О полукольцах косых многочленов

М. В. БАБЕНКО
Вятский государственный университет
e-mail: marinka_ov@mail.ru

В. В. ЧЕРМНЫХ
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина
e-mail: vv146@mail.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: полукольцо, косые многочлены.

Аннотация

В статье рассматриваются следующие полукольца косых многочленов: инвариантные, без нильпотентных элементов, абелевы, риккартовы без нильпотентных элементов. Найдены свойства и характеризации этих полуколец.

Abstract

M. V. Babenko, V. V. Chermnykh, On the semirings of skew polynomials, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 13—21.

Semirings of skew polynomials such as invariant, without nilpotent elements, Abelian, and Rickart without nilpotent elements are considered in this paper. Properties and characterizations of these semirings are obtained.

В статье рассматриваются полукольца косых многочленов. Основной задачей является нахождение зависимости между свойствами полукольца косых многочленов и полукольца коэффициентов.

Полукольцом называется непустое множество A с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle A, +\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle A, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a = 0 = a0$ для любого $a \in A$.

Все полукольца, рассматриваемые нами, имеют единицу, отличную от нуля.

Пусть A — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца A, $R = A[x, \varphi]$ — множество всех многочленов $\sum\limits_{i=0}^{n} f_i x^i$ от переменной x и с коэффициентами из A. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — правилом $xa = \varphi(a)x$. Непосредственно проверяется, что $A[x, \varphi]$ является полукольцом, оно называется *левым полукольцом косых многочленов*.

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 3, с. 13—21.
© 2020 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Предложение 1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца A. Тогда A — полукольцо без делителей нуля тогда и только тогда, когда $R = A[x, \varphi]$ — полукольцо без делителей нуля.*

Доказательство. Пусть A — полукольцо без делителей нуля, f, g — ненулевые многочлены из R, a, b — старшие коэффициенты многочленов f и g соответственно. Тогда старший коэффициент многочлена fg равен $a\varphi^m(b)$, где $m = \deg(f)$ — степень многочлена f. Поскольку из $b \neq 0$ следует $\varphi(b) \neq 0$ в силу инъективности φ, а по индукции $\varphi^m(b) \neq 0$, то старший коэффициент многочлена fg отличен от нуля. Получили, что R — полукольцо без делителей нуля. Обратная импликация справедлива, поскольку A является подполукольцом полукольца без делителей нуля R. □

Полукольцо называется *инвариантным справа*, если каждый его правый идеал является идеалом.

Предложение 2. *Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца A, то равносильны следующие условия*:

1) $A[x, \varphi]$ — *инвариантное справа полукольцо*;
2) $A[x, \varphi]$ — *коммутативное полукольцо*;
3) A — *коммутативное полукольцо и $\varphi \equiv 1_A$ — тождественный автоморфизм.*

Доказательство. Если выполнено 3), то $A[x, \varphi] = A[x]$ — коммутативное полукольцо, поэтому справедлива импликация 3) $\Longrightarrow$ 2). Также очевидна импликация 2) $\Longrightarrow$ 1).

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $a, b \in A\backslash\{0\}$. Обозначим $R = A[x, \varphi]$. Правый идеал $(1 + x)R$ является идеалом, поэтому $b(1 + x) = (1 + x)f$ для некоторого многочлена f степени n со старшим коэффициентом f_n и свободным членом f_0. Тогда $b + bx = \varphi(f_n)x^{n+1} + g$ для некоторого $g \in R$, $\deg(g) \leqslant n$. Отсюда следует, что $n = 0$, $b = \varphi(f_n)$ и $f_n = f_0 = f \in A$. Получаем равенство $b + bx = f_0 + \varphi(f_0)x$, откуда следует, что $\varphi(f_0) = b = f_0$, что влечёт $\varphi(b) = b$ для любого $b \in A$. Следовательно, $\varphi \equiv 1_A$. Аналогично для идеала $(a+x)R$ найдётся многочлен f, $\deg(f) = n$, со старшим коэффициентом f_n, такой что $b(a + x) = (a + x)f = \varphi(f_n)x^{n+1} + g$, $\deg(g) \leqslant n$. Тогда $n = 0$, $f = c \in A$, откуда следует, что $ba + bx = ac + \varphi(c)x = ac + cx$. Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем $b = c$, откуда следует, что $ba = ab$, т. е. A коммутативно. □

Идемпотентом полукольца A называется элемент $e \in A$, такой что $e = e^2$. Элемент $a \in A$ называется *центральным*, если $as = sa$ для любого $s \in A$. Элемент $e \in A$ называется *дополняемым*, если существует такой $e^\perp \in A$, что $e + e^\perp = 1$, $ee^\perp = e^\perp e = 0$. Легко проверить, что если e — дополняемый элемент, то он является идемпотентом и его дополнение $e^\perp$ определяется однозначно и также является дополняемым идемпотентом. Множество всех центральных дополняемых идемпотентов из A обозначим через BA.

Полукольцо A называется *полукольцом без нильпотентных элементов*, если для любых $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ условие $a^n = 0$ влечёт $a = 0$. Заметим, что A —

полукольцо без нильпотентных элементов в точности тогда, когда в A нет таких ненулевых элементов a, что $a^2 = 0$.

Через $\mathrm{ann_r}(B) = \{a \in A\colon Ba = 0\}$ обозначим *правый аннулятор подмножества* $B \subseteq A$; в случае $B = \{b\}$ правый аннулятор элемента b обозначаем через $\mathrm{ann_r}(b)$. Симметричным образом определяется левый аннулятор $\mathrm{ann_l}(B)$.

Лемма 1. *Пусть A — полукольцо без нильпотентных элементов.*

1. *Если $a, b \in A$, то*
$$ab = 0 \Longleftrightarrow ba = 0 \Longleftrightarrow aAb = bAa = 0.$$
2. *Если $a, b, c \in A$, то*
$$abc = 0 \Longleftrightarrow acb = 0.$$
3. *Если $a_1, \ldots, a_k \in A$ и $a_1 \ldots a_k = 0$, то $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(k)} = 0$ для любой перестановки σ.*
4. $\mathrm{ann_r}(a) = \mathrm{ann_r}(a^n)$ *для любых $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.*
5. *Для любого подмножества $B \subseteq A$ $\mathrm{ann_r}(B)$ — идеал и*
$$\mathrm{ann_r}(B) = \mathrm{ann_r}(ABA) = \{a \in A\colon ABA \cap AaA = 0\};$$
аналогичные равенства верны для левых аннуляторов.
6. *Каждый дополняемый идемпотент из A централен.*

Доказательство. 1. Пусть $ab = 0$. Тогда $0 = b(ab)a = (ba)^2$, откуда следует, что $ba = 0$. Из $ba = 0$ получаем, что $bas = 0$ для любого $s \in A$, следовательно, $asb = 0$ и $aAb = 0$.

2. Если $abc = 0$, то, используя пункт 1, получаем, что $0 = acbc = acbac = (acb)^2$. Так как ненулевых нильпотентных элементов нет, $acb = 0$.

3. Утверждение 3 следует из утверждений 1 и 2.

4. Очевидно включение $\mathrm{ann_r}(a) \subseteq \mathrm{ann_r}(a^n)$. Пусть $a^n s = 0$. Из $a^n s^n = 0$ получаем $(as)^n = 0$, поэтому $as = 0$.

5. Обозначим $D = \{a \in A\colon ABA \cap AaA = 0\}$. Для любого $a \in D$ и любого $b \in B$ выполняется $ba \in ABA \cap AaA = 0$, следовательно, $D \subseteq \mathrm{ann_r}(B)$; аналогично $D \subseteq \mathrm{ann_l}(B)$. По пункту 1 $\mathrm{ann_r}(B) = \mathrm{ann_l}(B) \subseteq \mathrm{ann_r}(ABA)$. Если $a \in \mathrm{ann_r}(ABA)$, то $(ABA \cap AaA)^2 = 0$, поэтому $ABA \cap AaA = 0$, а это означает, что $\mathrm{ann_r}(ABA) \subseteq D$.

6. Пусть e — дополняемый идемпотент и $s \in A$. Тогда по пункту 1 $es = es(e + e^{\perp}) = ese$. Симметричным образом $se = ese$. □

Договоримся коэффициенты многочлена f, $\deg(f) = n$, обозначать через $f_0, \ldots, f_n$ — от свободного члена до старшего коэффициента.

Предложение 3. *Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца A, то равносильны следующие условия:*

1) *A — полукольцо без нильпотентных элементов и $a\varphi(a) \neq 0$ для всех $a \in A \setminus \{0\}$;*

2) A — *полукольцо без нильпотентных элементов и* $a\varphi^n(a) \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $a \in A \setminus \{0\}$;
3) A — *полукольцо без нильпотентных элементов и* $\varphi^n(a)b = b\varphi^n(a) = 0$ *для всех таких* $a, b \in A$, *что* $ab = 0$;
4) *для любых многочленов* $f, g \in A[x, \varphi]$ *равенство* $fg = 0$ *равносильно равенству* $C(f) \cap C(g) = 0$, *где* $C(f)$ — *идеал полукольца* A, *порождённый всеми коэффициентами* f_i *многочлена* f;
5) $A[x, \varphi]$ — *полукольцо без нильпотентных элементов.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Допустим, что в полукольце, удовлетворяющем условию 1), найдётся наименьшее натуральное число n, отличное от единицы, такое что $a\varphi^n(a) = 0$ для некоторого $a \in A \setminus \{0\}$. Тогда

$$a\varphi^{n-1}(a)\varphi\big(a\varphi^{n-1}(a)\big) = a\varphi^{n-1}(a)\varphi(a)\varphi^n(a) = 0$$

по лемме 1. По условию получаем $a\varphi^{n-1}(a) = 0$, противоречие.

Проверим импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $ab = 0$. Тогда $\varphi(a)\varphi(b) = 0$. Получаем $b\varphi(a)\varphi\big(b\varphi(a)\big) = b\varphi(a)\varphi(b)\varphi^2(a) = 0$, и по условию $b\varphi(a) = 0$. По индукции $b\varphi^n(a) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $C(f) \cap C(g) = 0$. Тогда $f_i g_j = 0$ для всех коэффициентов многочленов f и g. По 3) $f_i\varphi^i(g_j) = 0$, поэтому $fg = 0$.

Обратно, пусть $fg = 0$. Докажем, что $f_i g_j = 0$. Индукцией по j покажем, что $f_0 g_j = 0$ для любого j. Через $(fg)_k$ будем обозначать коэффициент многочлена fg при x^k. Понятно, что $f_0 g_0 = (fg)_0 = 0$. Пусть $f_0 g_j = 0$ для всех $j < k$. Тогда по условию и в силу леммы 1 $f_0 f_i \varphi^j(g_j) = 0$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Допуская обозначение $b = \varphi^0(b)$, получаем

$$0 = (fg)_k = f_0(fg)_k = f_0\Bigg(\sum_{i+j=k} f_i\varphi^i(g_j)\Bigg) = f_0 f_0 \varphi^0(g_k) = f_0^2 g_k.$$

По лемме 1 получаем $(f_0 g_k)^2 = 0$, откуда следует, что $f_0 g_k = 0$. Докажем сейчас, что $f_i g_j = 0$ (индукция по i). Предположим, что $f_i g_j = 0$ верно для всех $i < n$ и всех j. Представим f в виде

$$f = f_0 + \ldots + f_{n-1}x^{n-1} + (f_n + f_{n+1}x + \ldots)x^n = \alpha + \beta x^n, \quad \alpha, \beta \in A[x, \varphi].$$

По индуктивному предположению и условию имеем $\alpha g = 0$, поэтому $\beta x^n g = 0$. Многочлен $x^n g$ имеет вид $\varphi^n(g_0)x^n + \varphi^n(g_1)x^{n+1} + \ldots$. По доказанному выше произведение свободного члена f_n многочлена β на произвольный коэффициент многочлена $x^n g$ равно нулю, поэтому $f_n\varphi^n(g_j) = 0$, тогда по условию $0 = \varphi^n(f_n)\varphi^n(g_j) = \varphi^n(f_n g_j)$, и $f_n g_j = 0$ из-за инъективности эндоморфизма φ. Таким образом заключаем, что $f_i g_j = 0$ для всех i, j.

Пусть $c \in C(f) \cap C(g)$ и $c = \sum a f_i b = \sum a' g_j b'$ — конечные суммы для некоторых $a, b, a', b' \in A$. Тогда по лемме 1 $c^2 = 0$, следовательно, $c = 0$.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 5). Предположим, что $A[x, \varphi]$ содержит нильпотентный элемент f, причём можно считать, что $f^2 = 0$. Тогда $C(f) = C(f) \cap C(f) = 0$, откуда получаем, что $f = 0$.

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1). Ясно, что A является полукольцом без нильпотентных элементов. Для произвольного $a \neq 0$ из A получаем, что $0 \neq (ax)^2 = a\varphi(a)x^2$, откуда следует, что $a\varphi(a) \neq 0$. $\square$

Полукольцо A называется *риккартовым справа* (*слева*), если для любого $a \in A$ найдётся такой дополняемый идемпотент $e \in A$, что $\mathrm{ann_r}(a) = eA$ ($\mathrm{ann_l}(a) = Ae$). Риккартово справа и слева полукольцо называется *риккартовым*.

Лемма 2. *Для полукольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — риккартово справа или слева полукольцо, каждый дополняемый идемпотент которого централен*;
2) *A — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов*;
3) *A — риккартово полукольцо без нильпотентных элементов*;
4) *каждый элемент в A — произведение центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля*;
5) *A — полукольцо без нильпотентных элементов и для любого его конечно порождённого идеала B существует такой центральный дополняемый идемпотент $e \in A$, что $\mathrm{ann_r}(B) = \mathrm{ann_l}(B) = eA = Ae$.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) очевидна, а 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из леммы 1.

Покажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Пусть A — риккартово справа полукольцо, $s^2 = 0$ для $s \in A$. Тогда $\mathrm{ann_r}(s) = eA$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента e. Поэтому $s = es = se = 0$ и A — полукольцо без нильпотентных элементов. По лемме 1 $\mathrm{ann_l}(s) = \mathrm{ann_r}(s) = eA = Ae$, и A риккартово слева. Пусть a — произвольный элемент из A и $\mathrm{ann_r}(a) = \mathrm{ann_l}(a) = eA = Ae$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента e. Положим $d = e^{\perp}a + e$. Поскольку $a = a(e + e^{\perp}) = ae^{\perp}$, то $e^{\perp}d = e^{\perp}a + e^{\perp}e = e^{\perp}a = a$. Покажем, что d — неделитель нуля. Пусть $b \in \mathrm{ann_r}(d)$. Тогда $0 = db = (e^{\perp}a + e)b = e^{\perp}ab + eb$. Получаем $0 = e0 = e(e^{\perp}ab + eb) = eb$, откуда следует, что $e^{\perp}ab = 0$. Далее, $ab = (e + e^{\perp})ab = eab = 0$. Следовательно, $b \in \mathrm{ann_r}(a) = eA$. Отсюда вытекает, что $b = eb = 0$, и $\mathrm{ann_r}(d) = 0$. Симметричным образом устанавливается, что $\mathrm{ann_l}(d) = 0$.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 3). Условие 4) является право-лево-симметричным, поэтому достаточно обосновать, что A риккартово справа. Пусть $a \in A$ и $a = ed$ для некоторых центрального дополняемого идемпотента e и неделителя нуля d. Покажем, что $\mathrm{ann_r}(a) = e^{\perp}A$. Очевидно включение $e^{\perp}A \subseteq \mathrm{ann_r}(a)$. Пусть $0 = as = eds$, что влечёт $es = 0$. Тогда $s = (e + e^{\perp})s = e^{\perp}s$ и $\mathrm{ann_r}(a) \subseteq e^{\perp}A$. Получили, что A — риккартово справа полукольцо. Отсутствие в A нильпотентных элементов очевидно.

Покажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $B = \sum\limits_{i=1}^{k} Ab_iA$ — конечно порождённый идеал и e_i — такие центральные дополняемые идемпотенты, что $\mathrm{ann_r}(b_i) =$

$= e_iA$. Положим $e = e_1 \dots e_k$. Ясно, что e — центральный дополняемый идемпотент (см., например, [2, предложение 2.1.3]) и $eA \subseteq \mathrm{ann_r}(B)$. Если $s \in \mathrm{ann_r}(B)$, то $s \in \mathrm{ann_r}(b_i)$ для любого b_i, поэтому $s = e_is$. Следовательно, $s = e_1 \dots e_k s = es$, и $\mathrm{ann_r}(B) \subseteq eA$.

Импликация 5) $\Longrightarrow$ 3) следует из того, что аннуляторы элемента b и главного идеала AbA совпадают по лемме 1. □

Предложение 4. *Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца A, то равносильны следующие условия*:

1) *$A[x, \varphi]$ — риккартово справа полукольцо без нильпотентных элементов*;
2) *$A[x, \varphi]$ — риккартово слева полукольцо без нильпотентных элементов*;
3) *каждый многочлен из $A[x, \varphi]$ является произведением центрального дополняемого идемпотента, лежащего в A, и неделителя нуля*;
4) *A — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов и $a\varphi(a) \neq 0$ для каждого ненулевого $a \in A$.*

Доказательство. Обозначим $R = A[x, \varphi]$. По лемме 2 мы установим равносильность условий 1), 2) и 3), если покажем, что произвольный центральный дополняемый идемпотент из R лежит в A. Предположим, что найдётся $f^2 = f \in R \setminus A$, $\deg(f) = n \geqslant 1$, и пусть a — старший коэффициент многочлена f. Тогда, сравнивая коэффициенты f^2 и f, получаем, что коэффициент при x^{2n} у f^2 равен нулю, т. е. $a\varphi^n(a) = 0$. Получили противоречие с предложением 3.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). По предложению 3 A — полукольцо без нильпотентных элементов и $a\varphi(a) \neq 0$ для любого ненулевого $a \in A$. Рассмотрим $\mathrm{ann_r}(a)$ как идеал полукольца R. По леммам 2 и 1 $\mathrm{ann_r}(a) = \mathrm{ann_r}(RaR) = eR$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента e полукольца R. Отсутствие ненулевых нильпотентных элементов в R влечёт по предложению 3 условие $a\varphi^n(a) \neq 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $a \in A \setminus \{0\}$. Из последнего следует, что $\deg(f^2) > \deg(f)$ для любого многочлена f степени не меньше 1. Но тогда идемпотент полукольца R необходимо лежит в A. Получили, что $e \in A$. Ясно, что правый аннулятор $\mathrm{ann_r}(a)$ в полукольце A совпадает с eA, т. е. A — риккартово справа полукольцо.

Покажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). По предложению 3 R — полукольцо без нильпотентных элементов. Пусть $f \in R$. Идеал $C(f)$ полукольца A, порождённый всеми коэффициентами многочлена f, конечно порождён, поэтому по лемме 2 $\mathrm{ann_r}\big(C(f)\big) = eA$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента $e \in A$. Кроме того, e является центральным элементом полукольца R (лемма 1). Поэтому $eR \subseteq \mathrm{ann_r}(f)$. Пусть сейчас g — многочлен, лежащий в $\mathrm{ann_r}(f)$. Из $fg = 0$ получаем $C(f) \cap C(g) = 0$ по предложению 3. Следовательно, для любых коэффициентов f_i и g_j многочленов f и g соответственно $f_ig_j = 0$, поэтому $C(g) \subseteq eA$. Но тогда $g \in eR$, и $\mathrm{ann_r}(f) \subseteq eR$. Получили, что правый аннулятор многочлена f — идеал полукольца R, порождаемый дополняемым идемпотентом $e \in R$. Доказали, что R риккартово справа. □

Для многочленов

$$f = f_0 + f_1x + \ldots + f_kx^k,$$
$$g = g_0 + g_1x + \ldots + g_mx^m$$

и произвольного $n \in \mathbb{N}$ положим

$$f \equiv_n g \Longleftrightarrow f_0 = g_0, \ldots,\ f_{n-1} = g_{n-1}.$$

В частности,

$$f \equiv_1 g \Longleftrightarrow f_0 = g_0.$$

Стандартно проверяется, что отношение $\equiv_n$ является конгруэнцией на R, а её класс нуля есть идеал Rx^n. Очевиден также изоморфизм $A \cong R/{\equiv_1}$.

Предложение 5. *Пусть $h_n\colon R \to R/{\equiv_n}$ — естественный эпиморфизм. Тогда $h_n(Rx)$ — нильпотентный идеал в $h_n(R)$.*

Доказательство. При $n = 1$ получаем, что $h_1(Rx)$ — нулевой идеал полукольца $h_1(R) \cong A$. При $n > 1$ достаточно заметить, что произведение n многочленов с нулевыми свободными членами является многочленом, у которого первые n коэффициентов нулевые. □

Лемма 3. *Для любого $a \in A$ равенство $ax = xa$ равносильно $a = \varphi(a)$.*

Доказательство. Из $ax = xa$ следует $ax = \varphi(a)x$, откуда получаем, что $a = \varphi(a)$. Если $a = \varphi(a)$, то $xa = \varphi(a)x = ax$. □

Полукольцо, в котором для любого его элемента a из $a + a = a$ следует $a = 0$, назовём *полукольцом без аддитивных идемпотентов*.

Предложение 6. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца A, f — многочлен из $R \equiv A[x,\varphi]$ со свободным членом f_0, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $h_n\colon R \to R/{\equiv_n}$ — естественный эпиморфизм.*

1. *Если $h_n(f)$ — ненулевой идемпотент в $h_n(R)$, то f_0 — ненулевой идемпотент в A.*
2. *Если $h_n(f)$ лежит в центре $h_n(R)$, то f_0 лежит в центре R и $f_0 = \varphi(f_0)$.*

Пусть дополнительно A является полукольцом без аддитивных идемпотентов.

3. *Если $h_n(f)$ — идемпотент в $h_n(R)$ и f_0 — центральный идемпотент в R, то $h_n(f) = h_n(f_0)$.*
4. *Если $h_n(f)$ — центральный идемпотент в $h_n(R)$, то f_0 — центральный идемпотент в R, $f_0 = \varphi(f_0)$ и $h_n(f) = h_n(f_0)$.*
5. *Если f — центральный идемпотент в R, то $f \in A$ и $f = \varphi(f)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. По условию $f \neq 0$. Поскольку $h_n(f)$ — идемпотент, то $f \equiv_n f^2$, свободные члены у f и f^2 равны, поэтому $f_0 = f_0^2$ — идемпотент. Допустим, что $f_0 = 0$. Тогда f можно представить в виде

$$f = (a + gx)x^k, \quad \text{где} \quad a \in A \setminus \{0\}, \quad g \in R, \quad k \geqslant 1.$$

Получаем, что a — это коэффициент при x^k в многочлене f, а коэффициент при x^k в многочлене f^2 равен нулю. Следовательно, $a = 0$, противоречие.

Докажем утверждение 2. Пусть $h_n(f)$ лежит в центре $h_n(R)$. Тогда

$$h_n(fx) = h_n(f)h_n(x) = h_n(x)h_n(f) = h_n(xf).$$

Значит, равны коэффициенты при x многочленов fx и xf, поэтому $f_0x = xf_0$. Таким же образом показывается, что f_0 перестановочен с любым элементом из A. Следовательно, f_0 лежит в центре R. По лемме 3 $f_0 = \varphi(f_0)$.

Утверждение 3 очевидно, если $h_n(f) = 0$. Допустим,

$$h_n(f) = f_0 + f_1x + \ldots + f_{n-1}x^{n-1} \neq 0.$$

Заметим, что $f_0 \neq 0$ по утверждению 1. Из

$$h_n(f) = \big(h_n(f)\big)^2 = f_0^2 + \big(f_0f_1 + f_1\varphi(f_0)\big)x + \ldots$$

следует $f_1 = f_0f_1 + \varphi(f_0)f_1$. Учитывая, что $\varphi(f_0) = f_0$, получаем, что $f_0f_1 = f_0f_1 + f_0f_1$, и из-за отсутствия аддитивных идемпотентов $f_0f_1 = 0$ и $f_1 = 0$. Индукцией покажем, что $f_k = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n-1$. С учётом индуктивного предположения имеем

$$f_k = f_0f_k + f_k\varphi(f_0) = f_0f_k + f_0f_k,$$

откуда следует, что $f_0f_k = 0$ и $f_k = 0$. Таким образом, $h_n(f) = f_0 = h_n(f_0)$.

Докажем утверждение 4. По утверждению 1 f_0 — идемпотент, по утверждению 2 он центральный в R и $f_0 = \varphi(f_0)$. По утверждению 3 $h_n(f) = h_n(f_0)$.

Докажем утверждение 5. Пусть k — такое целое число, что $\deg(f) < k$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $h_k\colon R \to R/{\equiv_k}$. Тогда $h_k(f) \equiv f$ — центральный идемпотент в $h_k(R)$. По утверждению 4 $f_0 \equiv h_k(f_0) = h_k(f) \equiv f$, откуда следует, что $f \in A$ и $f = f_0 = \varphi(f_0) = \varphi(f)$. $\square$

Полукольцо называется *абелевым*, если каждый его идемпотент является центральным.

Предложение 7. *Если A — полукольцо без аддитивных идемпотентов, φ — инъективный эндоморфизм полукольца A и $R \equiv A[x,\varphi]$, то равносильны следующие условия*:

1) *R — абелево полукольцо*;
2) *$R/{\equiv_2}$ — абелево полукольцо*;
3) *$R/{\equiv_n}$ — абелево полукольцо для всех $n \in \mathbb{N}$*;
4) *A — абелево полукольцо и $\varphi(e) = e$ для каждого идемпотента из A.*

Доказательство. Докажем импликацию (1) $\Longrightarrow$ (4). Очевидно, что A — абелево полукольцо. Пусть e — идемпотент в A. Поскольку e является также идемпотентом в R, то он лежит в центре полукольца R, поэтому по лемме 3 $\varphi(e) = e$.

Докажем импликацию (4) $\Longrightarrow$ (1). Пусть f — идемпотент полукольца R. Тогда f_0 — идемпотент абелева полукольца A, поэтому f_0 централен в A. Поскольку $f_0 = \varphi(f_0)$, то по лемме 3 $f_0x = xf_0$, следовательно, f_0 — центральный идемпотент в R. Пусть $\deg(f) = n$ и $h_{n+1}\colon R \to R/{\equiv_{n+1}}$ — естественный гомоморфизм. Тогда $h_{n+1}(f) = h_{n+1}(f_0)$ по утверждению 3 предложения 6, поэтому $f = f_0$, и f — центральный идемпотент.

Покажем импликацию (2) $\Longrightarrow$ (4). Пусть $h_2\colon R \to R/{\equiv_2}$ — естественный эпиморфизм. Очевидно, что A — абелево полукольцо. Пусть e — идемпотент из A. Тогда $h_2(e)$ — идемпотент абелева полукольца $h_2(R)$. Поэтому

$$h_2(xe) = h_2(x)h_2(e) = h_2(e)h_2(x) = h_2(ex).$$

С другой стороны, $h_2(xe) = h_2(\varphi(e)x)$, откуда следует, что $ex \equiv_2 \varphi(e)x$ и $e = \varphi(e)$.

Докажем импликацию (4) $\Longrightarrow$ (3). Пусть $h_n(f)$ — ненулевой идемпотент в $h_n(R)$. По утверждению 3 предложения 6 f_0 — ненулевой идемпотент в A, поэтому $\varphi(f_0) = f_0$. Тогда по лемме 3 $xf_0 = f_0x$, и f_0 — центральный идемпотент в R. По утверждению 3 предложения 6 $h_n(f) = h_n(f_0)$ — центральный идемпотент в $h_n(R)$.

Импликация (3) $\Longrightarrow$ (2) очевидна. $\square$

Литература

[1] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

[2] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 3. — С. 111—227.