Градуированные кольца с условиями конечности

Д. С. БАЖЕНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: trongsund@yandex.ru

А. Л. КАНУННИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

УДК 512.552.23

Ключевые слова: градуированные кольца, кольца частных, кольца с условиями конечности.

Аннотация

Статья посвящена исследованию колец частных градуированных колец с условиями конечности для идеалов. Доказан критерий артиновости градуированного классического кольца частных для колец, градуированных по периодической группе (градуированный аналог теоремы Смолла), с использованием аналогов теорем Голди и Шока для градуированных колец.

Abstract

D. S. Bazhenov, A. L. Kanunnikov, Graded rings with finiteness conditions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 23 (2020), no. 3, pp. 23—35.

This paper is devoted to quotient rings of graded rings with finiteness conditions for ideals. The analogs of Goldie, Shock, and Small theorems are proved. We find criteria for a graded ring R to admit a gr-semisimple and gr-Artinian (the Goldie theorem) and gr-Artinian (the Small theorem) classical graded quotient ring.

Всюду G — группа с нейтральным элементом e, R — ассоциативное кольцо, не обязательно содержащее единицу, градуированное по группе G, т. е.

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g,$$

где $(R_g)_{g \in G}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца R, такое что $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Элементы множества

$$h(R) = \bigcup_{g \in G} R_g$$

называются однородными, ненулевой элемент из компоненты R_g называется однородным степени g (обозначение $\deg r = g$). Отметим, что если кольцо R

Фундаментальная и прикладная математика, 2020, том 23, № 3, с. 23—35.

содержит единицу, то она лежит в единичной компоненте R_e [7, предложение 1.1.1].

Для произвольного элемента $a \in R$ будем обозначать через $R^\sharp a$ левый идеал в R, порождённый a, т. е. $R^\sharp a = Ra + \mathbb{Z}a$. Очевидно, что если $a \in h(R)$, то $R^\sharp a$ — градуированный левый идеал.

Пусть S_0 — непустое мультипликативно замкнутое подмножество в R. Хорошо известно, что правое кольцо частных RS_0^{-1} существует, если и только если выполнены условия Оре для однородных элементов:

1) для любых $r \in h(R)$ и $s \in S_0$ существуют такие $r' \in h(R)$ и $s \in S_0$, что $rs' = sr'$;
2) если $sr = 0$ для $r \in h(R)$ и $s \in S_0$, то $rs' = 0$ для некоторого $s' \in S_0$.

При выполнении условий 1) и 2) кольцо RS_0^{-1} является градуированным кольцом с градуировкой

$$(RS^{-1})_g = \bigcup_{h \in G} \{rs^{-1} \mid r \in R_h,\ s \in S_{h^{-1}g}\}.$$

Если кольцо RS^{-1} существует, то оно называется градуированным классическим правым кольцом частных кольца R и обозначается также $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$, а кольцо R называется правым градуированным порядком в кольце $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$.

1. Градуированные кольца Голди

Теорема Голди гласит, что ассоциативное кольцо R обладает вполне приводимым (и простым) классическим правым градуированным кольцом частных, если и только если R — полупервичное (первичное) правое кольцо Голди.

Градуированное кольцо называется правым gr-кольцом Голди, если оно не содержит бесконечных прямых сумм градуированных правых идеалов и удовлетворяет условию максимальности градуированных правых аннуляторов. Градуированные кольца Голди исследовались во многих работах. В одной из первых работ 1979 года К. Нэстэсеску и Ф. ван Ойстайена был приведён контрпример ко второй теореме Голди, а именно построено $\mathbb{Z}$-градуированное коммутативное gr-полупервичное кольцо R, совпадающее со своим градуированным классическим кольцом частных, являющееся gr-нётеровым, но не gr-артиновым. Контрпример gr-первичного кольца Голди был впервые придуман Д. С. Баженовым [1]. А. Л. Канунников [5] доказал следующие два критерия.

Теорема 1 [5]. *Следующие условия на группу G равносильны*:

1) *для любого G-градуированного gr-первичного gr-кольца Голди R кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует и вполне gr-приводимо*;
2) *для любых $g, h \in G$ найдётся $n \in \mathbb{N}$, для которого $gh^n = h^n g$*;

2′) *для любых $g, h \in G$ найдутся $m, n \in \mathbb{N}$, для которых $gh^m = h^n g$.*

Теорема 2 [5]. *Следующие условия на группу G равносильны*:

1) *для любого G-градуированного gr-полупервичного gr-кольца Голди R кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует и вполне gr-приводимо*;
2) *группа G периодическая.*

О строении кольца $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ в случае градуировки по периодической группе можно сказать несколько больше.

Теорема 3. *Пусть R — градуированное по периодической группе G gr-полупервичное gr-кольцо Голди. Тогда выполнено следующее*:

1) *всякий ненулевой правый градуированный идеал I кольца R содержит ненильпотентный gr-униформный элемент степени e*;
2) *$I_e \cap S \neq \varnothing$ для всякого правого gr-существенного идеала I кольца R*;
3) *кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R) = RS^{-1}$ существует, вполне gr-приводимо и совпадает с кольцами $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ и $R(R_e \cap S)^{-1}$.*

Теорема 3 получена в [3] как следствие более сильного результата, причём в этой статье предполагается существование единицы в кольце R (хотя оно не используется в доказательстве). Приведём более простое непосредственное доказательство.

Лемма 1. *Пусть R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди. Тогда для любого $s \in h(R)$ равносильны следующие условия*:

1) *правый идеал sR кольца R gr-существен*;
2) *$s \in S$*;
3) *$\mathrm{r}_R(s) = 0$.*

В [4] эта лемма доказана в предположении, что кольцо R содержит единицу.

Доказательство. Докажем импликацию (3) $\Longrightarrow$ (1). Пусть I — ненулевой градуированный правый идеал в R, такой что $I \cap sR = 0$. Покажем, что градуированные правые идеалы s^nR, $n \geqslant 1$, образуют прямую сумму. (Заметим, что sR не обязательно содержит s.) Действительно, в противном случае $sr_1 + \ldots + s^n r_n = 0$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_n \in R$. Поскольку $\mathrm{r}_R(s) = 0$, то $r_1 = -sr_2 - \ldots - s^k r_k \in I \cap sR = 0$ Аналогично получаем $r_2 = \ldots = r_n = 0$. Это противоречит gr-конечномерности справа кольца R. Значит, $I = 0$ и sR — gr-существенный правый идеал в R.

При доказательстве импликации (1) $\Longrightarrow$ (2) в [4] не использовалось предположение, что $1 \in R$. Импликация (2) $\Longrightarrow$ (3) очевидна. □

Напомним, что однородный элемент $a \in h(R)$ называется gr-униформным справа, если правый идеал aR gr-униформен, т. е. любые два градуированных правых идеала в R, содержащиеся в aR, имеют ненулевое пересечение.

Лемма 2 [7, лемма 8.4.3]. *Пусть R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди. Тогда если $0 \neq a \in h(R)$ — gr-униформный справа элемент, то правый аннулятор $\mathrm{r}_R(a)$ — максимальный среди правых аннуляторов ненулевых однородных элементов из R.*

Доказательство теоремы 3. Докажем утверждение 1). Поскольку кольцо R gr-конечномерно справа, найдётся gr-униформный элемент $a \in h(I) \setminus 0$. Пользуясь gr-полупервичностью кольца R, найдём такое $b \in h(R)$, что $aba \neq 0$. Элемент ba ненильпотентен: если $(ba)^n = 0 \neq (ba)^{n-1}$ для некоторого $n \geqslant 2$ и так как $\mathrm{r}(a) \subseteq \mathrm{r}\big((ba)^{n-1}\big)$, то по лемме 2 $\mathrm{r}(a) = \mathrm{r}\big((ba)^{n-1}\big) \ni ba$, откуда вытекает, что $aba = 0$, что неверно. Следовательно, элемент $ab \in h(I)$ ненильпотентный и gr-униформный. Группа G периодична, поэтому порядок $m = O\big(\deg(ab)\big)$ конечен. Следовательно, элемент $(ab)^m \in I_e$ — требуемый ненильпотентный gr-униформный элемент степени e.

Докажем утверждение 2). Найдём по утверждению 1) gr-униформный ненильпотентный элемент $a_1 \in I_e$. Пусть уже найдены gr-униформные ненильпотентные элементы $a_1, \ldots, a_m \in I_e$, такие что $a_i \in \bigcap\limits_{j=1}^{i-1} \mathrm{r}(a_j)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathrm{r}(a_j) \neq 0$. Так как правый идеал I gr-существен, то $I \cap \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathrm{r}(a_j) \neq 0$ и по утверждению 1) существует ненильпотентный gr-униформный элемент $a_{m+1} \in I_e \cap \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathrm{r}(a_j)$. По построению и в силу gr-униформности элементов a_i имеем $a_i \in \mathrm{r}(a_j) = \mathrm{r}(a_j^2)$, $i > j$, откуда следует, что сумма $\sum\limits_{i \geqslant 1} a_i R$ прямая и, значит, конечная, поэтому существует $n \in \mathbb{N}$, такой что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{r}(a_i) = 0$. Тогда $\mathrm{r}(a) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{r}(a_i) = 0$. Возведя каждый элемент a_i в степень $m_i := O\big(\deg(a_i)\big)$, получим gr-униформные ненильпотентные элементы $a_i^{m_i} \in I_e$, причём $\mathrm{r}(a_i^{m_i}) = \mathrm{r}(a_i) = 0$. Следовательно, элемент $a = a_1^{m_1} + \ldots + a_n^{m_n} \in I_e$ регулярный по лемме 1.

Утверждение 3) известным образом следует из пункта 2) (см., например, [4]). □

В заключение отметим, что обращение градуированного аналога теоремы Голди справедливо без ограничений на группу.

Теорема 4 [4]. *Пусть R — градуированный правый порядок во вполне gr-приводимом справа кольце. Тогда R — gr-полупервичное правое кольцо Голди.*

2. Градуированные ниль-кольца с условиями конечности

В этом разделе мы докажем градуированный аналог теоремы Шока, обобщающей более ранние результаты о ниль-кольцах с различными условиями конечности для односторонних идеалов.

Градуированное кольцо, все однородные элементы которого нильпотентны, назовём *gr-ниль-кольцом*. Важным примером gr-ниль-подкольца градуированного кольца R является его *градуированный нижний ниль-радикал* $P^{\mathrm{gr}}(R)$, который можно определить как пересечение всех gr-первичных идеалов кольца R или как наименьший gr-полупервичный идеал. Ясно, что фактор-кольцо $R/P^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-полупервично.

Теорема 5. *Пусть R — градуированное кольцо с условием обрыва возрастающих цепей градуированных левых аннуляторов, N — его ненильпотентное gr-нильподкольцо. Тогда найдётся счётное семейство однородных элементов $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такое что*

1) $\mathrm{r}(a_1, a_2, a_3, \ldots) \subsetneq \mathrm{r}(a_2, a_3, a_4, \ldots) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{r}(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) \subsetneq \ldots;$
2) *если $Ra_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ra_n$ является прямой;*
3) *если $Ra_n = 0$, то существует такое натуральное $k \geqslant n$, что сумма $\sum\limits_{m=k}^{\infty} R^{\sharp}a_m$ является прямой.*

Следствие 1. *Пусть градуированное кольцо R является gr-правым или gr-левым кольцом Голди. Тогда всякое gr-нильподкольцо в R нильпотентно. В частности, градуированный нижний ниль-радикал $P^{\mathrm{gr}}(R)$ нильпотентен.*

Лемма 3 [6, лемма 2.1]. *Пусть A — любое ассоциативное кольцо, $x, y \in A$, элемент xy нильпотентен. Тогда $xyx = 0$ или $\mathrm{l}(x) \neq \mathrm{l}(xyx)$.*

Доказательство теоремы 5. Все множества N^k градуированы, поэтому их левые аннуляторы являются градуированными левыми идеалами. По условию последовательность

$$\mathrm{l}(N) \subseteq \mathrm{l}(N^2) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{l}(N^k) \subseteq \ldots$$

стабилизируется с некоторого номера, скажем t. Обозначим

$$K := \mathrm{l}(N^t) = \mathrm{l}(N^{t+1}) = \mathrm{l}(N^{t+2}) = \ldots .$$

Тогда $K \not\subseteq N$ (иначе $N^{t+1} = 0$), и так как K, N — градуированные множества, то разность $N \setminus K$ содержит однородный элемент. Выберем такой однородный элемент $x_1 \in h(N)$, что левый градуированный аннулятор $\mathrm{l}(x_1)$ является максимальным среди всех градуированных левых аннуляторов вида $\mathrm{l}(x)$, где $x \in h(N \setminus K)$. Имеем $x_1 N \not\subset K$ (иначе $x_1 N^{t+1} = 0$ и $x_1 \in \mathrm{l}(N^{t+1}) = K$), поэтому существует такой $x \in h(N)$, что $x_1 x \notin K$. Выберем теперь элемент $x_2 \in h(N)$ так, чтобы градуированный левый аннулятор $\mathrm{l}(x_2)$ был максимальным среди таких $\mathrm{l}(x)$, что $x \in h(N)$ и $x_1 x \notin K$. Пусть для какого-то $n \in \mathbb{N}$ выбраны такие элементы $x_2, \ldots, x_n \in h(N)$, что при всех $i = 2, \ldots, n$ градуированный левый аннулятор $\mathrm{l}(x_i)$ является максимальным среди всех таких $\mathrm{l}(x)$, что $x \in h(N)$ и $x_1 \ldots x_{i-1} x \ldots \notin K$. Тогда $x_1 \ldots x_n N \not\subseteq K$ (иначе $x_1 \ldots x_n N^{t+1} = 0$ и $x_1 \ldots x_n \in \mathrm{l}(N^{t+1}) = K$, что неверно), поэтому можно выбрать $x_{n+1} \in h(N)$, такой что градуированный левый аннулятор $\mathrm{l}(x_{n+1})$ является максимальным среди всех таких $\mathrm{l}(x)$, что $x \in h(N)$ и $x_1 \ldots x_n x \notin K$. Получаем последовательность однородных элементов $x_1, x_2, \ldots \in h(N)$. Заметим, что

$$Rx_j \cap \mathrm{l}(x_{j+1} \ldots x_{j+m}) = 0 \quad \text{для любых} \quad j, m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

(Если $0 \neq rx_j \in \mathrm{l}(x_{j+1} \ldots x_{j+m})$, то $r \in \mathrm{l}(x_j \ldots x_{j+m}) \setminus \mathrm{l}(x_j)$, т. е. $\mathrm{l}(x_j) \subsetneq \subsetneq \mathrm{l}(x_j \ldots x_{j+m})$, что с учётом условия $(x_1 \ldots x_{j-1})(x_j \ldots x_{j+m}) \notin K$ противоречит максимальности $\mathrm{l}(x_j)$, т. е. выбору элемента x_j.) Определим однородные элементы

$$a_n = x_1 \ldots x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что для $\mathrm{l}(a_1) = \ldots = \mathrm{l}(a_n) = \ldots$ (строгое включение $\mathrm{l}(x_1) = \mathrm{l}(a_1) \subsetneq \subsetneq \mathrm{l}(a_n)$ противоречило бы выбору элемента x_1). Докажем, что

$$a_{n+j}x_n = 0 \ \text{ для всех } \ n \geqslant 1, \quad j \geqslant 0. \tag{2}$$

Предположим, что $a_{n+j}x_n \neq 0$, $n \geqslant 1$, $j \geqslant 0$. Поскольку $a_{n+j}x_n \in Rx_n$ и $Rx_n \cap \mathrm{l}(x_{n+1}x_{n+2} \ldots x_{n+m}) = 0$ $(m > 0)$ ввиду (1), то $a_{n+j}x_n(x_{n+1} \ldots x_{n+m}) \neq 0$, что при $m = t$ даёт $a_{n+j}x_n \notin K$. Если $j > 0$, то из нильпотентности x_n и $x_{n+1}x_{n+2} \ldots x_{n+j}$ следует

$$\mathrm{l}(x_n) \subsetneq \mathrm{l}(x_n x_{n+1} \ldots x_{n+j} x_n),$$

что противоречит максимальности $\mathrm{l}(x_n)$. Если $j = 0$, то $a_n x_n = a_{n-1}x_n^2 \notin K$, а поскольку x_n нильпотентен, то $\mathrm{l}(x_n^2) \supsetneq \mathrm{l}(x_n)$ (если $x_n^s = 0 \neq x_n^{s-1}$, то $x_n^{s-2} \in \in \mathrm{l}(x_n^2) \setminus \mathrm{l}(x_n)$), что снова противоречит максимальности $\mathrm{l}(x_n)$. Утверждение (2) доказано. Из него следует, что

$$x_{n+1} \in \mathrm{r}(a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots) \setminus \mathrm{r}(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots),$$

откуда следует, что

$$\mathrm{r}(a_1, a_2, a_3, \ldots) \subsetneq \mathrm{r}(a_2, a_3, a_4, \ldots) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{r}(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) \subsetneq \ldots.$$

Докажем теперь утверждение 2). Пусть $Ra_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$r_{s+1}a_{s+1} = r_1 a_1 + \ldots + r_s a_s \tag{3}$$

для некоторых однородных $r_1, r_2, \ldots, r_{s+1}$. Умножая справа это равенство на x_2, получаем $r_1 a_2 = 0$, откуда следует, что $r_1 \in \mathrm{l}(a_2) = \mathrm{l}(a_1)$, т. е. $r_1 a_1 = 0$. Аналогично, домножая (3) справа на x_3, получаем, что $r_2 a_3 = 0$, откуда следует, что $r_2 \in \mathrm{l}(a_3) = \mathrm{l}(a_2)$ и $r_2 a_2 = 0$. Таким образом, $r_i a_i = 0$ при $i = 1, \ldots, s$, а значит, сумма $\sum\limits_{n \leqslant 1} Ra_n$ прямая.

Докажем утверждение 3). Если $Ra_n = 0$ для некоторого n, то $Ra_m = 0$ при всех $m \geqslant n$. Если некоторый элемент a_j имеет конечный аддитивный порядок, то все элементы $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots$ имеют конечные аддитивные порядки, которые нестрого убывают, поэтому начиная с некоторого номера эти порядки равны. Значит, можно считать, что аддитивные порядки всех элементов $a_n, a_{n+1}, \ldots$ либо бесконечны, либо конечны и равны. Докажем, что сумма $\sum\limits_{k=n}^{\infty} R^\sharp a_k$ прямая. В самом деле, пусть для некоторых $k_1, k_2, \ldots, k_{s+1} \in \mathbb{Z}$

$$k_1 a_m + k_2 a_{m+1} + \ldots + k_s a_{m+s-1} = k_{s+1} a_{m+s}.$$

Умножив это равенство справа на x_{m+1}, получим $k_1 a_{m+1} = 0$, откуда следует, что $k_1 a_m = 0$. Аналогично умножение на x_{m+2} даёт $k_2 a_{m+2} = 0$, откуда следует, что $k_2 a_{m+1} = 0$, и т. д. Утверждение 3) доказано. □

3. Градуированные порядки в gr-артиновых кольцах

Напомним, что для градуированного кольца R мы обозначаем множество однородных регулярных элементов через S и градуированный нижний ниль-радикал через $P^{\mathrm{gr}}(R)$. Введём также следующие обозначения:

$\bar{R} = R/P^{\mathrm{gr}}(R)$, $\bar{r} = r + P^{\mathrm{gr}}(R)$ $(r \in R)$;

$M = \{r \in R \mid \bar{r}$ регулярен в $\bar{R}\}$;

$T_k^{\mathrm{gr}} = P^{\mathrm{gr}}(R) \cap \mathrm{l}_R(P^{\mathrm{gr}}(R)^k)$, $R_k = R/T_k^{\mathrm{gr}}$, $\bar{r}_k = r + T_k^{\mathrm{gr}}$ $(k \in \mathbb{N}$ и $r \in R)$.

Правое gr-кольцо Голди R назовём правым gr-T-кольцом Голди, если R_k — правое gr-кольцо Голди для каждого $k \in \mathbb{N}$. Следующая теорема является градуированным аналогом теоремы Смолла [6, 8, 9].

Теорема 6. *Следующие условия на кольцо R, градуированное по периодической группе G, равносильны*:

1) *кольцо $Q = RS^{-1}$ существует и gr-артиново справа*;
2) *R — ненильпотентное правое gr-T-кольцо Голди и $M \subseteq S$*;
3) *R — ненильпотентное правое gr-T-кольцо Голди и $M = S$.*

При выполнении этих условий верны следующие утверждения:

4) *идеалы $P^{\mathrm{gr}}(R) \triangleleft R$ и $P^{\mathrm{gr}}(Q) \triangleleft Q$ нильпотентны,*
$$P^{\mathrm{gr}}(R) = P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R, \quad P^{\mathrm{gr}}(Q) = P^{\mathrm{gr}}(R)Q;$$
5) *$\bar{R}$ — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди и*
$$Q^{\mathrm{gr}}(\bar{R}) = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(\bar{R}) \cong Q/P^{\mathrm{gr}}(Q).$$

3.1. Предварительные леммы

Лемма 4. *Для любых натуральных чисел n, k справедливо равенство*
$$T_{k+n}^{\mathrm{gr}}/T_n^{\mathrm{gr}} = P^{\mathrm{gr}}(R_k) \cap \mathrm{l}_{R_k}(P^{\mathrm{gr}}(R_k)^n).$$

Доказательство. Имеем $P^{\mathrm{gr}}(R_k) = P^{\mathrm{gr}}(R)/T_k$. Пусть элемент $x \in R$ таков, что $x_k \in P^{\mathrm{gr}}(R_k) \cap \mathrm{l}_{R_k}(P^{\mathrm{gr}}(R_k)^n)$. Тогда $x \in P^{\mathrm{gr}}(R)$ и $x_k P^{\mathrm{gr}}(R_k)^n = \bar{0}$. Следовательно,
$$xP^{\mathrm{gr}}(R)^n \subseteq T_k \subseteq \mathrm{l}_R(P^{\mathrm{gr}}(R)^k), \quad xP^{\mathrm{gr}}(R)^{n+k} = 0$$
и $x \in T_{k+n}$, $x_k \in T_{k+n}/T_k$.

Если $y_k \in T_{n+k}/T_k$, то $y \in T_{n+k}$, поэтому $y \in P^{\mathrm{gr}}(R)$ и $yP^{\mathrm{gr}}(R)^{n+k} = 0$. Следовательно,
$$yP^{\mathrm{gr}}(R)^n \subseteq P^{\mathrm{gr}}(R) \cap \mathrm{l}_R(P^{\mathrm{gr}}(R)^k) = T_k.$$
Итак, $y_k \in P^{\mathrm{gr}}(R_k) \cap \mathrm{l}_{R_k}(P^{\mathrm{gr}}(R_k)^n)$. □

Лемма 5. *Если $M \subseteq S$, то для всех $a \in M$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство* $\mathrm{r}_{R_k}(a_k) = 0$.

Доказательство. Если $x_k \in \mathrm{r}_{R_k}(a_k)$, то $a_k x_k = \bar{0}$ и $ax \in T_k$. Тогда $ax \in P^{\mathrm{gr}}(R)$ и $axP^{\mathrm{gr}}(R)^k = 0$. Поскольку элемент $\bar{a} = a + P^{\mathrm{gr}}(R)$ регулярен в кольце $\bar{R}$, то $x \in P^{\mathrm{gr}}(R)$, а ввиду включения $M \subseteq S$ имеем $a \in S$. Поэтому $x\big(P^{\mathrm{gr}}(R)\big)^k = 0$, $x \in P^{\mathrm{gr}}(R) \cap \mathrm{l}_R(P^{\mathrm{gr}}(R)^k) = T_k$, откуда следует, что $x_k = \bar{0}$. □

Лемма 6. *Пусть R — ненильпотентное правое gr-кольцо Голди, выполнены условия Оре относительно полугруппы $M \subseteq S$, $Q = RM^{-1}$. Тогда верны следующие утверждения*:

а) $P^{\mathrm{gr}}(Q)$ — *нильпотентный градуированный идеал в* Q *и* $P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R = P^{\mathrm{gr}}(R)$;
б) $P^{\mathrm{gr}}(Q)^n = (P^{\mathrm{gr}}(R)^n)Q$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$;
в) $T_k^{\mathrm{gr}}Q \cap R = T_k^{\mathrm{gr}}$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$;
г) $T_k^{\mathrm{gr}}Q$ — *градуированный идеал в* Q *и* $Q/T_k^{\mathrm{gr}}Q$ — *правое кольцо частных* R_k *относительно полугруппы* $M_k = \{c + T_k \mid c \in M\}$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Докажем, что правый идеал $P^{\mathrm{gr}}(R)Q$ нильпотентен. Каждый элемент из $P^{\mathrm{gr}}(R)Q$ имеет вид ra^{-1}, где $r \in P^{\mathrm{gr}}(R)$ и $a \in M$. Для всех $b \in M$ и $y \in P^{\mathrm{gr}}(R)$ имеем $b^{-1}y = zc^{-1}$, где $z \in R$, $c \in M$, откуда следует, что $bz = yc \in P^{\mathrm{gr}}(R)$. Так как $\bar{b}$ — однородный регулярный элемент в $\bar{R}$, то $z \in P^{\mathrm{gr}}(R)$. По следствию 1 $P^{\mathrm{gr}}(R)$ — нильпотентный идеал кольца R, т. е. $P^{\mathrm{gr}}(R)^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Покажем, что $(P^{\mathrm{gr}}(R)Q)^m = 0$. Для этого достаточно проверить, что

$$r_1 a_1^{-1} r_2 a_2^{-1} \ldots r_m a_m^{-1} = 0$$

для всех $r_i \in h\big(P^{\mathrm{gr}}(R)\big)$ и $a_i \in M$ при $i \leqslant m$. Как мы отметили выше, $a_1^{-1} r_2 = z_1 c_2^{-1}$, где $z_1 \in h\big(P(R)\big)$, $c_2 \in M$, $c_2^{-1} a_2^{-1} r_3 = (a_2 c_2)^{-1} r_3 = z_2 c_3^{-1}$, где $z_2 \in h\big(P^{\mathrm{gr}}(R)\big)$ и $c_3 \in M$, и т. д. Таким образом, существуют такие элементы $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1} \in P^{\mathrm{gr}}(R)$, что

$$r_1 a_1^{-1} r_2 a_2^{-1} \ldots r_m a_m^{-1} = (r_1 z_1 z_2 \ldots z_{m-1}) c^{-1} = 0,$$

где $c \in M$. Итак, $P^{\mathrm{gr}}(R)Q$ — градуированный нильпотентный идеал кольца Q.

$P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R$ — gr-ниль-идеал кольца R. По теореме 5 $P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R$ — нильпотентный идеал, содержащийся в $P^{\mathrm{gr}}(R)$. Обратное включение $P^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R$ следует из цепочки

$$(P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R)Q \subseteq P^{\mathrm{gr}}(R)Q \subseteq P^{\mathrm{gr}}(Q).$$

Докажем утверждение б). Если $ac^{-1} \in P^{\mathrm{gr}}(Q)$, то $a \in P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R$ и $P^{\mathrm{gr}}(Q) \subseteq (P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R)Q$, т. е.

$$P^{\mathrm{gr}}(Q) = P^{\mathrm{gr}}(R)Q = (P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R)Q -$$

нильпотентный индекса m градуированный идеал в Q. Так как

$$P^{\mathrm{gr}}(Q) = P^{\mathrm{gr}}(R)Q = QP^{\mathrm{gr}}(R)Q = Q(P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R)Q,$$

то

$$P^{\mathrm{gr}}(Q)^2 = P^{\mathrm{gr}}(R)QP^{\mathrm{gr}}(R)Q = P^{\mathrm{gr}}(R)(P^{\mathrm{gr}}(R)Q) = P^{\mathrm{gr}}(R)^2Q.$$

Аналогично доказывается, что

$$P^{\mathrm{gr}}(Q)^n = P^{\mathrm{gr}}(R)^nQ = (P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R)^nQ$$

для любого натурального n.

Докажем утверждение в). Пусть $x \in T_kQ \cap R$ и $x \in rc^{-1}$, где $c \in M$ и $r \in T_k$. Так как $T_k \subseteq P^{\mathrm{gr}}(R)$, то

$$T_kQ \cap R \subseteq P^{\mathrm{gr}}(R)Q \cap R \subseteq P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R \subseteq P^{\mathrm{gr}}(R)$$

и $x \in P^{\mathrm{gr}}(R)$. Имеем $xc = r \in T_k \subseteq \mathrm{l}_R(P^{\mathrm{gr}}(R)^k)$. Поэтому

$$xP^{\mathrm{gr}}(Q)^k = rc^{-1}QP^{\mathrm{gr}}(R)^kQ = rQP^{\mathrm{gr}}(R)^kQ = rP^{\mathrm{gr}}(R)^kQ = 0$$

по пункту б). Так как $P^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq P^{\mathrm{gr}}(Q)$, то $xP^{\mathrm{gr}}(R)^k = 0$, $x \in T_k$ и $T_kQ \cap R \subseteq T_k$.

Докажем утверждение г). Пусть $r_1a^{-1} \in T_kQ$ и $r_2b^{-1} \in Q$, где $a, b \in M$, $r_1 \in T_k$ и $r_2 \in R$. Докажем, что

$$(r_2b^{-1})(r_1a^{-1}) \in T_kQ.$$

Так как R удовлетворяет правому градуированному условию Оре относительно M, то $r_1u = bv$ для некоторых $u \in M$ и $v \in R$. Отсюда следует, что $(bv)P^{\mathrm{gr}}(R)^k = r_1uP^{\mathrm{gr}}(R)^k \subseteq r_1P^{\mathrm{gr}}(R)^k = 0$. Так как $b \in S$, то $vP^{\mathrm{gr}}(R)^k = 0$ и $v \in \mathrm{l}_R(P^{\mathrm{gr}}(R)^k)$. Имеем $bv = r_1u \in T_k \subseteq P^{\mathrm{gr}}(R)$ и

$$v \in (QP^{\mathrm{gr}}(R)Q) \cap R = P^{\mathrm{gr}}(R)Q \cap R \subseteq P^{\mathrm{gr}}(R).$$

Следовательно, $v \in T_k$ и

$$r_2b^{-1}r_1a^{-1} = r_2(vu^{-1})a^{-1} = (r_2v)(au)^{-1},$$

где $r_2v \in T_k$. Это доказывает, что T_kQ — идеал в Q. Покажем, что кольцо $R_k = R/T_k$ удовлетворяет правому условию Оре относительно полугруппы $M_k = \{c + T_k \mid c \in M\}$. Пусть $a_k \in M_k$, $r_k \in h(R_k)$ — такие элементы, что $r_ka_k = 0$. Тогда $ra \in T_k = T_kQ \cap R$ и $r \in T_k$, откуда следует, что $r_k = 0$. Мы доказали, что $\mathrm{r}(a_k) = 0$, следовательно, по лемме 1 a_k — регулярный элемент в R_k. Пусть $s_k \in R_k$ и $c_k \in M_k$. Так как R удовлетворяет правому градуированному условию Оре относительно M, то $sc' = cs'$ для некоторых $c' \in M$, $s' \in h(R)$. Следовательно, $c'_ks_k = c_ks'_k$, значит, R_k удовлетворяет правому градуированному условию Оре относительно M_k и обладает градуированным правым кольцом частных $R_kM_k^{-1}$ относительно M_k. Отображение

$$\begin{cases} Q/T_kQ \to R_kM_k^{-1}, \\ (ra^{-1} + T_kQ) \to (r + T_k)(a + T_k)^{-1}, \quad a \in M, \ r \in R, \end{cases}$$

является изоморфизмом градуированных колец. $\square$

3.2. Доказательство импликаций 1) $\Longrightarrow$ 3), 4), 5) в теореме 6

Сначала докажем лемму, которую будем использовать несколько раз.

Лемма 7. *Если R — градуированный правый порядок в gr-артиновом справа кольце $Q = RS^{-1}$, то R — ненильпотентное правое gr-кольцо Голди.*

Доказательство. Кольцо R не является нильпотентным кольцом, так как по условию содержит регулярные элементы. Пусть $I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots$ — бесконечная прямая сумма ненулевых правых градуированных идеалов в R. Тогда $I_1Q \oplus I_2Q \oplus \ldots$ — бесконечная прямая сумма градуированных правых идеалов в кольце Q, что противоречит его gr-артиновости справа.

Поскольку gr-артиново справа кольцо Q содержит единицу, то оно является gr-нётеровым справа. В частности, Q удовлетворяет условию максимальности для правых градуированных аннуляторных идеалов, следовательно, его подкольцо R тоже удовлетворяет этому условию. Итак, R — правое gr-кольцо Голди. $\square$

Доказательство импликаций 1) $\Longrightarrow$ 3), 4), 5). По лемме 7 R — ненильпотентное правое gr-кольцо Голди. Утверждение 4) вытекает из следствия 1. Имеем $P^{\mathrm{gr}}(Q) \cap R \subseteq P^{\mathrm{gr}}(R)$. Градуированное gr-артиново справа кольцо $Q' = Q/P^{\mathrm{gr}}(Q)$ gr-полупервично, а значит, и вполне gr-приводимо. Пусть $R' = \{r + P^{\mathrm{gr}}(Q) \mid r \in R\}$. Всякий элемент $x' \in Q'$ имеет вид $x' = r'(c')^{-1}$, где $r', c' \in R'$, поэтому $Q' = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R')$. По теореме 4 R' — gr-полупервичное правое кольцо Голди, а в силу теоремы об изоморфизме для градуированных колец $R' \cong R/\big(R \cap P^{\mathrm{gr}}(Q)\big)$. Следовательно, $P^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq R \cap P^{\mathrm{gr}}(Q)$, и в силу доказанного выше $P^{\mathrm{gr}}(R) = R \cap P^{\mathrm{gr}}(Q)$. Таким образом, $\bar{R} = R/P^{\mathrm{gr}}(R) \cong R'$ и $Q/P^{\mathrm{gr}}(Q) = Q^{\mathrm{gr}}(\bar{R})$. В частности, $\bar{R} \cong R'$ — gr-полупервичное правое кольцо Голди.

Докажем, что $M = S$. Если $a \in S$, то a обратим в Q и $a + P^{\mathrm{gr}}(Q)$ обратим в $Q/P^{\mathrm{gr}}(Q)$. Отсюда следует, что $a + P^{\mathrm{gr}}(Q)$ — регулярный элемент в R', а значит, и в $\bar{R}$. Пусть $b \in M$, т. е. $\bar{b}$ — регулярный элемент в кольце $\bar{R}$. Тогда $\bar{b}$ — регулярный элемент в R'. Следовательно, $b + P^{\mathrm{gr}}(Q)$ обратим в $Q/P^{\mathrm{gr}}(Q)$, и ввиду нильпотентности идеала $P^{\mathrm{gr}}(Q)$ b обратим в Q, а значит, $b \in S$. Итак, $M = S$. Так как $Q = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$, то Q удовлетворяет правому условию Оре относительно M и $Q = RM^{-1}$. По лемме 6 $Q/T^{\mathrm{gr}}_k(Q)$ — градуированное правое кольцо частных кольца R_k относительно полугруппы M_k. Кольцо $Q/T^{\mathrm{gr}}_k Q$ — gr-артиново справа кольцо. По лемме 7 R_k — правое gr-кольцо Голди. Из леммы 6 следует, что $P^{\mathrm{gr}}(Q) = P^{\mathrm{gr}}(R)Q$. $\square$

3.3. Доказательство импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) в теореме 6

Лемма 8. *Для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех однородных элементов $a \in M$, $x \in h(T^{\mathrm{gr}}_k)$ существуют такие однородные элементы $y \in h(R)$ и $b \in M$, что $xb = ay$.*

Доказательство. Заметим, что поскольку $a \in M \subseteq S$, то aR — gr-существенный правый идеал в R. Проведём индукцию по k. Для $k = 1$ рассмотрим градуированный правый идеал

$$J = \{r \in R \mid xr \in aR\}.$$

Пусть I — произвольный ненулевой градуированный правый идеал в R. Если $xI = 0$, то $I \subseteq J$. Если же $xI \neq 0$, то $xI \cap aR \neq 0$ (так как aR — существенный правый идеал в R) и существуют однородные $i \in I$, $r \in R$, такие что $xi = ar \neq 0$. Если при этом $i \in P^{\mathrm{gr}}(R)$, то, учитывая, что $x \in T_1 = P^{\mathrm{gr}}(R) \cap \mathrm{l}_R\big(P^{\mathrm{gr}}(R)\big)$, получаем $xi = 0$. Противоречие. Таким образом, $J \cap I \nsubseteq P^{\mathrm{gr}}(R)$ и $P^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq J$. Отсюда следует, что J — правый градуированный идеал, строго содержащий $P^{\mathrm{gr}}(R)$ и имеющий ненулевое пересечение с каждым ненильпотентным градуированным идеалом. Это означает, что $\bar{J}$ — gr-существенный правый идеал в $\bar{R}$.

Кольцо $\bar{R}$ градуировано по периодической группе G и является gr-полупервичным правым кольцом Голди, поэтому по теореме 3 gr-существенный правый идеал $\bar{J}$ содержит однородный регулярный элемент $\bar{c}$. Так как $P^{\mathrm{gr}}(R) \subsetneq J$ и $M \subseteq S$, то $c \in M \cap J$. Таким образом, существует такой однородный элемент $y \in R$, что $xc = ay$. Итак, лемма доказана при $k = 1$.

Предположим, что утверждение леммы справедливо при $k = n$, и докажем его при $k = n + 1$.

Обозначим образы $a_n = a + T_n$, $x_n = x + T_n$, M_n — аналог M в R_n. Пусть $x \in T^{\mathrm{gr}}_{n+1}$ и $a \in M$. Тогда по лемме 2 $\mathrm{r}_{R_n}(a_n) = 0$. Рассмотрим множество

$$K = \{r_n \in R_n \mid x_n r_n \in a_n R_n\}$$

и заметим, что

$$T^{\mathrm{gr}}_{n+1}/T^{\mathrm{gr}}_n = P^{\mathrm{gr}}(R_n) \cap \mathrm{l}_{R_n}\big(P^{\mathrm{gr}}(R_n)\big).$$

Учитывая, что $P(R_n) = P(R)/T_n$ и $R_n/P(R_n) \cong R/P(R)$, и повторяя рассуждения при $k = 1$, получаем, что $a_n x_n = y_n b_n$ для некоторых однородных $b_n \in M_n$, $y_n \in K$. Отсюда следует, что существуют $b, y \in h(R)$, такие что $b + T^{\mathrm{gr}}_n = b_n$, $y + T^{\mathrm{gr}}_n = y_n$ и $xb - ay \in T^{\mathrm{gr}}_n$, причём по условию однородной регулярности $b \in M$. Элементы xb и ay однородны. Если они имеют одну и ту же степень, то их разность однородна. В противном случае, так как идеал T^{gr}_n градуированный, $xb, ay \in T^{\mathrm{gr}}_n$. Тогда, применяя предположение индукции к элементам a и xb, найдём однородные элементы $c \in M$ и $z \in h(R)$, такие что $az = (xb)c = x(bc)$, причём $bc \in M$.

Если же $xb - ay \in h(R)$, то рассуждения аналогичны лемме 3.17 из [6]. $\square$

Лемма 9. *Кольцо R удовлетворяет правому градуированному условию Оре относительно M.*

Доказательство. Пусть $x \in h(R)$, $a \in M$. Докажем, что существуют $u \in h(R)$, $v \in M$, такие что $au = xv$. Если $x = 0$, то берём $u = 0$ и любой v. Если $x \in P^{\mathrm{gr}}(R)$ и $P^{\mathrm{gr}}(R)^n = 0$, где $n > 1$, то $x \in T^{\mathrm{gr}}_{n-1} = P(R) \cap \mathrm{l}_R(P^{\mathrm{gr}}(R)^{n-1})$, и по лемме 5 существуют такие $u \in h(R)$ и $v \in M$, что $au = xv$. Пусть теперь $x \notin P^{\mathrm{gr}}(R)$. Тогда в gr-полупервичном правом gr-кольце Голди $\bar{R}$ существуют однородные элементы $\bar{b}$ и $\bar{y}$, такие что $\bar{x}\bar{b} = \bar{a}\bar{y}$, откуда следует, что $xb - ay \in P^{\mathrm{gr}}(R)$. Если степени однородных элементов xb и ay равны, то, как и выше, находим такие $u \in h(R)$ и $v \in M$, что $(xb - ay)v = au$, т. е. $a(u + yv) = x(bv)$, где $bv \in M$. Если же степени элементов xb и ay различны, то эти однородные элементы принадлежат градуированному идеалу P^{gr}, поэтому аналогично можно найти такие $u \in h(R)$ и $v \in M$, что $x(bv) = au$, причём $bv \in M$. □

Лемма 10. *Кольцо $Q = RS^{-1}$ gr-артиново справа.*

Доказательство. Пусть n — индекс нильпотентности $P^{\mathrm{gr}}(R)$, т. е.

$$P^{\mathrm{gr}}(R)^n = 0 \neq P^{\mathrm{gr}}(R)^{n-1}.$$

Тогда $T^{\mathrm{gr}}_{n-1} = P^{\mathrm{gr}}(R)$. По лемме 6 имеем, что $Q/P^{\mathrm{gr}}(Q) \cong Q_{n-1}$ — градуированное правое кольцо частных кольца R_{n-1} относительно полугруппы M_{n-1} регулярных элементов R_{n-1}. По теореме 3 Q_{n-1} — вполне gr-приводимое кольцо. Так как $Q/T_kQ \cong Q_k$, то кольцо Q/T_kQ gr-конечномерно справа, следовательно, правый градуированный модуль $T_{k+1}Q/T_kQ$ не содержит бесконечных прямых сумм Q-подмодулей. По лемме 6, учитывая включение $T_{k+1}P^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq T_k$, имеем $T_{k+1}P^{\mathrm{gr}}(R)Q \subseteq T_{k+1}P^{\mathrm{gr}}(Q) \subseteq T_kQ$, откуда следует, что градуированный $Q/P^{\mathrm{gr}}(Q)$-модуль $T_{k+1}Q/T_kQ$ вполне gr-приводим и, значит, имеет конечный композиционный ряд из правых градуированных идеалов кольца Q. По теореме Жордана—Гёльдера Q — gr-артиново справа кольцо. Докажем, что $Q = RS^{-1}$. Для этого, учитывая лемму 9, достаточно показать, что каждый элемент $c \in S$ обратим в Q. Каждый $c_1 \in h(Q)$ представим в виде $c_1 = ra^{-1}$, где $a \in M$, $r \in h(R)$. Если $cc_1 = 0$, то $cra^{-1} = 0$, $cr = 0$ и $r = 0$. Поэтому $\mathrm{r}_Q(c) = 0$. Рассмотрим убывающую цепь градуированных правых идеалов

$$cQ \supseteq c^2Q \supseteq c^3Q \supseteq \ldots .$$

Так как Q — gr-артиново справа кольцо, то $c^nQ = c^{n+1}Q$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $c^n = c^{n+1}q$ для некоторого $q \in Q$. Отсюда $cq = 1$ и $c(qc - 1) = 0$. Так как $\mathrm{r}_Q(c) = 0$, то $qc = 1$ и c — обратимый элемент в Q. □

А. Л. Канунников поддержан грантом РНФ № 16-11-10013П.

Литература

[1] Баженов Д. С. Градуированные первичные кольца Голди // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2017. — № 2. — С. 70—72.

[2] Балаба И. Н., Канунников А. Л., Михалёв А. В. Кольца частных градуированных ассоциативных колец. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 2. — С. 3—74.

[3] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 3. — С. 46—50.

[4] Канунников А. Л. Градуированные кольца частных // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 6. — С. 77—145.

[5] Канунников А. Л. Критерии выполнения теорем Голди для градуированных колец // Алгебра и логика. — 2018. — № 5. — С. 353—359.

[6] Мальцев Ю. Н., Журавлёв Е. В. Лекции по теории ассоциативных колец. — Барнаул, 2014.

[7] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded ring theory. — Amsterdam: North-Holland, 2004.

[8] Small L. Orders in Artinian rings // J. Algebra. — 1966. — Vol. 4. — P. 13—41.

[9] Small L. Orders in Artinian rings. Corrections and addendum // J. Algebra. — 1996. — Vol. 4. — P. 505—507.