrt[i]{\xi(a^i)} < \varepsilon$ для любого натурального числа $i \geqslant n$ (это эквивалентно тому, что $\xi(a^i) < \varepsilon^i$ для любого натурального числа $i \geqslant n$).

Замечание 2. Очевидно, что всякий нильпотентный элемент псевдонормированного кольца является обобщённо нильпотентным, а всякий обобщённо нильпотентный элемент псевдонормированного кольца является топологически нильпотентным.

Замечание 3. Из определения 6 легко вытекают следующие утверждения.

1. Пусть на коммутативном кольце R заданы псевдонормы ξ_1 и ξ_2, такие что $\xi_1(r) \leqslant \xi_2(r)$ для любого элемента $r \in R$. Тогда всякий обобщённо нильпотентный элемент псевдонормированного кольца (R, ξ_2) будет обобщённо нильпотентным элементом в псевдонормированном кольце (R, ξ_1).
2. Пусть I — замкнутый идеал псевдонормированного кольца (R, ξ) и элемент $a \in R$ является обобщённо нильпотентным в псевдонормированном кольце (R, ξ). Тогда элемент $\bar{a} = a + I \in R/I$ является обобщённо нильпотентным элементом в псевдонормированном кольце $(\bar{R}, \bar{\xi}) = (R, \xi)/I$.

2. Основные результаты

Предложение 1. *Пусть на коммутативном кольце R заданы псевдонормы ξ_1 и ξ_2. Если элемент $a \in R$ является обобщённо нильпотентным в каждом из псевдонормированных колец (R, ξ_1) и (R, ξ_2) и $\xi(r) = \xi_1(r) + \xi_2(r)$ для любого элемента $r \in R$, то элемент a будет обобщённо нильпотентным в псевдонормированном кольце (R, ξ).*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Существуют такие натуральные числа n_1 и n_2, что $\sqrt[i]{\xi_1(a^i)} \leqslant \varepsilon/2$ для любого $i \geqslant n_1$ и $\sqrt[i]{\xi_2(a^i)} \leqslant \varepsilon/2$ для любого $i \geqslant n_2$. Отсюда следует, что

$$\sqrt[j]{\xi(a^j)} = \sqrt[j]{\xi_1(a^j) + \xi_2(a^j)} \leqslant \sqrt[j]{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^j + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^j} \leqslant \sqrt[j]{\varepsilon^j} = \varepsilon$$

для любого $j \geqslant \max\{n_1, n_2\}$.

Из произвольности выбора числа ε следует, что элемент a является обобщённо нильпотентным элементом в псевдонормированном кольце (R, ξ). Этим предложение полностью доказано. $\square$

Следствие 1. *Пусть в псевдонормированном коммутативном кольце (R,ξ) элемент $a \in R$ является обобщённо нильпотентным и k — натуральное число. Тогда действительнозначная функция η на R, где $\eta(r) = k \cdot \xi(r)$ для любого $r \in R$, является псевдонормой на кольце R, а элемент a является обобщённо нильпотентным в псевдонормированном кольце (R,η).*

Замечание 4. Так как псевдонормы ξ и $k \cdot \xi$, указанные в следствии 1, задают на кольце R одну и ту же кольцевую топологию, то возникает естественный вопрос: совпадают ли множества всех обобщённо нильпотентных элементов коммутативного кольца для любых псевдонорм, которые задают на кольце одну и ту же кольцевую топологию?

Следующий пример даёт отрицательный ответ на этот вопрос.

Пример. Определим на кольце R многочленов от переменной x над двухэлементным полем $\mathbb{Z}_2$ действительнозначные функции ξ и η следующим образом: для элемента $f(x) \in R$,

$$f(x) = x^n + \sum_{i=n+1}^{k} r_i \cdot x^i \in R,$$

положим $\eta\big(f(x)\big) = 2^{-n}$ и $\xi\big(f(x)\big) = 2^{-n^2}$.

Легко проверить, что ξ и η являются псевдонормами на кольце R.

Так как

$$\big\{f(x) \in R \mid \eta\big(f(x)\big) < 2^{-m^2}\big\} = \big\{f(x) \in R \mid \xi\big(f(x)\big) < 2^{-m}\big\}$$

для любого натурального числа m, то совокупность

$$\Big\{\big\{f(x) \in R \mid \xi\big(f(x)\big) < 2^{-m}\big\} \bigm| m = 1, 2, \ldots, \infty\Big\}$$

является базисом фильтра окрестностей в каждой из кольцевых топологий, которые задаются псевдонормами ξ и η, и значит, кольцевые топологии, которые задаются псевдонормами ξ и η, совпадают.

Так как $\sqrt[i]{\eta(x^i)} = \sqrt[i]{2^{-i}} = 2^{-1}$ и $\sqrt[i]{\xi(x^i)} = \sqrt[i]{2^{-i^2}} = 2^{-i}$ для любого натурального числа i, то элемент $x \in R$ является обобщённо нильпотентным элементом в псевдонормированном кольце (R,ξ), но не является обобщённо нильпотентным элементом в псевдонормированном кольце (R,η).

Предложение 2. *Пусть (R,ξ) и $(\bar{R},\bar{\xi})$ — такие псевдонормированные коммутативные кольца, что существует полуизометрический изоморфизм $f\colon (R,\xi) \to (\bar{R},\bar{\xi})$. Тогда для любого обобщённо нильпотентного элемента $\bar{r}$ псевдонормированного кольца $(\bar{R},\bar{\xi})$ элемент $r = f^{-1}(\bar{r})$ является обобщённо нильпотентным элементом в псевдонормированном кольце (R,ξ).*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что

$$\xi(r \cdot r^n) \leqslant \xi(r) \cdot \bar{\xi}\big(f(r^n)\big) = \xi(r) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}^n)$$

для любого натурального числа n.

Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда существует такое положительное число $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$, что $\xi(r) \cdot \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon^2$, и существует такое натуральное число k, что $\sqrt[j]{\bar{\xi}(\bar{r}^j)} < \varepsilon_1$ для любого натурального числа $j \geqslant k$. Отсюда следует, что

$$\sqrt[i]{\xi(r^i)} \leqslant \sqrt[i]{\xi(r) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}^{i-1})} < \sqrt[i]{\xi(r) \cdot \varepsilon_1^{i-1}} \leqslant \leqslant \sqrt[i]{\xi(r) \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1^{i-2}} \leqslant \sqrt[i]{\varepsilon^2 \cdot \varepsilon^{i-2}} = \sqrt[i]{\varepsilon^i} = \varepsilon$$

для любого натурального числа $i \geqslant k+1$.

Из произвольности выбора числа ε следует, что элемент r является обобщённо нильпотентным в псевдонормированном кольце (R, ξ). Этим предложение полностью доказано. □

Лемма 1. *Пусть в псевдонормированном коммутативном кольце (R, ξ) элементы a и b являются обобщённо нильпотентными. Тогда элемент $a + b$ тоже является обобщённо нильпотентным элементом.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon < 1$ — произвольное положительное число. Существуют такие натуральные числа k_0, k_1, n_0, n_1, что $n_1 \geqslant k_0$, $k_1 \geqslant n_0$ и верны следующие три неравенства:

1) $\sqrt[i]{\xi(a^i)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\sqrt[j]{\xi(b^j)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любых $i > n_0$ и $j > k_0$;

2) $\sqrt[t]{\xi(b^t)} < \dfrac{\varepsilon^2}{4 \cdot (\xi(a^i) + 1)}$ для любых $i \leqslant n_0$ и $t \geqslant k_1$;

3) $\sqrt[t]{\xi(a^t)} < \dfrac{\varepsilon^2}{4 \cdot (\xi(b^j) + 1)}$ для любых $j \leqslant k_0$ и $t \geqslant n_1$.

Тогда верны следующие неравенства:

4) если $i > n_0$ и $j > k_0$, то

$$\xi(a^i \cdot b^j) \leqslant \xi(a^i) \cdot \xi(b^j) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^j = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i+j};$$

5) если $i \leqslant n_0$ и $j \geqslant k_1$, то $j \geqslant k_1 \geqslant n_0 \geqslant i$, и значит,

$$\xi(a^i \cdot b^j) \leqslant \xi(a^i) \cdot \xi(b^j) \leqslant \xi(a^i) \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4 \cdot (\xi(a^i) + 1)}\right)^j = \frac{\xi(a^i)}{(\xi(a^i) + 1)^j} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^j \leqslant \leqslant \frac{\xi(a^i)}{(\xi(a^i) + 1)} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^j \leqslant \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^j = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{j+j} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i+j};$$

6) если $i \geqslant n_1$ и $j \leqslant k_0$, то $i \geqslant n_1 \geqslant k_0 \geqslant j$, и значит,

$$\xi(a^i \cdot b^j) \leqslant \xi(a^i) \cdot \xi(b^j) \leqslant \left(\frac{\varepsilon^2}{4 \cdot (\xi(b^i) + 1)}\right)^i \cdot \xi(b^j) = \frac{\xi(b^j)}{(\xi(b^i) + 1)^i} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^i \leqslant \leqslant \frac{\xi(b^j)}{\xi(b^j) + 1} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^i \leqslant \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^i = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i+i} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i+j}.$$

Если теперь $s > n_1 + k_1$, то, так как

$$\xi(a^s) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^s, \quad \xi(b^s) \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^s,$$

учитывая неравенства 4), 5) и 6), получаем, что

$$\sqrt[s]{\xi\big((a+b)^s\big)} = \sqrt[s]{\xi\left(b^s + \sum_{t=1}^{s-1} C_s^t \cdot a^t \cdot b^{s-t} + a^s\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[s]{\xi(b^s) + \sum_{t=1}^{s-1} C_s^t \cdot \xi(a^t \cdot b^{s-t}) + \xi(a^s)} \leqslant \sqrt[s]{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^s \cdot \left(\sum_{t=0}^{s} C_s^t\right)} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sqrt[s]{2^s} = \varepsilon.$$

Из произвольности выбора чисел ε и s следует, что элемент $a + b$ является обобщённо нильпотентным. □

Лемма 2. *Если в псевдонормированном коммутативном кольце (R, ξ) элемент a является обобщённо нильпотентным, то для любого элемента $b \in R$ элемент $a \cdot b$ тоже будет обобщённо нильпотентным.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Если $b = 0$, то $a \cdot b = 0$, и значит, в этом случае $a \cdot b$ является обобщённо нильпотентным элементом.

Если $b \neq 0$, то для числа $\varepsilon/\xi(b)$ существует такое натуральное число n, что $\sqrt[k]{\xi(a^k)} < \varepsilon/\xi(b)$ для любого натурального числа $k \geqslant n$. Тогда

$$\sqrt[k]{\xi\big((a \cdot b)^k\big)} \leqslant \sqrt[k]{\xi(a^k) \cdot \xi(b^k)} \leqslant \sqrt[k]{\xi(a^k)} \cdot \sqrt[k]{\big(\xi(b)\big)^k} < \frac{\varepsilon}{\xi(b)} \cdot \xi(b) = \varepsilon.$$

Из произвольности выбора чисел ε и k следует, что элемент $a \cdot b$ является обобщённо нильпотентным. □

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{I}$ — множество всех обобщённо нильпотентных элементов псевдонормированного коммутативного кольца (R, ξ). Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Множество $\boldsymbol{I}$ является замкнутым идеалом в псевдонормированном кольце (R, ξ).*
2. *Псевдонормированное кольцо $(R/\boldsymbol{I}, \bar{\xi}) = (R, \xi)/\boldsymbol{I}$ не содержит ненулевых обобщённо нильпотентных элементов.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как $\xi(-r) = \xi(r)$ для любого элемента $r \in R$, то из лемм 1 и 2 следует, что $\boldsymbol{I}$ является идеалом в кольце R.

Покажем теперь, что $\boldsymbol{I}$ является замкнутым идеалом в псевдонормированном кольце (R, ξ).

Пусть $a \in [\boldsymbol{I}]_{(R,\xi)}$, и пусть $\varepsilon < 1$ — положительное число. Тогда существует такой элемент $b \in \boldsymbol{I}$, что

$$\xi(ab) < \left(\frac{\varepsilon^2}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Из того, что $b \in \boldsymbol{I}$, следует, что существует такое натуральное число k, что $\sqrt[j]{\xi(b^j)} < \varepsilon/4$ для любого натурального числа $j > k$, и значит, $\xi(b^j) < (\varepsilon/4)^j$.

Если теперь n — такое натуральное число, что $\xi(b^i) < 2^n$ для любого $i \leqslant k$, то для любого натурального числа $s > 2n + 2k$ верны следующие неравенства:

1) если $i < s - k$, то $s - i > k$, и тогда

$$\xi\big((a-b)^i \cdot b^{s-i}\big) \leqslant \xi\big((a-b)^i\big) \cdot \xi(b^{s-i}) <$$
$$< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{s-i} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s-i} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s-i} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s};$$

2) если $i \geqslant s - k$, то $i > n$ и $s - i \leqslant k$. Поскольку $i \geqslant s - k > 2n + k > k$, то $2i = i + i > s - k + k = s$, и тогда

$$\xi\big((a-b)^i \cdot b^{s-i}\big) \leqslant \xi\big((a-b)^i\big) \cdot \xi(b^{s-i}) \leqslant \left(\frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)^{i} \cdot \xi(b^{s-i}) =$$
$$= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \cdot \xi(b^{s-i}) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \cdot 2^n \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2i} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s-i} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s}.$$

Отсюда с учётом доказанных неравенств 1) и 2) и неравенств

$$\xi\big((a-b)^s\big) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s}, \quad \xi(b^s) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s}$$

получаем

$$\sqrt[s]{\xi(a^s)} = \sqrt[s]{\xi\big((a-b+b)^s\big)} = \sqrt[s]{\xi\Big((a-b)^s + \sum_{t=1}^{s-1} C_s^t \cdot (a-b)^t \cdot b^{s-t} + b^s\Big)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[s]{\xi\big((a-b)^s\big) + \sum_{t=1}^{s-1} C_s^t \cdot \xi\big((a-b)^t \cdot b^{s-t}\big) + \xi(b^s)} <$$
$$< \sqrt[s]{\sum_{t=0}^{s} C_s^t \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s}} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt[s]{\sum_{t=0}^{s} C_s^t}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\sqrt[s]{2^s}\,) = \varepsilon.$$

Из произвольности выбора чисел ε и s следует, что элемент a является обобщённо нильпотентным, и значит, $a \in \boldsymbol{I}$. Из произвольности выбора элемента a следует замкнутость идеала $\boldsymbol{I}$.

Этим утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Допустим противное, т. е. что псевдонормированное кольцо $(R, \xi)/\boldsymbol{I}$ содержит ненулевой элемент $\bar{r}$, который является обобщённо нильпотентным элементом, и пусть r — такой элемент кольца R, что $\bar{r} = r + \boldsymbol{I}$. Тогда $r \notin \boldsymbol{I}$.

Пусть $\varepsilon_0 < 1$ — положительное число. Тогда существует такое натуральное число m, что
$$\sqrt[m]{\bar{\xi}(\bar{r}^m)} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^2.$$
Отсюда следует, что
$$\bar{\xi}(\bar{r}^m) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2m} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2m}.$$
Так как $\bar{\xi}(\bar{r}^m) = \inf\{\xi(r^m + a) \mid a \in \boldsymbol{I}\}$, то существует такой элемент $b \in I$, что
$$\xi(r^m - b) \leqslant \bar{\xi}(\bar{r}^m) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0^2}{16}\right)^m \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2m} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2m} = \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2m}.$$

Так как $b \in \boldsymbol{I}$, то существует такое натуральное число k, что $\sqrt[j]{\xi(b^j)} < (\varepsilon_0/4)^{2m}$ для любого натурального числа $j > k$. Тогда $\xi(b^j) < (\varepsilon_0/4)^{2mj}$.

Существует такое натуральное число n, что $\xi(r^i) \leqslant 2^n$ для любых $1 \leqslant i \leqslant m$, $\xi(b^j) \leqslant 2^n$ для любых $1 \leqslant j \leqslant k$ и $\xi(r^i) \cdot \xi(b^j) \leqslant 2^n$ для любых $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant k$.

Пусть теперь $k_1 = (2k + n + m) \cdot m$ и $s > k_1 \geqslant n$. Тогда $s = t \cdot m + l$ для некоторых натуральных чисел $1 \leqslant l \leqslant m$ и $t \geqslant 2k + n + m$.

Получаем следующие неравенства:

1) если $(t - i) \geqslant k$, то
$$\begin{aligned}
\xi(r^l) \cdot \xi\big((r^m - b)^i \cdot b^{t-i}\big) &< \xi(r^l) \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2mi} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2m(t-i)} = \\
&= \xi(r^l) \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2mt} < \xi(r^l) \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{mt+m} \leqslant \xi(r^l) \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{mt+l} = \\
&= \xi(r^l) \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{s} = \xi(r^l) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{s} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{s} \leqslant \xi(r^l) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{s} \leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{s};
\end{aligned}$$

2) если $t - i < k$, то $i > t - k \geqslant k + n + m$ и, поскольку $\varepsilon_0 < 1$,
$$\begin{aligned}
\xi(r^l) \cdot \xi\big((r^m - b)^i \cdot b^{t-i}\big) &\leqslant \xi(r^l) \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2m}\right)^i \cdot \xi(b^{t-i}) = \\
&= \xi(r^l) \cdot \xi(b^{t-i}) \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2mi} \leqslant 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2mi} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{2mi} \leqslant \\
&\leqslant 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{2mi} \leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{2mi} = \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{mi+mi} \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{m(i+k+m)} \leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{m(t-k+k+m)} \leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{mt+m} \leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{mt+l} = \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{s}.
\end{aligned}$$

Так как
$$\xi(b^t) < \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2mt} \leqslant (\frac{\varepsilon_0}{2})^s \quad \text{и} \quad \xi\big((r^m - b)^t \leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{2mt} \leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{s},$$

то, учитывая неравенства 1) и 2), получаем

$$\begin{aligned}
\xi(r^s) &= \xi(r^l \cdot r^{mt}) \leqslant \xi(r^l) \cdot \xi\big((r^m - b + b)^t\big) = \\
&= \xi(r^l) \cdot \xi\left(b^t + \sum_{i=1}^{t-1} C_t^i \cdot (r^m - b)^i \cdot b^{t-i} + (r^m - b)^t\right) \leqslant \\
&\leqslant \xi(r^l) \cdot \left(\xi(b^t) + \sum_{i=1}^{t-1} C_t^i \cdot \xi\big((r^m - b)^i \cdot b^{t-i}\big) + \xi\big((r^m - b)^t\big)\right) = \\
&= \xi(r^l) \cdot \xi(b^t) + \sum_{i=1}^{t-1} C_t^i \cdot \xi(r^l) \cdot \xi\big((r^m - b)^i \cdot b^{t-i}\big) + \xi(r^l) \cdot \xi\big((r^m - b)^t\big) < \\
&< \sum_{i=0}^{t} C_t^i \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^s = \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^s \cdot \sum_{i=0}^{t} C_t^i = \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^s \cdot 2^t \leqslant \varepsilon_0^s,
\end{aligned}$$

и значит, $\sqrt[s]{\xi(r^s)} < \varepsilon_0$.

Из произвольности выбора чисел ε_0 и s следует, что элемент r является обобщённо нильпотентным элементом в псевдонормированном кольце (R, ξ), и значит, $r \in \boldsymbol{I}$.

Получили противоречие с выбором элемента r.

Этим утверждение 2 доказано. Тем самым теорема полностью доказана. $\square$

Литература

[1] Гельфанд М. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. — М.: Физматгиз, 1960.

[2] Aleschenko S. A., Arnautov V. I. Quotient rings of pseudonormed rings // Bull. Acad. Sci. Rep. Moldova. Math. — 2006. — Vol. 44, no. 1. — P. 3—16.